

LA COURBURE DE GAUSS

Sylvain Barré

Introduction

Il est souvent question de courbure en géométrie riemannienne. On se propose ici de comprendre de quoi il s'agit dans le cas de la dimension 2. On définira donc la courbure des surfaces appelée *courbure de Gauss* et on donnera tout de suite un moyen pratique général pour la calculer. Ensuite, pour savoir ce que représente géométriquement cette notion, on donnera trois moyens très visuels pour la comprendre. Pour le premier, on regarde la courbure des courbes tracées sur la surface, pour le second, l'aire des petits disques métriques, et enfin pour le troisième, la position de la surface par rapport à ses plans tangents. Comme il est toujours bon d'avoir quelques exemples en tête, dans la dernière partie, on étudiera plus précisément trois catégories d'exemples : les surfaces de révolution, les voisinages tubulaires et les surfaces réglées.

1 Les deux formes fondamentales, la courbure de Gauss

La courbure est une notion locale, donnons-nous donc un plongement C^∞ d'une surface Σ :

$$\begin{aligned} U \subset \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto M = M(u, v) \end{aligned}$$

où U est un ouvert de \mathbf{R}^2 . On utilisera la notation $\partial M / \partial u = M_u$. Aussi, on suppose Σ orientée par la normale $M_u \wedge M_v$. La métrique induite par celle de \mathbf{R}^3 euclidien, est représentée dans la carte (u, v) par la forme quadratique $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ appelée *première forme quadratique fondamentale* de la surface riemannienne Σ , où, par définition,

$$E = |M_u|^2 ; F = \langle M_u, M_v \rangle ; G = |M_v|^2.$$

Rappelons que la longueur d'une courbe $M(u(t), v(t))$ sera alors donnée par

$$\int_0^1 \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} dt$$

et l'aire de Σ par

$$\int_U |M_u \wedge M_v| dudv.$$

Quand une surface est plongée, il y a une application naturelle C^∞ qui à tout point de Σ associe la normale

unitaire sortante

$$\begin{aligned} \Sigma &\longrightarrow S^2 \\ M &\longmapsto N(M). \end{aligned}$$

Puisque le plan tangent à Σ en M est naturellement identifié au plan tangent à la sphère en $N(M)$, l'application tangente $dN : T\Sigma \longrightarrow TS^2$ peut être vue comme une application linéaire dans chaque plan tangent.

AFFIRMATION. *Pour tout $M \in \Sigma$, $dN(M)$ est une application linéaire symétrique (pour le produit scalaire euclidien).*

DÉMONSTRATION. Dérivons par rapport à v l'égalité $\langle N(M), M_u \rangle = 0$.

On obtient $\langle dN.M_v, M_u \rangle = - \langle N, M_{vu} \rangle$. En inversant les rôles de u et v , et en utilisant le théorème de Cauchy-Schwarz, on voit que

$$\langle dN.M_v, M_u \rangle = \langle dN.M_u, M_v \rangle,$$

ce qui est ce qu'on voulait. ■

$dN(M)$ se diagonalise donc en base orthonormée.

DÉFINITION. *L'application $\Pi := -dN$ est la seconde forme fondamentale. Ses valeurs propres en M_0 , K_1 et K_2 sont les courbures principales, les directions isotropes sont les directions asymptotiques. Le produit $K = K_1 K_2 = \det dN(M_0)$ est la courbure de Gauss en M_0 . Enfin, la demi-somme*

$$H = \frac{K_1 + K_2}{2} = \frac{1}{2} \text{tr } dN(M_0)$$

est la courbure moyenne en M_0 .

EXEMPLES. Dans le cas d'un plan affine, l'application de Gauss est constante donc $K_1 = K_2 = K = H = 0$. Dans le cas de la sphère S^2 plongée dans \mathbf{R}^3 comme on pense et orientée vers l'extérieur, l'application de Gauss N est cette fois l'identité, donc dN aussi et donc $-K_1 = -K_2 = -H = K = 1$. Pour ces deux exemples, les directions principales ne sont pas bien définies.

Remarques :

1. Le signe "−" dans la définition de Π sera expliqué plus loin.
2. Un changement d'orientation change aussi les signes de K_1 , K_2 et H ; par contre K reste inchangée.
3. Bien que pour définir K , nous ayons eu recours à un plongement, Gauss a montré qu'en fait, cette notion ne dépend que de la métrique (du ds^2).

