

## UNE INTRODUCTION AUX SYSTÈMES DYNAMIQUES HOLOMORPHES

Jean-Yves Briend et Pascale Roesch

### Introduction

Nous nous proposons dans cet article de vous faire découvrir un domaine qui a connu de grands développements ces 20 dernières années : la théorie de l'itération des fractions rationnelles d'une variable complexe.

L'intérêt porté au sujet date du siècle dernier, avec la méthode de Newton pour la recherche des racines d'un polynôme, et la théorie des équations fonctionnelles. C'est en fait cette dernière qui a motivé les travaux fondateurs de Fatou et Julia. Pendant la majeure partie du dix-neuvième siècle, la théorie des équations fonctionnelles reste un domaine marginal, sans méthode propre et plutôt du ressort des curiosités. L'histoire commence quand en 1884 Koenigs démontre une série de résultats remarquables sur la linéarisation au voisinage d'un point fixe attractif d'une fonction analytique complexe. Ses travaux sont poursuivis dans diverses directions par Leau, Picard, Poincaré, Brouwer, Hadamard etc... Mais jusque-là, les résultats démontrés sont pour la plupart des théorèmes d'existence de solutions. C'est alors qu'entre 1916 et 1920 P. Fatou et G. Julia publient une série d'articles qui posent les bases modernes de cette théorie. Ils s'y interrogent sur le domaine de définition de ces solutions, en s'appuyant sur de nouveaux théorèmes de P. Montel sur les familles normales. Depuis une vingtaine d'années, suites aux expérimentations informatiques de B. Mandelbrot, ce sujet a connu un vaste développement, notamment sous la houlette de A. Douady, J.H. Hubbard et D. Sullivan. Nous allons ici présenter quelques résultats de cette théorie, en espérant ainsi vous ouvrir une porte vers ce vaste domaine.

### Préliminaires

On travaillera sur l'espace  $\widehat{\mathbf{C}}$ , ensemble des complexes  $\mathbf{C}$  que l'on complète par le point  $\infty$ . Pour sa topologie, on rajoute aux ouverts de  $\mathbf{C}$  les complémentaires des compacts de  $\mathbf{C}$ . Ainsi une suite  $z_n \in \widehat{\mathbf{C}}$  tend vers l'infini si  $|z_n| \rightarrow \infty$ , et le complémentaire d'un ouvert est compact.

On se propose de « décrire » la dynamique sur  $\widehat{\mathbf{C}}$  d'une fraction rationnelle complexe  $f$ , c'est-à-dire de donner le comportement de la suite  $u_k = f(u_{k-1})$  en fonction de  $u_0$ . L'étude d'une telle suite dans le cas où  $f$  est une homographie est bien connu (Beardon). Aussi on considèrera les fractions rationnelles  $f = P/Q$  de degré  $d > 1$  où le degré de  $f$  est le sup des degrés de  $P$  et de  $Q$ , et on notera  $f^k$  la composée  $f \circ \dots \circ f$   $k$  fois de  $f$ . Alors pour  $u$  dans  $\widehat{\mathbf{C}}$ , la suite étudiée correspond à l'orbite  $\mathcal{O}(u) = \{f^k(u)\}_{k \in \mathbf{N}}$  de  $u$ .

### Les polynômes, un premier pas vers les fractions rationnelles

L'infini étant fixé par le polynôme on étudie les orbites de points de  $\mathbf{C}$ .

EXEMPLE 1. Prenons le cas du polynôme  $f(z) = z^2$ . Partant d'un point de module différent de 1 la suite va tendre vers 0 ou  $\infty$  suivant la position du module par rapport à 1. Et pour un point de module 1 la suite peut avoir un comportement compliqué sur le cercle unité.

Ce fait est général,

LEMME 1. *Soit  $f$  un polynôme on peut trouver un disque tel que pour un point  $z$  pris à l'extérieur,  $f^n(z)$  tende vers l'infini assez rapidement (comme une suite géométrique).*

L'orbite d'un point a donc deux possibilités, soit elle reste dans le disque, soit un élément de l'orbite se trouve à l'extérieur du disque et alors l'orbite va mourir à l'infini; d'où le nom de rayon d'échappement pour le rayon d'un tel disque.

DÉMONSTRATION. En écrivant  $f(z) = a_0 + zP(z)$  on obtient

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| \geq |P(z)| - \left| \frac{a_0}{z} \right|$$

donc suffisamment loin des racines de  $P$  et de zéro, on a  $|f(z)| \geq \lambda|z|$  avec  $\lambda > 1$ . D'où la convergence en  $\lambda^n$  vers l'infini. ■

On appelle bassin de l'infini, noté  $B(\infty)$ , l'ensemble des points qui s'échappent à l'infini

$$B(\infty) = \{z \mid f^n(z) \rightarrow \infty\}$$

et ensemble de Julia rempli, noté  $K_f$ , les points d'orbite bornée.

DÉFINITION 1. *On définit l'ensemble de Julia de  $f$  comme la frontière de  $K_f$ , notée  $J_f$ .*

Dans l'exemple 1,  $J_f$  est le cercle unité et  $K_f$  le disque unité fermé.

**PROPOSITION 1.**  $K_f$  et  $J_f$  sont des compacts non vides, totalement invariants, i.e invariants par  $f$  et par  $f^{-1}$ , de plus  $K_{f^n} = K_f$ ,  $J_{f^n} = J_f$ .

Les points de l'ensemble de Julia ont donc la particularité d'avoir une orbite bornée alors que dans tout voisinage se trouvent des points attirés par l'infini. Comme  $f$  n'est pas inversible, l'invariance par image réciproque apporte beaucoup.

**DÉMONSTRATION.** 1) Pour qu'un point soit dans l'ensemble de Julia rempli il faut et il suffit que son orbite soit dans le disque fermé de rayon  $r$  (avec  $r$  rayon d'échappement). D'où

$$K_f = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} f^{-n}(\overline{D(0, r)})$$

qui est un compact.

2) Comme  $f$  est de degré  $d > 1$ , elle a au moins un point fixe. Ce point fixe est nécessairement dans  $K_f$ , qui est donc non vide.

3) La totale invariance de  $K_f$  provient du fait que l'image d'un point ainsi que ses préimages ont le même comportement asymptotique que le point en question.

