

LE PARADOXE DE BANACH-TARSKI

Alexandre Reissman

L'une des plus surprenantes conséquences de l'axiome du choix est sans doute le paradoxe de Banach-Tarski. Celui-ci nous explique en effet qu'il est théoriquement possible de faire un puzzle avec une boule, et de réassembler différemment les morceaux de manière à obtenir deux boules disjointes de même volume ! Qu'on se rassure tout de suite, nous jouons ici sur le mot "morceaux" : s'ils sont bien en nombre fini, il est par contre impossible de les expliciter. Avant de donner l'énoncé exact du théorème, précisons les notations que l'on utilisera :

deux parties A et B de l'espace euclidien \mathbf{R}^3 seront dites superposables, et on notera $A \mathcal{D} B$, si il existe un déplacement D de \mathbf{R}^3 tel que $B = D(A)$. \mathcal{D} est de façon évidente une relation d'équivalence.

On appellera découpage d'une partie A de \mathbf{R}^3 une partition finie $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ de A . On dira que deux parties A et B de \mathbf{R}^3 sont puzzle-équivalentes s'il existe un entier n et des découpages $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$ de A et B tels que pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$, on ait $A_i \mathcal{D} B_i$. On notera alors $A \mathcal{P} B$, et on laisse au lecteur le soin de vérifier que \mathcal{P} est une relation d'équivalence.

Nous allons dans la suite démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME (BANACH-TARSKI). *Si A et B sont deux parties de \mathbf{R}^3 bornées et d'intérieurs non vides, alors A et B sont puzzle-équivalentes.*

1 Le paradoxe de la sphère (Hausdorff, 1914)

La proposition suivante, que nous démontrerons dans cette partie, est due à Hausdorff et sera la clef de la démonstration du théorème de Banach-Tarski.

PROPOSITION. *Il existe un découpage (A, B, C, D) de la sphère unité S de \mathbf{R}^3 où D est dénombrable, A, B et C sont superposables, et $A \mathcal{D} (B \cup C)$.*

Le paradoxe réside dans le fait que, à un ensemble dénombrable près, A est à la fois "la moitié" et "le tiers" de la sphère.

DÉMONSTRATION. L'idée est de considérer les deux rotations vectorielles u et v représentées par les matrices

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique de \mathbf{R}^3 . Si G est le groupe engendré par u et v , alors tout élément r de $G \setminus \{\text{Id}, u\}$ se met sous la forme

$$r = u^{\varepsilon_1} v^{n_1} u v^{n_2} u \dots u v^{n_k} u^{\varepsilon_2}$$

avec ε_1 et ε_2 dans $\{0, 1\}$, et les n_i dans $\{1, 2\}$.

La matrice R de r s'écrit

$$R = \frac{1}{2^k} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \sqrt{3} \\ a_2 & b_2 & c_2 \sqrt{3} \\ a_3 \sqrt{3} & b_3 \sqrt{3} & c_3 \end{pmatrix}$$

où les a_i, b_i et c_i sont des entiers relatifs, avec a_1, b_1, c_1, b_2, b_3 pairs et a_2, a_3, c_2, c_3 impairs. En particulier, a_2 et c_2 sont non nuls, donc r est distinct de u et de l'identité. On en déduit alors facilement que l'écriture précédente est unique.

On définit une partition (I, J, K) de G de la manière suivante :

- pour tout entier n , $(v^2 u)^n$ est dans I
- pour tout entier n , $u(v^2 u)^n$ est dans J
- pour tout entier n , $vu(v^2 u)^n$ est dans K
- les autres éléments de G qui ne sont pas sous une de ces trois formes sont dans I, J, K respectivement suivant que leur décomposition commence à gauche par u, v, v^2 respectivement.

On vérifie aisément que l'on a les relations $K = vJ$, $J = uI$ et $I = u(J \cup K)$. On peut à ce sujet consulter l'article [1] où les ensembles I, J et K sont construits à l'aide d'une machine automatique.