Plus précisément, K peut être calculée en fonction de E , F , G et de leurs dérivées partielles premières et secondes. Ceci constitue le *Theorema Egregium*. On démontre aussi que si dans une certaine carte (r, θ) (appelée carte polaire), la métrique s'écrit $ds^2 = dr^2 + J^2 d\theta^2$, alors

$$K(0, 0) = \lim_{(r, \theta) \rightarrow 0} \frac{1}{J} \frac{\partial^2 J}{\partial r^2}.$$

4. Deux surfaces isométriques ont donc même courbure, réciproquement, si deux surfaces ont des courbures *constantes* identiques alors, elles sont localement isométriques. Pour montrer cela, on utilise des coordonnées polaires (r, θ) qui mettent la métrique sous une forme simple.

On peut prolonger notre liste de définitions :

- Si $K_1(M) = K_2(M)$, on dira que M est un om-bilic,
- Si $K_1(M) = K_2(M) = 0$, on dira que M est un point planaire,
- Si $K(M) = 0$, on dira que M est un point parabolique,
- Si $K(M) > 0$, on dira que M est un point elliptique,
- Si $K(M) < 0$, on dira que M est un point hyperbolique.

2 Calculs explicites de K en fonction de ds^2 et Π

Notons e , f , g les coefficients de la seconde forme toujours dans la base (M_u, M_v) . Nous avons déjà remarqué les égalités suivantes bien commodes pour le calcul :

$$\begin{aligned} e &:= - \langle dN.M_u, M_u \rangle = \langle N, M_{uu} \rangle \\ f &:= - \langle dN.M_u, M_v \rangle = \langle N, M_{uv} \rangle \\ g &:= - \langle dN.M_v, M_v \rangle = \langle N, M_{vv} \rangle \end{aligned}$$

Notons (a_{ij}) la matrice de $-dN$ dans la base (M_u, M_v) , (qui n'est pas nécessairement orthonormée), c'est à dire :

$$\begin{aligned} -dN.M_u &= a_{11}M_u + a_{21}M_v \\ -dN.M_v &= a_{12}M_u + a_{22}M_v \end{aligned}$$

En faisant le produit scalaire de ces deux égalités par M_u puis M_v , on obtient quatre égalités qui peuvent s'écrire matriciellement sous la forme :

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à inverser une matrice d'ordre 2, pour obtenir la trace et le déterminant de la matrice (a_{ij}) . Ici, on obtient en fait sa transposée, mais ce n'est pas gênant. On trouve :

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad \text{et} \quad H = \frac{eG + Eg - 2fF}{EG - F^2}.$$

Remarquons que ces formules sont faciles à retenir, au dénominateur, il y a la première forme, définie positive, et au numérateur, la deuxième. La seconde formule est un dédoublement de la première. A partir de ces deux valeurs, il est facile de calculer les courbures principales qui sont racines du polynôme $X^2 - 2HX + K$, on trouve : $K_i = H \pm \sqrt{H^2 - K}$.

Rappelons les différentes étapes pour le calcul pratique :

1. Trouver un paramétrage (u, v) de la surface.
2. Calculer E , F , et G .
3. Former le produit $M_u \wedge M_v$.
4. Calculer $|M_u \wedge M_v|^2 = |M_u|^2|M_v|^2 \sin^2 \theta = EG - F^2$.
5. Calculer $N = M_u \wedge M_v / \sqrt{EG - F^2}$.
6. Calculer M_{uu} , M_{vv} , M_{uv} puis e , f et g .
7. Enfin, calculer K , H , K_1 , K_2 .

3 Comment voir la courbure d'une surface

Nous allons donner divers moyens pour calculer la courbure d'une surface et surtout pour voir son signe d'un premier coup d'œil.

Lien avec la courbure des courbes gauches tracées sur Σ

Considérons une courbe $\gamma(s)$ tracée sur Σ paramétrée par longueur d'arc. Notons $U = \dot{\gamma}(s)$ et $V = N(\gamma(s)) \wedge U$; de sorte que (U, V, N) soit un repère orthonormé direct. Notons k et t la courbure et la torsion de la courbe gauche γ . De la même façon, on va définir d'autres fonctions scalaires qui sont les coefficients de la matrice antisymétrique qui exprime $(\dot{U}, \dot{V}, \dot{N})$ en fonction de (U, V, N) :

$$\begin{pmatrix} 0 & -k_g & -k_N \\ k_g & 0 & -t_g \\ k_N & t_g & 0 \end{pmatrix}.$$

Si on écrit $n = \cos \alpha N + \sin \alpha V$ la normale à la courbe gauche γ , on trouve facilement les relations :

$$\begin{cases} k \cos \alpha = k_N \\ k \sin \alpha = k_g \\ t = t_g - \dot{\alpha} \end{cases}$$