4) D'autre part si un point  $z$  de  $J_f$  était envoyé dans  $\overset{\circ}{K}_f$ ,  $z$  serait dans l'image réciproque de  $\overset{\circ}{K}_f$  qui, par continuité de  $f$ , serait dans  $\overset{\circ}{K}_f$ .

Et  $z \in \overset{\circ}{K}_f$  implique  $f(z) \in \overset{\circ}{K}_f$ , car  $K_f$  est invariant et  $f$  est ouverte, donc une préimage d'un point de  $J_f$  est dans  $J_f$ .

Le reste est laissé au lecteur. ■

### Cas des fractions rationnelles

Ici l'infini ne joue plus de rôle particulier. On voudrait cependant définir l'ensemble de Julia comme le lieu des points qui ont un mauvais comportement vis-à-vis de la convergence. On définit une « assez bonne » convergence en demandant que la limite dépende analytiquement du point de départ. Rappelons un théorème de Weierstrass

**THÉORÈME 1.** Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions holomorphes définies sur un ouvert  $U$  de  $\widehat{\mathbf{C}}$  à valeurs dans  $\widehat{\mathbf{C}}$ . Si la suite converge uniformément sur les compacts de  $U$  vers une fonction  $f$  de  $U$  dans  $\widehat{\mathbf{C}}$ , alors la limite  $f$  est holomorphe.

On peut alors définir la notion de familles normales, essentielle dans cette étude.

**DÉFINITION 2.** On dit qu'une famille  $(f_n)$  de fonctions holomorphes sur un ouvert  $U$  de  $\widehat{\mathbf{C}}$  est normale en  $z \in U$  s'il existe un voisinage  $U_z$  de  $z$  tel que toute sous-suite de  $(f_n)$  admette une sous-suite qui converge uniformément sur les compacts de  $U_z$ .

**DÉFINITION 3.** On appelle ensemble de Fatou, l'ensemble  $F_f$  des points où la suite de fonctions  $(f^n)$  est normale ; et ensemble de Julia de  $f$ , l'ensemble  $J_f$  défini comme le complémentaire de  $F_f$  dans  $\widehat{\mathbf{C}}$ .

Comme  $F$  est ouvert  $J_f$  est encore un compact de  $\widehat{\mathbf{C}}$ . L'ensemble de Fatou et donc l'ensemble de Julia sont complètement invariants (démonstration identique à celle pour les polynômes).

On peut montrer que  $J_f$  est non vide et  $F_{f^n} = F_f$  ainsi que  $J_{f^n} = J_f$ . (la démonstration dans le cas des polynômes ne marche plus ici). Un critère très fort de normalité est donné par le théorème de Montel.

**DÉFINITION 4.** Une suite d'applications holomorphes  $(f_n)$  définies sur un ouvert  $U$  à valeur dans  $\widehat{\mathbf{C}}$  est dite uniformément bornée sur  $U$  s'il existe un compact  $K$  qui ne soit pas  $\widehat{\mathbf{C}}$  tel que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $f^n(U)$  soit inclus dans  $K$ .

**THÉORÈME 2 (MONTEL).** Une suite de fonctions uniformément bornée sur un ouvert  $U$  de  $\widehat{\mathbf{C}}$  est normale en tout point de  $U$ . Soit  $U$  un ouvert de  $\widehat{\mathbf{C}}$ ,  $\{a, b, c\}$  trois points distincts et  $f_n : U \rightarrow \widehat{\mathbf{C}} \setminus \{a, b, c\}$  une suite d'applications holomorphes, alors la suite est normale sur  $U$ .

**PROPOSITION 2.** Si  $f$  est un polynôme les définitions de l'ensemble de Julia coïncident (déf 1 et 3), donc l'ensemble de Fatou de  $f$  est  $B(\infty) \cup \overset{\circ}{K}_f$ .

**DÉMONSTRATION.** Pour un polynôme  $f$  montrons que  $J_f$  coïncide avec l'ensemble des points non normaux. Soit  $z \in \overset{\circ}{K}_f$  et  $U$  un voisinage de  $z$  dans  $\overset{\circ}{K}_f$ , alors la suite  $f^n : U \rightarrow K_f$  (invariance de  $K_f$ ), est normale en tout point de  $U$  (théorème 2).

Un point de  $B(\infty)$  a un voisinage  $U$  qui est encore dans  $\widehat{\mathbf{C}} \setminus K_f$  et  $f^n(U) \subset \widehat{\mathbf{C}} \setminus K_f$  donc par le thm 2 la suite est normale en ce point.

Pour un point de  $J_f$ , s'il y avait un voisinage  $U$  et une sous-suite  $f^{n_k}$  qui convergeait uniformément sur les compacts vers une limite  $g$  holomorphe, alors sur

$U \cap B(\infty)$  on aurait  $g = \infty$  et sur  $U \cap K_f$ ,  $g$  bornée par un rayon d'échappement, ce qui est contradictoire avec la continuité de  $g$ . ■

### Approximation de l'ensemble de Julia

PROPOSITION 3. *Un fermé de  $\widehat{\mathbf{C}}$  totalement invariant par  $f$  contenant 3 points, contient nécessairement l'ensemble de Julia de  $f$ .*

DÉMONSTRATION. En effet soit  $E$  un ensemble totalement invariant de cardinal au moins 3, alors l'ouvert  $\Omega = \widehat{\mathbf{C}} \setminus E$  va être totalement invariant par  $f$  et donc la suite  $(f^n|_{\Omega})$  va éviter trois points de  $E$ . Donc  $\Omega$  est inclus dans l'ensemble de Fatou de  $f$ . ■

L'ensemble de Julia de  $f$  est donc le compact totalement invariant minimal de plus de 3 points. Si un compact d'au plus 2 points est totalement invariant alors il va être évité par tout ouvert ne rencontrant pas ces points. Aussi, pour tout ouvert  $U$  définissons  $E_U$  l'ensemble évité par  $U$  i.e.

$$E_U = \widehat{\mathbf{C}} \setminus \left( \bigcup_{n \in \mathbf{N}} f^n(U) \right).$$

- Cet ensemble peut être vide si l'on part de l'ouvert  $\widehat{\mathbf{C}}$ .
- Si  $V \subset U$  alors  $E_U \subset E_V$  car  $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} f^n(V)$  va recouvrir moins de points que  $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} f^n(U)$ .
- Si  $U \cap J_f \neq \emptyset$  alors  $E_U$  contient au plus 2 éléments. En effet, la suite  $(f^n|_U)$  n'est pas normale donc elle évite un ensemble d'au plus deux points (thm 2).
- Étant donné  $z \in J_f$ , il existe un voisinage  $U$  de  $z$  tel que pour tout voisinage  $V$  de  $z$  assez petit  $E_U = E_V$ . En effet les  $E_U$  sont décroissant avec  $U$  et de cardinal au plus 2.