Nous allons maintenant obtenir la construction de A, B, C et D en transposant sur la sphère les propriétés de I, J et K grâce à l'action de G sur S : posons

$$D = \{x \in S \mid \exists r \in G \setminus \{\text{Id}\}, r(x) = x\}$$

alors D est dénombrable, car G est dénombrable et tout élément de G différent de l'identité n'admet que deux points fixes sur S . De plus, G laisse stable D . En effet, si s est dans G et x dans D , alors il existe r dans $G \setminus \{\text{Id}\}$ tel que $r(x) = x$, et donc srs^{-1} laisse fixe $s(x)$ et n'est pas l'identité. Par complémentarité,

G laisse également stable $S \setminus D$, et les orbites des éléments de $S \setminus D$ sous l'action de G constituent une partition de $S \setminus D$: ce sont les classes d'équivalence pour la relation $(x \sim y) \Leftrightarrow (\exists r \in G, r(x) = y)$.

En utilisant l'axiome du choix, on peut construire un ensemble T contenant un élément dans chaque orbite, et on pose $A = I(T)$, $B = J(T)$, $C = K(T)$. D'après les égalités vérifiées entre I , J , et K , on a les relations : $C = v(B)$, $B = v(A)$ et $A = u(B \cup C)$. Nous avons ainsi construit un découpage (A, B, C, D) de S avec A , B et C superposables, A et $B \cup C$ superposables, et D dénombrable. ■

2 Duplication de la boule

Le problème de la duplication d'une sphère est pratiquement résolu grâce au paradoxe de la sphère de Hausdorff : soient S_1 et S_2 deux sphères disjointes de rayon 1, de centres O_1 et O_2 , et soient (A_1, B_1, C_1, D_1) et (A_2, B_2, C_2, D_2) les découpages de S_1 et S_2 obtenus en translatant (A, B, C, D) .

Les relations $A \mathcal{D} (B \cup C)$, $B \mathcal{D} B_1$ et $C \mathcal{D} C_1$ entraînent immédiatement $A \mathcal{P} (B_1 \cup C_1)$.

On a $B \mathcal{D} A$ et $A \mathcal{D} (B \cup C)$, donc $B \mathcal{D} (B \cup C)$. Or $B \mathcal{D} A \mathcal{D} A_1$ et $C \mathcal{D} A \mathcal{D} A_2$, donc $B \mathcal{P} A_1 \cup A_2$.

De même, $C \mathcal{D} (B \cup C)$, $B \mathcal{D} B_2$ et $C \mathcal{D} C_2$, donc $C \mathcal{P} (B_2 \cup C_2)$.

Finalement, on a

$$(A \cup B \cup C) \mathcal{P} (A_1 \cup B_1 \cup C_1 \cup A_2 \cup B_2 \cup C_2)$$

soit

$$(S \setminus D) \mathcal{P} \left((S_1 \setminus D_1) \cup (S_2 \setminus D_2) \right).$$

Il ne nous reste plus qu'à éliminer les ensembles D , D_1 et D_2 pour achever la duplication de la sphère :

LEMME. Si Σ est une sphère et Δ est un sous-ensemble dénombrable de Σ , on a

$$\Sigma \mathcal{P} (\Sigma \setminus \Delta).$$

DÉMONSTRATION. Soit δ un point tel que δ et $-\delta$ soient dans $\Sigma \setminus \Delta$. Pour tous x et y dans Δ et pour tout entier n , il existe au plus n rotations r d'axe $(0, \delta)$ telles que $r^n(x) = y$ (car $(0, \delta) \cap \Delta = \emptyset$), donc l'ensemble des rotations r d'axe $(0, \delta)$ vérifiant qu'il existe $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, x et y dans Δ tels que $r^n(x) = y$ est dénombrable. Il existe donc une rotation ρ ne vérifiant pas cette propriété, et les ensembles $\rho^n(\Delta)$ où n entier sont deux à deux disjoints. On pose $U = \cup_{n \geq 0} \rho^n(\Delta)$, alors $\rho(U) = \cup_{n \geq 1} \rho^n(U) = U \setminus \Delta$, donc $U \mathcal{D} (U \setminus D)$.