Avec les définitions suivantes :

1. k_g est la courbure géodésique de γ ,
2. k_N est la courbure normale de γ ,
3. t_g est la torsion géodésique de γ .
4. on appelle *géodésique* (resp. ligne asymptotique, ligne de courbure), une courbe qui vérifie $k_g = 0$ (resp. $k_N = 0$ et $t_g = 0$),

AFFIRMATION. On a les propriétés suivantes :

1. Une courbe est géodésique si et seulement si son plan osculateur est perpendiculaire au plan tangent.
2. Une courbe est ligne asymptotique si et seulement si elle est partout tangente à une direction asymptotique.
3. Une courbe est ligne de courbure si et seulement si elle est partout tangente à une direction principale.

DÉMONSTRATION. 1. C'est évident puisque k_g est la composante de \dot{U} suivant V .

2. On a les égalités suivantes :

$$k_N = \langle N, \dot{U} \rangle = - \langle dN.U, U \rangle = \text{II}(U),$$

ce qui montre ce qu'on cherche.

3. De même,

$$t_g = \langle N, \dot{V} \rangle = - \langle dN.U, V \rangle,$$

mais $\langle dN.U, V \rangle = 0$ signifie que U est vecteur propre de dN .

Notre démonstration est terminée. ■

Remarquons que si on peut tracer une droite sur une surface, alors c'est une géodésique et une ligne asymptotique en même temps.

Courbure des sections normales, théorème de Meusnier

On a déjà vu dans le calcul du second point de la démonstration précédente, que $\text{II}(U) = k_N$, composante normale de l'accélération. Supposons maintenant que γ soit une section normale en M_0 (i.e. l'intersection au voisinage de M_0 du plan normal à Σ en M_0 et de Σ). Il est alors clair que $k_g(M_0) = 0$ pour de telles courbes. Si bien qu'on peut interpréter $\text{II}(U)$ comme la courbure en M_0 de la section normale tangente à U .

PROPOSITION. Les courbures principales K_1 et K_2 en M_0 sont les valeurs extrémales des courbures des sections normales en M_0 prises dans la direction de la normale en M_0 .

DÉMONSTRATION. Il est bien connu que sur le cercle $\{x^2 + y^2 = 1\}$, la fonction $K_1 x^2 + K_2 y^2$ est extrémale pour les directions propres $\{x = 0\}$ et $\{y = 0\}$ (si $K_1 \neq K_2$). ■

Voilà un premier moyen pour reconnaître la courbure. Dans la figure 1, les deux sections normales γ_1 et γ_2 ont des courbures normales opposées ; la courbure de la surface sera donc négative en M_0 .

Dans la figure 2, les sections normales ont toutes des courbures normales de même signe, la courbure sera positive ou nulle.

Dans la figure 3, il y a en plus une section normale de courbure nulle. La courbure de la surface en M_0 sera nulle.

Attention, ce n'est pas parce qu'il y a une droite sur une surface que cette surface est de courbure nulle ; c'est vrai en $K \geq 0$ s'il s'agit d'une section normale, mais faux en général et nous verrons des exemples de surfaces réglées de courbure < 0 (penser au parabolôïde hyperbolique ou à l'herperboloïde à une nappe).

THÉORÈME (MEUSNIER). Fixons-nous un point $M_0 \in \Sigma$ et un vecteur tangent $U \in T_{M_0}\Sigma$. Alors, le lieu des centres de courbure en M_0 des courbes passant par M_0 , tangentes à U , est le cercle de diamètre M_0C , dans le plan (N, V) , où C est le centre de courbure de la section normale. Ce cercle est appelé cercle de Meusnier.

DÉMONSTRATION. Paramétronsons les courbes γ par longueur d'arc, alors, puisque $k_N = \text{II}(U)$, elles ont toutes la même courbure normale. Il suffit maintenant de se souvenir que l'inversion dans le plan envoie les droites ne contenant pas l'origine sur des cercles passant par l'origine. On obtient bien le cercle annoncé. Pour voir la réciproque, c'est-à-dire que tout point du cercle en question est un centre de courbure d'une courbe tangente à U , il suffit de considérer des sections transverses. ■

On pourra penser au cas de la sphère, voir figure 4.