On notera  $E_z$  ces ensembles  $E_U$  pour  $U$  petit.

LEMME 2. *L'ensemble  $E_z$  est disjoint de l'ensemble de Julia et ne dépend pas de  $z$ .*

DÉMONSTRATION. En effet, par définition  $f^{-1}(E_z) \subset E_z$ . Et comme  $f$  est surjective (on résout  $P(z)/Q(z) = a$ ),  $E_z$  de cardinal fini, on a  $f^{-1}(E_z) = E_z$ . Si  $E_z$  est réduit à un point,  $a$  est fixe et en considérant  $g = \phi f \phi^{-1}$  au lieu de  $f$  (avec  $\phi(z) = (az + b)/(cz + d)$ ) on peut supposer que ce point est l'infini, alors  $g^{-1}(\infty) = \infty$  donc  $g$  est une fraction rationnelle sans pôles i.e. un polynôme. Donc  $E_z$  est disjoint de l'ensemble de l'ensemble de Julia.

Si  $E_z$  contient deux points, par le même raisonnement on peut supposer que ces points sont l'origine et l'infini. Ces points sont fixés ou échangés par  $f$ .

S'ils sont fixés,  $f$  est un polynôme et 0 n'a que lui-même comme préimage donc  $f(z) = \lambda z^d$ . Donc  $E_z$  n'est pas dans l'ensemble de Julia. Si les points sont échangés,  $f(z) = \lambda z^{-d}$ , donc  $E_z$  est disjoint de l'ensemble de Julia.

Si un ensemble  $E$  de points de  $\widehat{\mathbf{C}} \setminus J_f$  est totalement invariant par  $f$ , et si on se donne un point quelconque de l'ensemble de Julia et un voisinage suffisamment petit afin qu'il ne contienne pas de points de  $E$ , les itérés de ce voisinage vont éviter  $E$ , sinon on aurait une image réciproque de  $E$  qui rencontrerait ce voisinage ce qui est exclu par invariance en arrière de  $E$ . L'ensemble  $E_z$  est donc évité par tout voisinage de  $z_0$  avec  $z_0$  quelconque dans  $J$ , et réciproquement. On en déduit donc que  $E_z$  est indépendant de  $z$ . ■

DÉFINITION 5. *On appellera alors ensemble de points exceptionnels de  $f$  cet ensemble  $E = E_z$  pour  $z \in J_f$ .*

Avec  $J_f$  ce sont « les » compacts totalement invariants minimaux. À présent on peut « approximer » l'ensemble de Julia : si on part d'un point de l'ensemble de Julia et que l'on prend ses images réciproques on obtient une image assez bonne de l'ensemble de Julia. En effet, les points non exceptionnels sont des points qui sont recouverts par les images de n'importe quel voisinage d'un point de l'ensemble de Julia. Donc tout voisinage de l'ensemble de Julia va contenir une préimage de ce point non exceptionnel. L'ensemble de Julia est donc inclus dans l'adhérence des images réciproques de n'importe quel point non exceptionnel. Si de plus on part d'un point de l'ensemble de Julia, ce sera un point non exceptionnel et l'adhérence de ses préimages sera contenu dans l'ensemble de Julia. Donc ces deux ensembles coïncident.

### Points périodiques

DÉFINITION 6. *Un point  $x$  est dit périodique de période  $k$  pour  $f$  si  $f^k(x) = x$  et  $f^j(x) \neq x$  pour  $j \leq k-1$ . Soit  $\lambda = (f^k)'(x)$  appelé la valeur propre du cycle  $\mathcal{O}(x)$ . Ce point sera dit répulsif, indifférent, attractif ou superattractif suivant que  $|\lambda| > 1$ ,  $|\lambda| = 1$ ,  $|\lambda| < 1$  ou  $|\lambda| = 0$ .*

La dynamique au voisinage des points périodiques est bien comprise grâce au modèle local que donne le théorème de linéarisation de Koenigs :

**THÉORÈME 3 (KOENIGS).** *Si  $x$  est périodique de période  $k$  et  $|\lambda| \neq 0, 1$ , alors il existe un changement de coordonnées locales holomorphe  $w = \phi(z)$  tel que  $\phi(x) = 0$  et  $\phi f^k \phi^{-1}$  est l'application linéaire  $w \mapsto \lambda w$  pour  $w$  dans un voisinage de l'origine.*

**DÉMONSTRATION.** On suppose  $|\lambda| < 1$ ,  $x = 0$  et on travaille avec  $f$  ayant un point fixe au lieu de considérer  $f^k$ . Pour  $|\lambda| > 1$  on démontre le théorème pour  $f^{-1}$ , dans un voisinage où  $f$  est inversible ( $\lambda \neq 0$ ). L'idée est de partir d'un point  $y$ , de l'amener suffisamment près du point fixe  $x$  en itérant  $f$ , puis dans ce voisinage  $f$  étant proche de son application tangente  $z \mapsto \lambda z$  on va renvoyer  $f^n(y)$  par l'inverse de cette application avec le même nombre d'itérations. On considère la suite définie par  $u_0 = z$  assez proche de  $x$  et  $u_{n+1} = f(u_n)/\lambda$ . La convergence uniforme en  $z$  de cette suite de fonctions holomorphes donnera la conjugaison. On peut trouver un  $c < 1$  tel que  $c^2 < \lambda < c$ , et un disque  $D_r$  sur lequel  $|f(z)| \leq c|z|$  (comme  $u_n = f^n(z)/\lambda^n$ , les orbites vont converger vers 0 au moins en  $c^n$ ) et  $f$  est proche de sa partie linéaire  $|f(z) - \lambda z| \leq k|z|^2$  (Taylor). Alors  $|f^{n+1}(z) - \lambda f^n(z)| \leq kr^2 c^{2n}$ , donc

$$|u_{n+1}(z) - u_n(z)| \leq \left(\frac{kr^2}{\lambda}\right) \left(\frac{c^2}{\lambda}\right)^n$$

La convergence étant géométrique, la limite existe et est holomorphe. Si  $\phi_n(z) = u_n$  et  $\phi$  la limite, comme  $\phi'(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi'_n(0) = 1$ ,  $\phi$  est un difféomorphisme local. ■

Il semble à présent naturel que les points fixes attractifs se trouvent dans l'ensemble de Fatou, on peut se demander où se trouvent en général les points périodiques.