Ainsi $(\Sigma \setminus \Delta) \mathcal{P} \Sigma$ au moyen des deux morceaux U et $\Sigma \setminus U$. ■

Il vient maintenant immédiatement $S \mathcal{P} (S_1 \cup S_2)$. Si K , K_1 et K_2 désignent alors les boules fermées de centres respectifs O , O_1 , et O_2 et de rayons 1, alors on a :

$$(K \setminus \{O\}) \mathcal{P} \left((K_1 \setminus \{O_1\}) \cup (K_2 \setminus \{O_2\}) \right)$$

il suffit en effet de prendre comme morceaux les réunions des segments joignant les centres des sphères aux points des morceaux précédents et privés des centres, et comme déplacements les déplacements précédents. Il nous reste pour achever la duplication des boules à démontrer le lemme suivant :

LEMME. une boule est puzzle-équivalente à la même boule privée de son centre.

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer le résultat pour la boule unité K . Posons

$$\Delta = \{(\cos n, \sin n, 0), n \in \mathbf{N}\}$$

alors la rotation d'angle 1 radian et d'axe $(0, z)$ envoie Δ sur $\Delta \setminus \{(1, 0, 0)\}$. On a donc

$$\left((K \setminus \Delta) \cup \Delta \right) \mathcal{P} \left((K \setminus \Delta) \cup (\Delta \setminus \{(1, 0, 0)\}) \right)$$

c'est à dire $K \mathcal{P} (K \setminus \{(1, 0, 0)\})$, et comme $(K \setminus \{(1, 0, 0)\}) \mathcal{P} (K \setminus \{0\})$ (en considérant les morceaux $K \setminus \{(1, 0, 0), 0\}$ et $\{(1, 0, 0), 0\}$), on a $K \mathcal{P} (K \setminus \{0\})$. ■

Par une récurrence triviale, on obtient finalement le résultat :

PROPOSITION. Une réunion finie de boules de rayon 1 est puzzle-équivalente à la boule unité.

3 Démonstration du théorème de Banach-Tarski

Nous allons utiliser l'importante propriété de la puzzle-équivalence suivante :

PROPOSITION. Soient A et B deux parties de \mathbf{R}^3 . Si A est puzzle-équivalente à une partie de B et B est puzzle-équivalente à une partie de A , alors A et B sont puzzle-équivalentes.

DÉMONSTRATION. La preuve s'inspire de la démonstration du théorème de Cantor-Bernstein, qui dit que s'il existe une injection de X dans Y et une injection de Y dans X , alors il existe une bijection entre X et Y .

Soient $A' \subset A$ et $B' \subset B$ tels que $A \mathcal{P} B'$ et $B \mathcal{P} A'$, $(A_i)_{1 \leq i \leq p}$ et $(B'_i)_{1 \leq i \leq p}$ (resp. $(B_j)_{1 \leq j \leq q}$ et $(A'_j)_{1 \leq j \leq q}$) des découpages de A et B' (resp. B et A'), et $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$ (resp. $(g_j)_{1 \leq j \leq q}$) des déplacements tels que $f_i(A_i) = B'_i$ (resp. $g_j(B_j) = A'_j$). On définit alors $f : A \rightarrow B'$ de façon à ce que f coïncide avec f_i sur A_i , et $g : B \rightarrow A'$ coïncidant avec g_j sur B_j ; f et g sont donc bijectives.

On pose

$$X = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} (g \circ f)^n (A \setminus A').$$

On définit alors une application $h : A \rightarrow B$ par

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) \text{ si } x \in X \\ h(x) &= g^{-1}(x) \text{ si } x \in A \setminus X \end{aligned}$$

Elle est bien définie sur $A \setminus X$ car $A \setminus X \subset A'$. Prouvons que h est une bijection de A dans B :

- si $h(x) = h(x')$ avec x et x' dans A , alors si x et x' sont tous les deux dans X ou dans $A \setminus X$, il est évident que $x = x'$. Si $x \in X$ et $x' \in A \setminus X$, alors il existe un entier n et un y dans $A \setminus A'$ tels que $x = (g \circ f)^n(y)$, mais $h(x) = h(x')$ implique $f(x) = g^{-1}(x')$, donc $x' = g \circ f(x) = (g \circ f)^{n+1}(y)$, et donc $x' \in X$, ce qui est absurde. La fonction h est donc injective.

- soit $y \in B$ et soit $x = g(y)$. Si x est dans X , alors il existe un entier n et un x' dans $A \setminus A'$ tels que $x = (g \circ f)^n(x')$. Comme x est dans A' , on a nécessairement $n \geq 1$. Par injectivité de g , on a alors $y = f((g \circ f)^{n-1}(x'))$ avec $(g \circ f)^{n-1}(x')$ dans X , donc $y = h((g \circ f)^{n-1}(x'))$, et h est surjective.

