

UNE PROPRIÉTÉ DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE DES NŒUDS

J.-P. Otal

Introduction

On définit un *nœud* comme l'image du cercle S^1 par une application continue, injective $f : S^1 \rightarrow \mathbf{R}^3$; autrement dit, c'est une courbe sans point double tracée dans l'espace euclidien \mathbf{R}^3 . On dit qu'un nœud est *trivial* si l'application f qui le définit se prolonge en une application du disque $\mathbf{D}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$, continue et injective : un nœud trivial est donc un nœud qui borde un disque plongé de \mathbf{R}^3 . L'existence de nœuds non triviaux n'est pas évidente; l'outil le plus simple pour l'établir est le *groupe fondamental* du complémentaire du nœud. On peut montrer ainsi que le *nœud de trèfle* (Figure 1) n'est pas trivial (cf. [Rol], [Fox]).

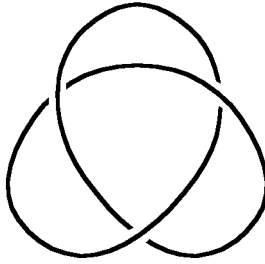


Figure 1 : Le nœud de trèfle

Dans ce petit article, nous allons étudier la position d'un nœud K par rapport aux droites de l'espace affine \mathbf{R}^3 .

Nous considérerons dans la suite des *nœuds polygonaux*, c'est-à-dire des nœuds qui sont la réunion d'un nombre fini de segments de droites.

Une *quadrisécante* (resp. *trisécante*) du nœud K est une droite qui intersecte K en 4 (resp. 3) points, qui ne sont pas tous contenus dans la même arête de K .

THÉORÈME 1. *Un nœud polygonal non trivial possède au moins une quadrisécante.*

Ce résultat a été obtenu par Erika Pannwitz [Pan] dans sa thèse (Berlin, 1933). C'est un cas particulier d'un de ses résultats principaux qui donne un mino- rant pour le nombre de quadrisécantes d'un nœud K en termes de son *nombre gordien*, i.e. le plus petit nombre de changements de croisements dans une

projection de K qui transforme K en le nœud trivial [BoW].

Nous allons présenter les étapes de la démonstration de ce théorème. Nous donnerons pour terminer une application à l'étude des surfaces algébriques réelles, découverte récemment par Greg Kuperberg [Kup].

1 Le lemme de Dehn

Nous aurons besoin d'un critère de trivialité pour un nœud de \mathbf{R}^3 . Un *disque de Dehn* pour un nœud K , est une application continue du disque $F : \mathbf{D}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ telle que :

1. $F(\partial\mathbf{D}^2) = K$ et $F^{-1}(K) = \partial\mathbf{D}^2$;
2. la restriction $F : \partial\mathbf{D}^2 \rightarrow K$ est homotope à un plongement.

La dernière propriété équivaut à dire que le degré de la restriction $F|_{\partial\mathbf{D}^2}$ est ± 1 . Un des principaux résultats de topologie de dimension 3 est le lemme suivant.

LEMME (DEHN). *Si un nœud K a un disque de Dehn, alors c'est un nœud trivial.*

Cet énoncé est dû à Max Dehn qui en avait donné une démonstration incomplète en 1910. Un « trou » a été découvert par Helmut Kneser en 1929.... Il a fallu attendre 1957 [Pap], pour en voir apparaître la première démonstration par Papakyriakopoulos (voir aussi [Hem] et [Jac]). Nous utiliserons ce résultat sans le démontrer; retenons-en que pour reconnaître qu'un nœud K est trivial, il suffit de voir qu'il borde un disque K qui ne recoupe pas K . C'est souvent bien plus facile à mettre en évidence qu'un disque *plongé* bordé par K .

La démonstration du théorème 1 procède par contradiction : l'absence de quadrisécantes pour un nœud nous permettra de construire un disque de Dehn.

Mais, pourquoi s'intéresser aux quadrisécantes? Evidemment un nœud (trivial ou pas) a beaucoup de bisécantes : par deux points du nœud, il passe une droite.

Par contre, un nœud contenu dans un plan de \mathbf{R}^3 , et qui borde un convexe, n'aura pas de trisécantes. Toutefois, on a :

PROPOSITION 1. *Soit K un nœud polygonal non trivial; alors K possède une trisécante.*

DÉMONSTRATION. Raisonnons par l'absurde et fixons un point $p \in K$ contenu dans une arête κ de

K . On remarque que si le nœud K n'a pas de triséchantes, deux segments pq, pq' , où q et q' sont des points distincts contenus dans l'adhérence de $K - \kappa$ s'intersectent uniquement au point p . Alors la réunion de ces segments est un disque plongé bordé par K : ceci signifie que le nœud K est trivial. ■

2 L'espace des triséchantes d'un nœud polygonal

Pour démontrer le théorème 1, nous commencerons par décrire l'espace des triséchantes du nœud K .