**COROLLAIRE 1.** *Les points périodiques attractifs se trouvent dans l'ensemble de Fatou. Les points périodiques répulsifs ou indifférents rationnel i.e. de valeur propre  $e^{2i\pi p/q}$  sont dans l'ensemble de Julia.*

**DÉMONSTRATION.** Pour un point périodique attractif  $x$  on peut trouver un disque  $D_r$  contenant  $x$  sur lequel  $f$  est une contraction (thm Koenigs). Donc la suite  $(f^n|_{D_r})$  est normale. Pour un point périodique répulsif, il ne peut pas y avoir de voisinage sur lequel une sous-suite convergerait vers une fonction holomor-

phe  $g$ , car la dérivée de  $g$  au point périodique serait infinie ( $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n$ ).

Pour un point périodique indifférent, au lieu de considérer  $f^k$ , supposons que ce point est fixe et de valeur propre 1. Considérons la première dérivée non nulle  $f^{(p)}$  avec  $p > 1$ . On obtient  $(f^n)^{(p)}(x) = n f^{(p)}(x)$  en composant les développements limités, donc on peut appliquer le même argument que précédemment ( $\lim_{n \rightarrow \infty} n f^{(p)}(x) \rightarrow \infty$ ). ■

On en déduit une certaine « auto-similarité » dans l'ensemble de Julia. Soit  $z, \phi$  comme dans le théorème 3, et  $U$  le voisinage de  $x$  sur lequel la linéarisation est définie. Soit  $\tilde{J}_f = \phi(J_f \cap U)$ . Comme l'ensemble de Julia est invariant par  $f$ ,  $\tilde{J}_f$  va être invariant par l'application linéaire correspondante, i.e par un zoom et éventuellement une rotation on retombe sur  $\tilde{J}_f$ .

Si de plus on suppose la valeur propre  $(f^k)'(x)$  non réelle, l'ensemble de Julia ne peut admettre de tangente en ce point. En effet, en passant dans les coordonnées locales la tangente transportée devrait être invariante par la rotation d'angle l'argument de la valeur propre. On trouve donc beaucoup de branches ou des spirales en ce point (voir figure 2). Et comme les images réciproques de ce point sont denses...

**THÉORÈME 4.** *L'ensemble de Julia est l'adhérence des points périodiques répulsifs.*

On fera la preuve dans le cas où  $f$  est un polynôme, et on supposera qu'il n'y a pas de points périodiques indifférents.

- On montre que l'ensemble de Julia est parfait (sans points isolés) : voir plus loin.
- On montre que l'ensemble de Julia est inclus dans l'adhérence des points périodiques. On considère  $J$  l'ensemble de Julia de  $f$  privé des valeurs critiques de  $f$ . Elles sont en nombre fini, car se sont les images des zéros de  $f'$  fraction rationnelle. Soit  $z$  un point de  $J$  qui admet un voisinage ne contenant pas de points périodiques, ni de valeurs critiques. On peut donc trouver un inverse local de  $f$   $I : U \rightarrow \mathbb{C} \setminus U$ . Soit

$$g_n(z) = \frac{(f^n(z) - z)}{(I(z) - z)}$$

C'est une suite normale en tout point de  $U$  car elle évite  $\{0, 1, \infty\}$  (théorème 9). Donc la suite  $(f^n)$  est normale en tout point de  $U$  ce qui est impossible car  $z$  est dans  $J$ .

- Comme les points périodiques attractifs sont dans l'ensemble de Fatou, qu'il n'y a pas de points périodiques indifférents,  $J$  est dans l'adhérence des points périodiques répulsifs. Comme on rajoute un nombre fini de points à  $J$  pour obtenir  $J_f$ , et que celui-ci est parfait on en déduit que  $J_f$  est inclus dans l'adhérence des points périodiques répulsifs.

On trouvera une estimation du nombre de points périodiques indifférents dans [5] au chapitre « Counting Cycles ». Alors en utilisant encore le fait que l'ensemble de Julia est parfait, on voit que  $J_f$  est encore dans l'adhérence des points périodiques répulsifs. Ce théorème est le premier pas dans la démonstration du

**THÉORÈME 5.** *Soit  $f_c = z^2 + c$ , s'il existe un ouvert  $U$  tel que pour tout  $c$  appartenant à  $U$ ,  $f_c$  n'ait pas d'orbites périodiques indifférentes, alors pour  $c_0, c_1 \in U$ ,  $J_{f_{c_0}}$  est homéomorphe à  $J_{f_{c_1}}$ .*

Par exemple pour  $c = 0$ ,  $J_0$  est le cercle unité, pour  $c$  petit  $J_c$  est une courbe simple fermée (admettre que pour  $c$  petit il n'y a pas de cycles indifférents).

On pourra trouver une démonstration de ce fait dans le séminaire Bourbaki de novembre 93 (voir [8]).

### Quelques propriétés topologiques des ensembles de Julia

Dans la suite,  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  désignera une fraction rationnelle de degré  $d \geq 2$ ,  $J$  son ensemble de Julia et  $F = \widehat{\mathbb{C}} - J$  son ensemble de Fatou. Nous avons déjà vu que  $J$  est compact et non-vide. Il est de plus sans point isolé :

**THÉORÈME 6.** *L'ensemble de Julia d'une fraction rationnelle est parfait.*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $z_0$  un point de  $J$  et  $U$  un voisinage ouvert de  $z_0$ . Montrons que  $(U - \{z_0\}) \cap J \neq \emptyset$ . Deux cas peuvent se produire :