%

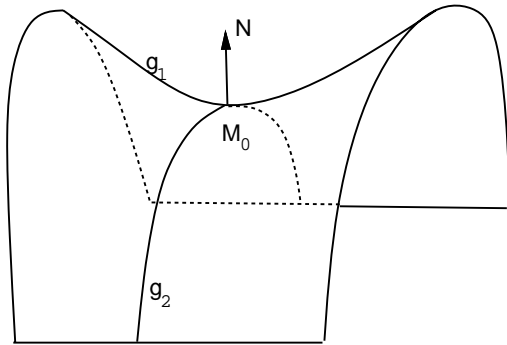


Figure 1: Courbure négative

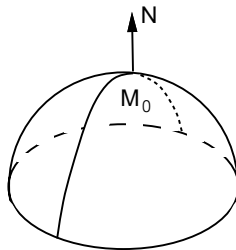


Figure 2: Courbure positive

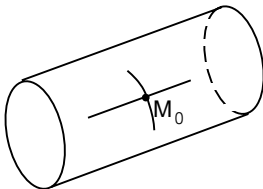


Figure 3: Courbure nulle

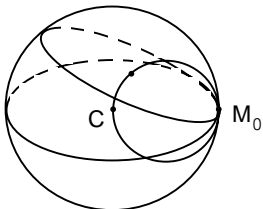


Figure 4: Le cas de la sphère

Les formules de Puiseux et de Diquet

La métrique apporte une distance naturelle sur Σ (voir l'article de Stéphane Grognet dans ce journal). Soit $M_0 \in \Sigma$, notons

$$D(\varepsilon) = \{M \in \Sigma, d(M, M_0) \leq \varepsilon\}$$

le disque de rayon ε , et

$$C(\varepsilon) = \{M \in \Sigma, d(M, M_0) = \varepsilon\}$$

le cercle. Alors, on montre que quand $\varepsilon \rightarrow 0$ on a les développements limités suivants, qui constituent respectivement les formules de Puiseux et de Diquet :

$$\text{Long } C(\varepsilon) = 2\pi\varepsilon\left[1 - \frac{K(M_0)}{6}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)\right]$$

$$\text{Aire } D(\varepsilon) = \pi\varepsilon^2\left[1 - \frac{K(M_0)}{12}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)\right]$$

Pour nous convaincre, nous allons regarder le cas de la sphère de rayon R (de courbure constante $1/R^2$). On calcule :

$$\begin{aligned} L(\varepsilon) &= 2\pi R \sin(\varepsilon/R) \\ &= 2\pi\varepsilon\left[1 - \frac{\varepsilon^2}{6R^2} + o(\varepsilon^2)\right], \\ A(\varepsilon) &= \pi R^2[1 - \cos(\varepsilon/R)] \\ &= \pi\varepsilon^2\left[1 - \frac{\varepsilon^2}{12R^2} + o(\varepsilon^2)\right]. \end{aligned}$$

Voilà un second moyen pour reconnaître la courbure :

En courbure négative, si on met un disque à plat, des plis se forment, son périmètre est $> 2\pi\varepsilon$, figure 6.

En courbure positive, le disque se déchire quand on le met à plat, son périmètre est $< 2\pi\varepsilon$, figure 7.

En courbure nulle, le disque se met bien à plat, figure 8.

3.1 Courbure et convexité

Une surface est localement un graphe au dessus de son plan tangent. Si on se place au voisinage de $O \in \Sigma$, en supposant $T_O\Sigma = \{z = 0\}$ alors, il y aura un paramétrage sous la forme $z = f(x, y)$. Rappelons que $\Pi(U)$ est la courbure en O de la section normale qui est tangente à $U \in T_O\Sigma$. On s'aperçoit donc que la seconde forme coïncide avec la différentielle seconde de f en O si la surface est orientée vers le haut :

$$\Pi = D^2 f(O).$$

Au passage, donnons une définition :

DÉFINITION. Le parabolöide osculateur à Σ en O est défini par $z = \Pi(x, y) = K_1 \xi_1^2 + K_2 \xi_2^2$, où ξ_1 et ξ_2 sont les coordonnées principales en O .