On obtient alors le découpage suivant de A :

$$\left((X \cap A_i)_{1 \leq i \leq p}, \left((A \setminus X) \cap g^{-1}(B_j) \right)_{1 \leq j \leq q} \right)$$

au moyen de $p + q$ morceaux, et le découpage de B obtenu en prenant les images par h de ces morceaux. Comme la restriction de h à l'un des morceaux précédents vaut soit un des f_i , soit un des g_j^{-1} , on a $A \mathcal{P} B$. ■

Nous avons maintenant tous les outils pour démontrer le théorème de Banach-Tarski.

Soit X une partie bornée et non vide de \mathbf{R}^3 , alors X contient une boule fermée de rayon $r > 0$. L'adhérence de X étant compacte, il existe un nombre fini de boules fermées $(K_i)_{1 \leq i \leq n}$ de rayon r telles que X soit inclus dans la réunion des K_i . On pose alors

$$\begin{aligned} X_1 &= X \cap K_1 \\ X_2 &= (X \cap K_2) \setminus X_1 \\ &\vdots \\ X_n &= (X \cap K_n) \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} X_i \right) \end{aligned}$$

de sorte que (X_i) soit un découpage de X . Soient $(K'_i)_{1 \leq i \leq n}$ des boules fermées disjointes de rayon r , et τ_i les translations envoyant K_i sur K'_i . Si on pose $Y_i = \tau_i(X_i)$ et $Y = \bigcup_{i=1}^n Y_i$, on a $X \mathcal{P} Y$ avec $Y \subset \bigcup_{i=1}^n K'_i$. Or on a

$$K'_1 \mathcal{P} \left(\bigcup_{i=1}^n K'_i \right)$$

comme on l'a vu précédemment, donc Y est puzzle-équivalente à une partie de K'_1 en considérant l'homologue de Y par les déplacements envoyant $\bigcup_{i=1}^n K'_i$ sur K'_1 . X est donc puzzle-équivalente à une partie de K'_1 , elle-même superposable à une boule de rayon r incluse dans X . X et K'_1 sont donc puzzle-équivalents.

Il ne reste plus qu'à montrer que la boule de centre O et de rayon r et la boule unité de \mathbf{R}^3 sont puzzle-équivalentes : si $r \leq 1$ alors la boule unité contient une boule de rayon r et on lui applique ce qu'on vient de faire pour X , et si $r > 1$, on échange les rôles de 1 et r .

Toute partie non vide et bornée de \mathbf{R}^3 est donc puzzle-équivalente à la boule unité.

4 Commentaires

Si le résultat de Hausdorff sur la sphère joue un rôle important dans la démonstration (certains auteurs parlent du paradoxe de Banach-Tarski-Hausdorff), il ne faut pas négliger les travaux de Banach et Tarski. C'est à eux que l'on doit en effet la formulation et l'étude des propriétés de la puzzle-équivalence, ainsi que l'élimination de l'ensemble dénombrable D .

En fait la motivation de Hausdorff en 1914 était de résoudre le problème de l'existence d'une "mesure universelle" sur la sphère, c'est à dire une mesure non nulle définie sur toutes les parties de la sphère et invariante par les isométries. Le paradoxe de la sphère donne une réponse négative à cette question.

Démontré en 1923, le paradoxe de Banach-Tarski permet de prouver qu'il n'existe pas de mesure universelle

simplement additive sur \mathbf{R}^3 , alors qu'il en existe sur \mathbf{R}^2 (on peut consulter [2] ou [3]). Il est à noter que ces résultats sont parmi les premières utilisations importantes de l'axiome du choix.

Bibliographie

- [1] **Robert French**, “Le théorème de Banach-Tarski”, article paru dans le “Pour la science” de février 1987.
- [2] **Marc Guinot**, “Le paradoxe de Banach-Tarski” Aleas Editeur.
- [3] **Stan Wagon**, “The Banach-Tarski paradox”, Cambridge University Press.

◇ Alexandre Reissman
ENS-Lyon
46, allée d'Italie
69364 Lyon cedex 7
areissma@ens.ens-lyon.fr