- $z_0$  n'est pas périodique ; soit alors  $z_1 \in f^{-1}(z_0)$ . Pour tout  $n \geq 0$ , on a naturellement  $f^n(z_0) \neq z_1$ .  $J$  étant totalement invariant,  $z_1 \in J$  et ses préimages itérées sont denses dans  $J$ . Il existe donc  $\zeta \in U$  tel que  $f^m(\zeta) = z_1$  et donc  $\zeta \neq z_0$ .
- $z_0$  est périodique ; soit alors  $n$  sa période. Si  $z_0$  était l'unique solution de l'équation  $f^n(z) = z_0$ , comme  $f^n$  est de degré  $d^n \geq 2$ ,  $z_0$  serait un point fixe superattractif, et donc ne serait pas dans  $J$ ,

ce qui est absurde. Il existe donc  $z_1 \neq z_0$  tel que  $f^n(z_1) = z_0$ . S'il existait  $j$  tel que  $f^j(z_0) = z_1$ , on pourrait supposer par périodicité de  $z_0$  que  $0 \leq j < n$ , et il viendrait  $f^j(z_0) = f^{n+j}(z_0) = f^n(z_1) = z_0$  ce qui contredirait la définition de  $n$ . Donc pour tout  $j$ ,  $f^j(z_0) \neq z_1$  et on peut appliquer le raisonnement fait dans le cas où  $z_0$  n'est pas périodique.

Une autre preuve plus courte est due à Milnor :  $J$  est infini et compact donc contient un point  $z_0$  non isolé dont l'ensemble des préimages itérées forme un ensemble dense de points non isolés. ■

En 1918, Lattès a construit une fraction rationnelle dont l'ensemble de Julia est égal à tout  $\widehat{\mathbb{C}}$ . C'est une bonne illustration du théorème suivant :

**THÉORÈME 7.** *Si l'intérieur de  $J$  est non-vide, alors  $J = \widehat{\mathbb{C}}$ .*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $E$  l'ensemble exceptionnel (définition 12). Supposons l'intérieur de  $J$  non-vide et montrons que  $J = \widehat{\mathbb{C}}$ . Soit  $U \subseteq J$  un ouvert non-vide.  $J$  est invariant et donc

$$J \supseteq \bigcup_{n \geq 0} f^n(U) = \widehat{\mathbb{C}} - E$$

Or  $E$  est fini donc  $\widehat{\mathbb{C}} - E$  est dense dans  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Enfin  $J$  est fermé, et contenant un ensemble partout dense, il est égal à  $\widehat{\mathbb{C}}$ . ■

Au vu des expérimentations sur ordinateurs, les ensembles de Julia paraissent présenter une certaine homogénéité de structure, en ce sens que leur aspect géométrique semble le même quelle que soit l'échelle à laquelle on les observe. Voici un résultat allant dans ce sens :

**THÉORÈME 8.** *Soit  $D$  un ouvert rencontrant le Julia. Alors il existe un entier  $N \geq 0$  tel que  $f^N(D \cap J) = J$ .*

Ce résultat est en fait une conséquence directe du

**LEMME 3.** *Soit  $A$  un fermé de  $\widehat{\mathbb{C}}$  tel que  $A \cap E = \emptyset$ . Alors pour tout  $p \in J$  et tout  $U$  voisinage de  $p$ , il existe  $N \geq 0$  tel que  $f^N(U) \supseteq A$ .*

**DÉMONSTRATION.** D'après le théorème 16, les points périodiques répulsifs sont denses dans  $J$ . Soit donc  $q \in J$  un tel point de période  $n$ . Par le théorème de Koenigs, il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $q$  tel que  $V \subseteq U$  et  $V \subseteq f^n(V)$ . Comme  $A \cap E = \emptyset$ , par définition de  $E$  on a  $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{kn}(V)$ . Par construction, la suite  $(f^{kn}(V))_n$  est une suite croissante

d'ouverts, et par compacité de  $A$ , il existe un  $k$  tel que  $A \subseteq f^{kn}(V)$ . Ceci achève la démonstration. ■

Pour démontrer le théorème, on applique le lemme à  $A = J$ .

Regardons maintenant les bassins d'attraction des points fixes attractifs. Comme ils forment des composantes connexes de l'ensemble de Fatou, la connaissance de leur topologie nous est précieuse.

**DÉFINITION 7.** Soit  $z_0$  un point périodique attractif de période  $k$ . Alors son bassin d'attraction est l'ensemble  $A(z_0) = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} \mid f^{kn}(z_0) \rightarrow \mathcal{O}(z_0)\}$  et son bassin immédiat est la composante connexe de  $A(z_0)$  contenant  $\mathcal{O}(z_0)$ .

**THÉORÈME 9.** Soit  $z_0$  un point périodique attractif et  $A(z_0)$  son bassin d'attraction. Alors  $A(z_0)$  est une union de composantes connexes de l'ensemble de Fatou et  $\partial A(z_0) = J$ .

**DÉMONSTRATION.** Soit  $U$  un voisinage de l'orbite  $\mathcal{O}(z_0)$  de  $z_0$ , contenue dans l'ensemble de Fatou. Alors  $A(z_0) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(U)$ , et donc  $A(z_0)$  est un ouvert de l'ensemble de Fatou. Soit  $w_0 \in \partial A(z_0)$ , et  $V$  un voisinage de  $w_0$ . Sur  $V \cap A(z_0)$ , les images successives d'un point tendent vers  $z_0$ , tandis que sur  $V - A(z_0)$ , elles restent hors d'un voisinage ouvert de  $z_0$ .  $\{f^n\}$  ne peut donc être normale au voisinage de  $w_0$ , et donc  $w_0 \in J$ . Enfin  $\partial A(z_0)$  est complètement invariant, comme  $A(z_0)$ , et donc  $\partial A(z_0) = J$ . ■

Le résultat central dans l'étude des bassins d'attraction est le :

**THÉORÈME 10.** Soit  $p$  un point fixe attractif et  $A^*$  son bassin d'attraction immédiat. Alors  $A^*$  contient au moins un point critique.

**DÉMONSTRATION.** Elle s'appuie sur le lemme suivant, découlant de l'inversion locale holomorphe et de la théorie des revêtements :

**LEMME 4.** Soit  $S$  une fraction rationnelle,  $D$  un domaine simplement connexe ne contenant pas de valeurs critiques de  $S$ ,  $c \in S^{-1}(D)$  et  $d \in D$ . Alors il existe une application analytique  $I : D \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  telle que  $I(d) = c$  et  $S \circ I = \text{id}_D$ .