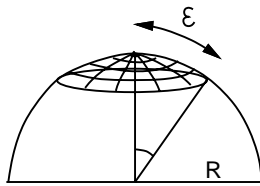


Figure 5:

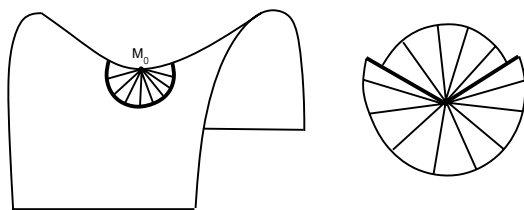


Figure 6: $K < 0$

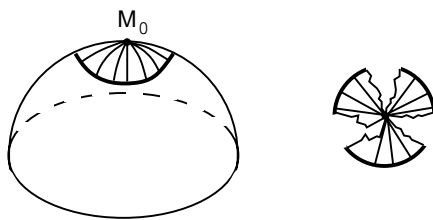


Figure 7: $K > 0$

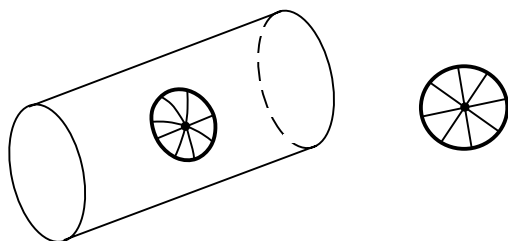


Figure 8: $K = 0$

AFFIRMATION. On a les propriétés suivantes :

- Si $K > 0$ alors Σ est localement strictement convexe, i.e. d'un seul côté de ses plans tangents.
- Si $K < 0$ tout plan tangent traverse la surface.

DÉMONSTRATION. La première affirmation provient du fait que $D^2f(O)$ est définie (positive ou négative), et la seconde s'obtient en considérant le parabolôïde osculateur tangent à l'ordre 2 à Σ en O , qui est un parabolôïde hyperbolique en $K < 0$. ■

Nous voilà donc avec un troisième moyen en poche pour voir la courbure :

En courbure négative, Le plan tangent traverse la surface, figure 9.

En courbure positive, la surface est d'un seul côté du plan tangent, figure 10.

Pour la tôle ondulée (figure11), on n'est ni dans un cas, ni dans l'autre.

4 Quelques exemples

On a donné un moyen pour calculer la courbure à partir d'un paramétrage quelconque, mais dans les cas particuliers, des paramétrages bien choisis peuvent simplifier les expressions. Remarquons pour commencer que la connaissance du groupe des isométries de la surface considérée peut nous renseigner. En particulier, si une surface est homogène, c'est-à-dire si son groupe d'isométries agit transitivement, alors sa courbure sera constante.

Surfaces de révolution

Prenons l'axe O_z pour axe de révolution et notons $\gamma(s)$ la méridienne dans le plan $\{y = 0\}$: $(x(s), 0, z(s))$ (voir figure 12).

AFFIRMATION. Les cercles horizontaux et les méridiennes sont les lignes de courbure.

DÉMONSTRATION. Prenons pour normale $N = (-\dot{z}, 0, \dot{x})$, dans le plan $\{y = 0\}$. Il suffit de différencier (mentalement) l'application de Gauss suivant les courbes en question, pour obtenir le résultat. C'est-à-dire, il s'agit de vérifier que les vecteurs tangents sont propres pour l'application $-dN$ et on obtient, en regardant la figure les valeurs propres qui sont les courbures principales. Si δ est un cercle horizontal et si on note toujours $\dot{\gamma} = U$ et $\dot{\delta} = V$,

$$dN.U = -kU \text{ et } dN.V = -\frac{\dot{z}}{x} V$$

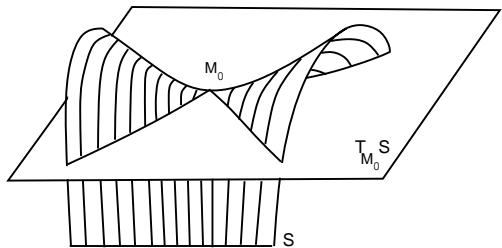


Figure 9: Le plan tangent traverse la surface

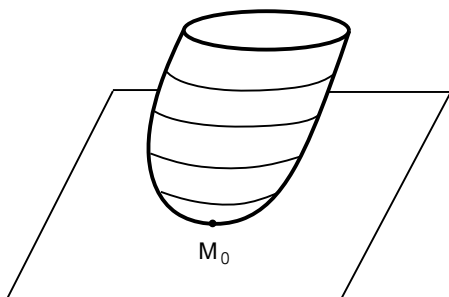


Figure 10: La surface est d'un seul côté du plan tangent

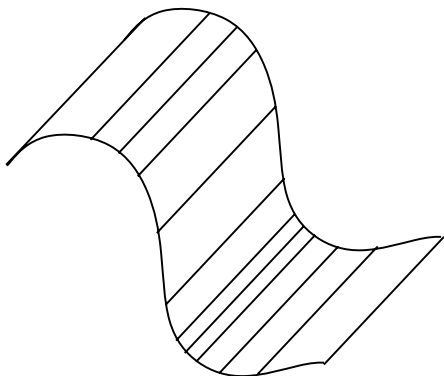


Figure 11: Tôle ondulée

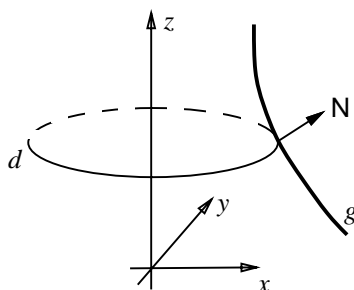


Figure 12: Surface de révolution

ceci achève notre démonstration. ■

Si le paramétrage n'est pas par longueur d'arc, on en déduit les formules pratiques suivantes :

$$K_1 = k = \frac{\ddot{x}\dot{z} - \dot{x}\ddot{z}}{(\dot{x}^2 + \dot{z}^2)^{3/2}}$$

et

$$K_2 = \frac{\dot{z}}{x(\dot{x}^2 + \dot{z}^2)^{1/2}},$$

d'où

$$K = \frac{\dot{z}(\ddot{x}\dot{z} - \dot{x}\ddot{z})}{x(\dot{x}^2 + \dot{z}^2)^2}.$$

Surfaces minimales de révolution

DÉFINITION. Une surface sera dite minimale si sa courbure moyenne H est partout nulle.

REMARQUE. Une surface minimale est nécessairement de courbure de Gauss négative car $K_1 = -K_2 \Rightarrow K = K_1 K_2 \leq 0$.

Un plan est une surface minimale de révolution ; cherchons maintenant les méridiennes transverses à l'horizontale qui engendrent des surfaces minimales. Il s'agit de résoudre l'équation différentielle suivante où x est fonction de z :

$$\frac{\ddot{x}}{(\dot{x} + 1)^{3/2}} = \frac{1}{x(1 + \dot{x}^2)^{1/2}}.$$

En multipliant par $\dot{x}(1 + \dot{x}^2)^{1/2}$, on peut intégrer et trouver

$$\log(1 + \dot{x}^2) = \log x^2 + \log \lambda^2$$

où $\lambda > 0$ est une constante, en prenant l'exponentielle et en intégrant à nouveau, on obtient, à une homothétie près la chaînette d'équation $x = \text{ch}z$, c'est la caténoïde (figure 13).

Surfaces de révolution à courbure constante

Prenons cette fois-ci $z = F(x)$, et résolvons

$$\frac{-\dot{z}\ddot{z}}{x(1 + \dot{z}^2)^2} = \varepsilon$$

où $\varepsilon = \pm 1$ est la courbure. Il vient donc

$$\frac{1}{1 + \dot{z}^2} = \varepsilon x^2 + c$$

où c est une constante réelle quelconque. On n'obtient pas de formules explicites, mais une formule intégrale. Dans chacun des cas $\varepsilon = \pm 1$, on obtient trois types de solutions suivant les valeurs du paramètre c . Pour une valeur particulière de ce paramètre, on obtient la sphère en courbure positive et la surface de Beltrami en courbure négative (voir les dessins dans le livre de M.Berger et B.Gostiaux page 432).

4.1 Voisinages tubulaires

Soit $\Gamma(t)$ une courbe gauche paramétrée par longueur d'arc. Nous noterons n et b les normale et binormale, de plus, k et T seront sa courbure et sa torsion. Considérons une courbe plane γ paramétrée par longueur d'arc $(x(s), y(s))$. Soit la nappe paramétrée :

$$M(s, t) = \Gamma(t) + x(s)n(t) + y(s)b(t).$$

Il est facile de calculer le produit extérieur

$$M_t \wedge M_s = \begin{pmatrix} T(x\dot{x} + y\dot{y}) \\ \dot{y}(1 - kx) \\ -\dot{x}(1 - ky) \end{pmatrix}$$

dans le repère $(\dot{\Gamma}, n, b)$. Si on suppose $|kx| < 1$ pour tous s, t et si de plus γ est un cercle de rayon $\varepsilon < 1/k$ alors la nappe sera une surface immergée et la normale aura une expression simple :

$$N = \cos(s)n(t) + \sin(s)b(t).$$

On calcule alors M_{tt} , M_{ts} , M_{ss} pour finalement arriver à une expression de la courbure de Gauss :

$$K = \frac{-k \cos s}{\varepsilon(1 - k\varepsilon \cos s)}.$$

En regardant dans le plan normal (n, b) , on voit apparaître les régions à $K > 0$, celles à $K < 0$ et celles à $K = 0$, comme le montre la figure 14.