Supposons maintenant par l'absurde que  $A^*$  ne contienne pas de point critique de  $f$ . Soit  $U$  un voisinage simplement connexe de  $p$  contenu dans  $A^*$ . Alors  $f(U)$  ne contient pas de valeurs critiques de  $f$  et on peut appliquer le lemme à  $f|_U$ . Il existe alors une

fonction analytique  $S$  telle que  $S(p) = p$ .  $S(U)$  est un voisinage simplement connexe de  $p$  contenu dans  $A^*$ . Comme  $J$  est infini et en particulier de cardinal plus grand que trois et que pour tout  $n \geq 0$   $S^n(U) \subseteq A^* \subseteq \widehat{\mathbb{C}} - J$ , la famille  $\{S^n\}$  est normale d'après le théorème de Montel, ce qui est impossible car  $p$  est un point fixe répulsif de  $S$ . ■

On déduit de ce résultat une intéressante alternative topologique pour les bassins :

**THÉORÈME 11.** Soit  $p$  un point fixe attractif. Alors son bassin immédiat est soit simplement connexe soit infiniment connecté, i.e. son bord a une infinité de composantes connexes.

**DÉMONSTRATION.** Notons  $A^*$  le bassin immédiat d'attraction de  $p$ , comme ci-dessus. Supposons par l'absurde que  $A^*$  ne soit ni simplement connexe ni infiniment connecté. Sa frontière a alors  $q \geq 2$  composantes connexes. Topologiquement,  $A^*$  est un disque percé de  $q - 1$  trous. On peut alors définir sa caractéristique d'Euler-Poincaré au moyen d'une triangulation. Si celle-ci a  $s$  sommets,  $a$  arêtes et  $f$  faces, la caractéristique est  $\chi = s - a + f$ . Pour un disque percé de  $q - 1$  trous, on peut facilement construire une triangulation comportant  $2q - 2$  sommets,  $3q - 3$  arêtes et 1 face, ce qui donne  $\chi = -(q - 2)$ . En particulier  $\chi \leq 0$ . Par le théorème 10, il y a dans  $A^*$  au moins un point critique. Au voisinage d'un tel point  $f$  est du type  $f(z) = z^{n(z_0)}$ , avec  $n(z_0) > 1$ . Enfin hors des points critiques, chaque point a exactement  $d$  images réciproques et  $d$  ne dépend pas du point. Ici  $d$  est le degré de  $f$ , supposé  $\geq 2$ . On dit que  $f : A^* = X \rightarrow Y = A^*$  est un revêtement ramifié. Prenons au but une triangulation de telle sorte que toute image d'un point critique soit un sommet et qu'aucune face ni arête ne contienne d'image de point critique dans son intérieur. Notons  $S_y, A_y, F_y$  le nombre de sommets, arêtes et faces.  $f$  remonte cette triangulation en une autre de nombres  $S_x, A_x, F_x$ . Alors  $A_x = dA_y$  et  $F_x = dF_y$ . Pour les sommets, on peut montrer que

$$S_x = dS_y - \sum_{x \text{ sommet}} (n(x) - 1)$$

(avec  $n(x) = 1$  si l'on n'est pas à un point critique) de sorte que si l'on note

$$b = \sum_{x \text{ sommet}} (n(x) - 1)$$

appelé le nombre de ramification, on a la formule suivante  $\chi(X) = d\chi(Y) - b$ , d'où :

$$(1 - d)\chi(A^*) = -b$$

or le premier terme est positif ou nul alors que le second est strictement négatif, ce qui est une contradiction et prouve le théorème. La formule ci-dessus s'appelle la formule de Riemann-Hurwitz. ■

### Le cas quadratique

La famille quadratique occupe une place privilégiée dans le domaine des systèmes dynamiques holomorphes. Donnons ici un aperçu de ce domaine, ainsi que quelques illustrations graphiques.

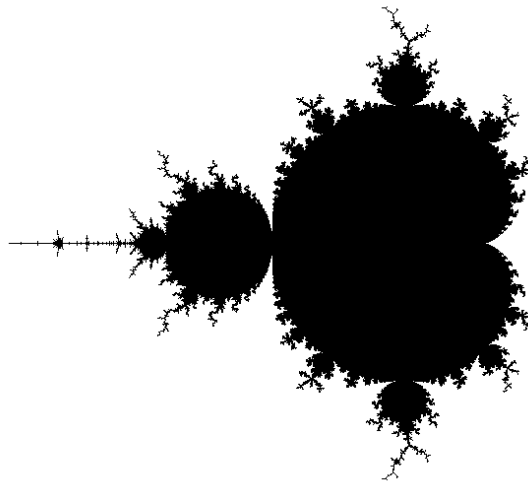


Figure 7 : L'ensemble de Mandelbrot

Tout d'abord, il est aisé de voir que tout polynôme quadratique est affinement conjugué à un polynôme de la forme  $P_c(z) = z^2 + c$ . L'espace des paramètres est donc ici  $\mathbf{C}$ . Notons  $J_c$  l'ensemble de Julia de  $P_c$  et  $K_c$  son ensemble de Julia rempli, i.e. l'ensemble des  $z \in \mathbf{C}$  tels que  $P_c^n(z)$  ne tende pas vers l'infini quand  $n$  tend vers l'infini. Alors  $K_c$  est un compact non-vide plein ( $\mathbf{C} - K_c$  est connexe), et  $\partial K_c = J_c$ . Le théorème 26 se renforce ici en :

**THÉORÈME 12.** *Si  $0 \in K_c$  alors  $K_c$  est connexe, sinon c'est un Cantor.*

La démonstration se fait comme celle du théorème 26, et ensuite avec la distance de Poincaré et le lemme de Schwarz on montre que le diamètre des composantes

connexes tend vers zéro, ce qui fait de  $K_c$  un Cantor quand  $0 \notin K_c$ . Le fait que  $K_c$  soit plein est une conséquence du principe du maximum (voir [9]).

Les figures 4, 5 et 6 illustrent différentes possibilités d'ensembles de Julia de polynômes quadratiques.

Introduisons maintenant l'ensemble de Mandelbrot (figure 7) ; c'est un sous-ensemble de l'espace des paramètres défini par :  $M = \{c \in \mathbf{C} | 0 \in K_c\} = \{c \in \mathbf{C} | K_c \text{ est connexe}\}$ . Pour  $c \notin M$ , la dynamique de  $P_c|_{J_c}$  est conjuguée à celle d'un décalage (shift) symbolique et on contrôle bien les paramètres dynamiques. L'ensemble de Mandelbrot est très compliqué. Voici quelques faits pour s'en convaincre :

- on peut prouver que pour certaines valeurs de  $c \in \partial M$ , un voisinage de  $c$  dans  $M$  contient une copie de l'ensemble de Julia correspondant  $J_c$  ;
- M. Shishikura a démontré que la dimension de Hausdorff de  $\partial M$  est égale à 2 ;
- on retrouve dans  $M$  des copies plus petites de lui-même (voir figure 8).

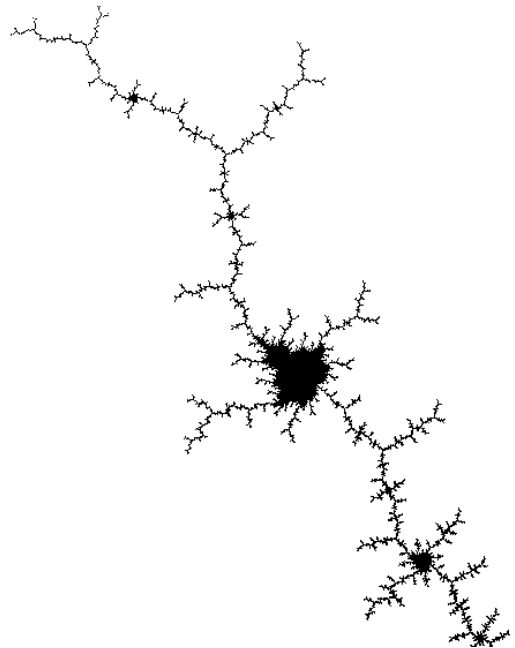


Figure 8 : Un agrandissement de  $M$

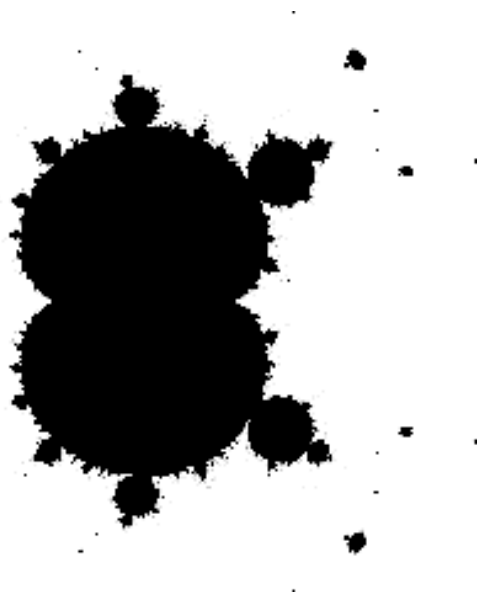
Concernant l'ensemble de Mandelbrot, la conjecture principale semble être celle concernant sa connexité locale :

**CONJECTURE (MLC).**  *$M$  est localement connexe.*

Si elle était vérifiée, l'on aurait d'une part une description de  $M$  en disque pincé grâce à la théorie de Carathéodory, mais surtout la densité des paramètres  $c \in M$  pour lesquels  $P_c$  est hyperbolique, ce qui est intéressant compte-tenu de la stabilité liée aux propriétés d'hyperbolicité. Pour souligner sa difficulté, on peut mettre en avant deux faits :

- il existe des ensembles de Julia  $J_c$  non localement connexes ;
- sur le plan de la mesure, et d'après un théorème de Jakobson, c'est la non-hyperbolicité qui l'emporte.

Notons enfin que l'étude de la famille quadratique n'est pas fortuite : les travaux de Douady et Hubbard sur les applications à allure polynômiales ont montré que sous des conditions très générales, des familles analytiques à un paramètre de fractions rationnelles faisaient apparaître dans leur plan de paramètres des copies de l'ensemble de Mandelbrot (voir la figure ci-dessous).



**Figure 9** : Plan des paramètres d'une famille de fractions rationnelles

### Dynamique des composantes du Fatou, théorèmes de Sullivan

L'ensemble de Fatou de  $f$  est celui où la dynamique est relativement sage. Ses composantes connexes sont

permutées entre-elles par  $f$  et il est intéressant de comprendre la dynamique symbolique ainsi créée. La première question que l'on peut se poser est de savoir si une composante de l'ensemble de Fatou peut *errer*, i.e. avoir une orbite infinie. La réponse est négative, d'après un théorème de Sullivan :

**THÉORÈME 13 (SULLIVAN 1985).** *Toute composante connexe de l'ensemble de Fatou est prépériodique.*

La démonstration s'appuie sur des outils géométriques et analytiques modernes avec comme élément central la théorie des applications quasi-conformes et le théorème d'Alfhors-Bers. Sullivan démontre par l'absurde que s'il existe un domaine errant, on peut construire des familles de fractions rationnelles de degré  $d$  fixé de dimensions arbitrairement grandes.

Pour compléter le tableau, un autre théorème de Sullivan classe les composantes connexes périodiques de l'ensemble de Fatou :

**THÉORÈME 14 (SULLIVAN).** *Soit  $U$  une composante connexe périodique de l'ensemble de Fatou. Alors il y a 4 cas possibles, et 4 seulement :*

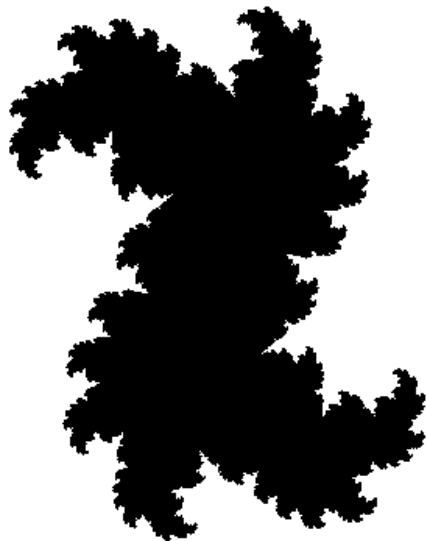
- $U$  contient un point périodique attractif ;
- $U$  est parabolique ;
- $U$  est un disque de Siegel ;
- $U$  est un anneau de Herman.