Remarquons que les petits cercles à t constant sont des lignes de courbures associées à la courbure $1/\varepsilon$. Par contre, les courbes à s constant ne sont pas toujours des lignes de courbure. Si la torsion T est nulle, c'est le cas. Par exemple, dans le cas où γ est un cercle de rayon R . Alors, en regardant la figure suivante, on peut obtenir $K_2 = -\cos s / (R - \varepsilon \cos s)$ et bien sûr $K_1 = 1/\varepsilon$.

La figure 16 montre la régionalisation suivant le signe de la courbure.

4.2 Surfaces réglées

Mis à part le cas des cylindres dont les lignes de courbure sont les droites associées à la courbure 0 et les parallèles associées à sa propre courbure en tant que courbe gauche, et celui des cônes dont les rayons sont des lignes de courbure associées à 0, on peut trouver, pour chaque système de règles, un paramétrage particulier pour une surface réglée (au moins localement) :

$$X(t, u) = \alpha(t) + uW(t)$$

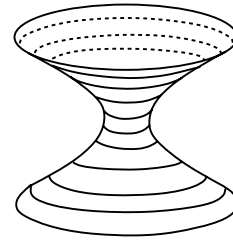


Figure 13: La caténoïde

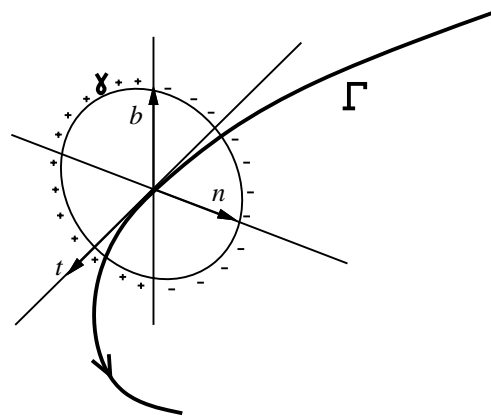


Figure 14: Dans le plan normal

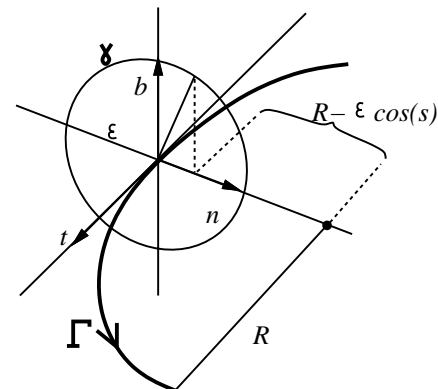


Figure 15: On trouve facilement K_2

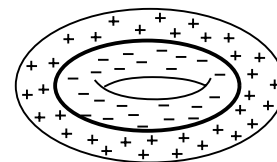


Figure 16: Régionalisation suivant le signe de la courbure

où $|\dot{\alpha}| = 1$, $|W| = 1$, et $\langle \dot{W}, \dot{\alpha} \rangle = 0$. La courbe $\alpha(t)$ s'appellera alors la *ligne de striction*. Par exemple, pour le parabolicoïde hyperbolique $z = x^2 - y^2$, qui possède deux systèmes de règles orthogonales, on trouve les deux lignes de striction $z = 0$, $y = \pm x$. Pour un hélicoïde droit on trouve son axe (voir figure 17).

Si on appelle $\lambda(t) = (\dot{\alpha}, W, \dot{W})/|\dot{W}|^2$ le paramètre, on obtient facilement l'expression :

$$X_t \wedge X_u = \lambda(t)\dot{W} + u(\dot{W} \wedge W).$$

On voit immédiatement que $X_{uu} = 0$ et $X_{tu} = \dot{W}$ donc $g = 0$ et $f = \lambda/\sqrt{\lambda^2 + u^2}$ et donc finalement

$$K = \frac{-\lambda^2}{(\lambda^2 + u^2)^2}$$

Remarques :

1. On a déjà vu que les règles sont à la fois géodésiques et lignes asymptotiques.
2. Si on note θ l'angle orienté entre $N(t, u)$ et $N(t, 0)$ (dans le plan orienté $(\dot{W}, \dot{\alpha})$), on s'aperçoit de la relation $\tan \theta = u/\lambda$, et donc $K = -\cos^4 \theta$, où θ varie de $-\pi/2$ à $\pi/2$ quand on se promène sur une règle d'un bout à l'autre.
3. Si $\lambda(t) = 0$ alors le point $X(t, 0)$ est singulier (i.e. $X_t \wedge X_u = 0$) et la courbure est nulle le long de la règle correspondante.

On a démontré l'affirmation suivante :

AFFIRMATION. *La courbure d'une surface réglée est négative, et nulle seulement le long des règles qui rencontrent la ligne de striction en un point singulier.*

DÉFINITION. *On dira qu'une surface réglée est développable si ses plans tangents ne varient pas le long d'une même règle.*

On notera que pour une surface développable, les règles sont les lignes de courbure associées à la courbure nulle. La courbure de Gauss sera donc elle aussi nulle.

Il est clair que les cylindres et les cônes sont développables et, dans le cadre de nos calculs, vu l'expression de la normale, on voit qu'une surface réglée est développable si et seulement si son paramètre λ est nul, c'est-à-dire si et seulement si sa courbure de Gauss est nulle. Finalement,

AFFIRMATION. *Une surface réglée est développable si et seulement si sa courbure de Gauss est nulle.*

On peut ajouter que si une surface est de courbure nulle, on peut, localement, lui associer un système de règles (les lignes de courbure associées à 0), voir figure 18.

La figure 19 illustre le cas d'une surface non développable.

Conoïdes droits minimaux

Pour terminer, on peut s'amuser à chercher les conoïdes droits minimaux.

DÉFINITION. *Un conoïde est une surface réglée dont les règles ont des directions qui appartiennent toutes à un même plan vectoriel. Un conoïde est droit si sa ligne de striction est une droite dans la direction orthogonale au plan.*

Adoptons le paramétrage suivant :

$$X(t, u) = (u \cos \theta(t) ; u \sin \theta(t) ; t).$$

On calcule X_t , X_u et X_{tt} , et on remarque que :

$$F = 0, \quad g = 0 \quad \text{car} \quad X_{uu} = 0, \quad G = 1,$$

et

$$e = \frac{\ddot{\theta}u}{\sqrt{1 + u^2\dot{\theta}^2}}.$$

On obtient donc

$$eG + Eg - 2fF = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} = 0.$$

Finalement :

AFFIRMATION. *L'hélicoïde est le seul conoïde droit minimal (l'angle est fonction affine de la hauteur).*

La figure 20 montre le cas de l'hélicoïde $\theta = az + b$.

Bibliographie

M.Berger et B.Gostiaux, *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*, PUF, avril 1992.

M.P. Do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Printice-Hall 1976.

P.Attali, J.Guillard et A.Tissier, *Géométrie 6*, Bréal 1981.

◇ Sylvain Barré
UMPA ENS-Lyon
46, allée d'Italie
69364 Lyon cedex 7
sbarre@umpa.ens-lyon.fr

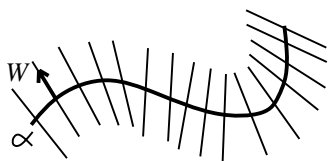


Figure 17: Ligne de striction pour un hélicoïde

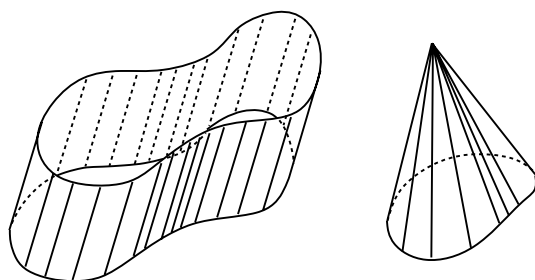


Figure 18: Surfaces développables

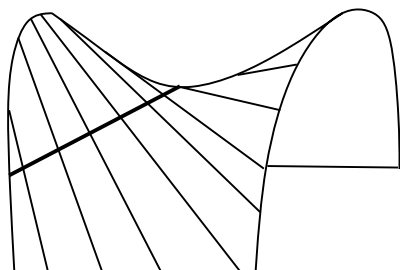


Figure 19: Surface non développable

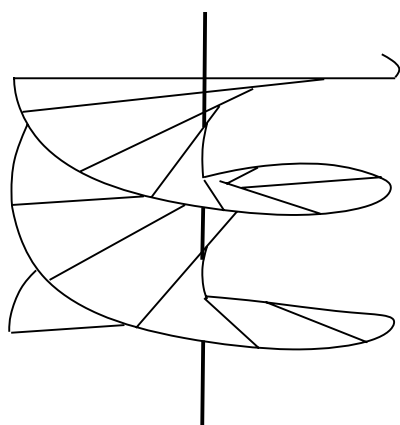


Figure 20: L'hélicoïde $\theta = az + b$