Donnons les définitions des termes utilisés.  $U$  est *parabolique* s'il y a sur sa frontière un point périodique indifférent rationnel  $\zeta$  dont la période divise celle de  $U$ , et tout point de  $U$  converge vers  $\zeta$  sous itération de  $f$ .  $U$  est un *disque de Siegel* si  $U$  est simplement connexe et  $f|_U$  est analytiquement conjuguée à une rotation. Enfin  $U$  est un *anneau de Herman* si  $U$  est conformétement équivalent à un anneau  $A = \{z | r_1 < |z| < r_2\}$  et  $f|_U$  est analytiquement conjuguée à une rotation.

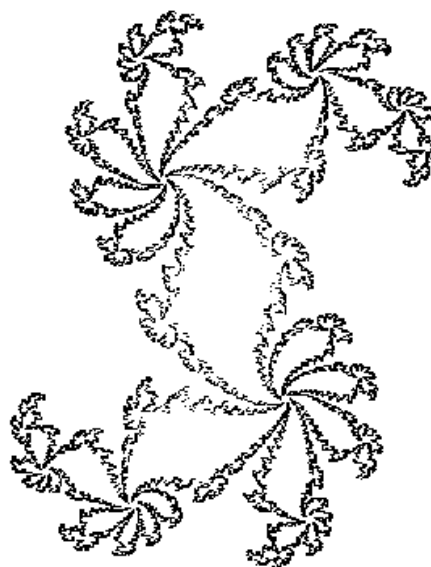
Les outils utilisés dans les preuves de ces théorèmes se sont avérés très fructueux dans l'étude des systèmes dynamiques holomorphes. Ces méthodes ont aussi permis d'appliquer les résultats holomorphes à d'autres types de systèmes dynamiques, notamment pour démontrer les conjectures de Feigenbaum sur la renormalisation des familles d'applications unimodales de l'intervalle (Sullivan 1993).

### Bibliographie

- [1] L.V. Ahlfors *Complex analysis*, McGraw-Hill 1953. Van-Nostrand 1966.



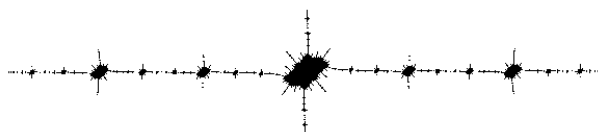
**Figure 1 :** Ensemble de Julia (rempli) d'un polynôme de degré 2



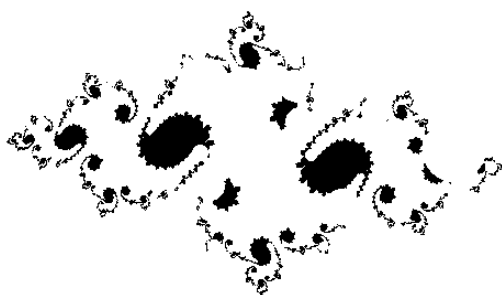
**Figure 2 :** Spiratisation dans un ensemble de Julia d'un polynôme de degré 2



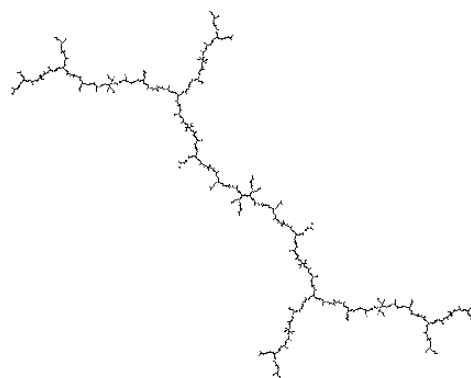
**Figure 3 :** Ensemble de Julia (rempli) quasi disque



**Figure 4 :** Ensemble de Julia d'un polynôme de degré 2



**Figure 5 :** Ensemble de Julia d'un polynôme de degré 2



**Figure 6 :** Ensemble de Julia d'un polynôme de degré 2

- [2] L.V. Ahlfors *Lectures on quasi-conformal mappings*,
- [3] A.F. Beardon *Iteration of rational functions*, Springer Verlag 1991.
- [4] P. Blanchard *Complex analytic dynamics on the Riemann sphere*, Bull. A.M.S. **11**, 1984 pp. 85-141.
- [5] L. Carleson et T.W. Gamelin *Complex dynamics*, Springer Verlag 1993.
- [6] R.L. Devaney et L. Keen (edit.) *Chaos and fractals : the mathematics behind the computer graphics*, Proc. Symp. Appl. Math. **39**, A.M.S. 1989.
- [7] A. Douady *Systèmes dynamiques holomorphes*, Sem. Bourbaki exp. 599, Astérisque **105-106**, 1983 pp. 39-63
- [8] A. Douady *Prolongement de mouvements holomorphes*, Sem. Bourbaki exp. 775, volume novembre 93 pp. 01-04
- [9] A. Douady et J.H. Hubbard *Itération des polynômes quadratiques complexes*, Vol. I et II, Publ. Math. d'Orsay **84-02 ; 85-02**, 1984-1985.
- [10] P. Fatou *Sur les solutions uniformes de certaines équations fonctionnelles*, C.R.A.S. Paris **143**, 1906 pp. 546-548.
- [11] P. Fatou *Sur les équations fonctionnelles*, Bull. Soc. Math. de France **47**, 1919 pp. 161-271 ; **48**, 1920 pp. 208-314.
- [12] G. Julia *Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles*, J. Math. Pures Appl. **4**, 1918 pp. 47-245.
- [13] G. Koenigs *Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **1**, 1884 pp. 3-41.
- [14] R. Mañé, P. Sad, D. Sullivan *On the dynamics of rational maps*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **16**, 1989 pp. 193-217.
- [15] J. Milnor *Dynamics in one complex variable : introductory lectures*, I.M.S. SUNY at Stony-Brook 1990.
- [16] H.O. Peitgen *The beauty of fractals*, Springer Verlag 1986.
- [17] D. Sullivan *Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I : solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains*, Ann. Math. **122**, 1985 pp. 401-418.

◇ Jean-Yves Briend  
 UMPA ENS-Lyon  
 46, allée d'Italie  
 69364 Lyon cedex 7  
 jybriend@ens-lyon.fr

◇ Pascale Roesch  
 UMPA ENS-Lyon  
 46, allée d'Italie  
 69364 Lyon cedex 7  
 proeschj@umpa.ens-lyon.fr