L'espace des droites orientées de \mathbf{R}^3 porte une topologie naturelle ; nous munirons l'espace des triséchantes de la topologie induite.

Hypothèse de position générale

Pour simplifier l'étude, nous supposons que K est un nœud polygonal en « position générale » : dans notre cas, ceci signifie qu'aucun quadruplet de sommets distincts de K n'est contenu dans un même plan de \mathbf{R}^3 .

Soit d une triséchante de K . L'hypothèse de position générale entraîne que deux de ces trois points d'intersection ne sont pas contenus dans une même arête. En effet, dans le cas contraire, le troisième est contenu dans une autre arête (par définition du mot « triséchante »), et celle-ci est forcément disjointe de la première ; ces deux sont alors coplanaires. Donc les trois points d'intersection p_1, p_2 et p_3 de d avec K sont contenus dans des arêtes distinctes κ_1, κ_2 et κ_3 . Pour étudier les triséchantes voisines de d , nous allons considérer deux cas selon les positions relatives des droites D_i qui contiennent les segments κ_i .

1er cas. Les droites D_1 et D_2 sont coplanaires

D'après l'hypothèse de position générale, on a alors : $D_1 \cap D_2 = \kappa_1 \cap \kappa_2 = p$. Les triséchantes qui rencontrent chaque segment κ_i sont donc les droites passant par le point d'intersection q de κ_3 avec le plan $\langle D_1, D_2 \rangle$ qui intersectent les deux segments κ_1, κ_2 . Notons $\Delta(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$ l'ensemble de ces droites ; on voit facilement que l'application $d \in \Delta(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) \rightarrow d \cap \kappa_i$ est un homéomorphisme sur un segment, fermé si le point $q \in \langle D_1, D_2 \rangle$ est « entre » les droites D_1 et D_2 , ouvert d'un côté sinon.

2ème cas. Deux quelconques des droites D_i ne sont pas coplanaires.

Pour étudier ce cas, le plus commode est d'utiliser la quadrique affine qui contient les droites D_i . En effet, il existe une forme quadratique affine sur \mathbf{R}^3 dont le lieu des zéros contient les trois droites D_i . Pour voir cela, on identifie l'espace affine \mathbf{R}^3 à l'hyperplan $\{t = 1\} \subset \mathbf{R}^4$ et on se donne 3 triplets de points sur chacune des droites D_i ; puisque l'espace des formes quadratiques est de dimension 10, il existe alors une forme quadratique non nulle Q sur \mathbf{R}^4 qui s'annule sur ces neuf points ; par restriction à l'hyperplan $\{t = 1\}$, Q définit une forme quadratique affine q sur \mathbf{R}^3 . Sur chaque droite D_i , cette forme q est identiquement nulle puisqu'elle s'annule en trois points ; pour la même raison, elle est identiquement nulle sur toute droite qui coupe chacune des D_i . Donc, toutes les droites qui intersectent chaque droite D_i sont contenues dans la quadrique $q^{-1}(0)$. Puisque deux quelconques des droites D_i ne sont pas coplanaires, dans l'espace vectoriel \mathbf{R}^4 , la forme Q est non dégénérée et sa signature est $(2, 2)$.

Pour une forme quadratique de ce type, l'ensemble des plans isotropes de \mathbf{R}^4 se décompose en deux familles naturelles disjointes [Ber], avec les propriétés suivantes :

1. chaque droite isotrope de \mathbf{R}^4 est contenue dans exactement un plan de chaque famille ;
2. deux plans contenus respectivement dans ces deux familles ont une intersection non triviale.

La trace d'un tel plan isotrope sur le sous-espace $\{t = 1\}$ est une droite affine contenue dans la quadrique $q^{-1}(0)$. La traduction des propriétés des deux familles de sous-espaces isotropes donne que chaque famille de droites fournit un « réglage » de $q^{-1}(0)$; l'un de ces réglages contient les droites D_i , l'autre, celui qui nous intéresse ici, contient les droites qui intersectent chacune des droites D_i . La propriété 2 ci-dessus signifie que par chaque point de l'une des droites D_i , il passe une droite coupant D_1, D_2 et D_3 ; celles de ces droites qui coupent les trois segments κ_i forment un intervalle, intersection de trois intervalles fermés.

Donc, dans ce cas aussi, l'ensemble $\Delta(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$ est homéomorphe à un intervalle fermé, éventuellement réduit à un point ; les extrémités de cet intervalle correspondent à des droites qui passent par l'une des extrémités d'un intervalle κ_i , et d'un seul, d'après l'hypothèse de position générale.

3 Démonstration du théorème 1

Par deux points distincts du nœud K , il passe une unique droite orientée de \mathbf{R}^3 . L'espace des couples de points distincts de K est un anneau ouvert, homéomorphe au complémentaire de la diagonale dans $K \times K$. On compactifiera cet anneau en un anneau fermé \mathcal{A} : le bord de \mathcal{A} est formé de deux copies K^+ et K^- de K , une suite (x_i, y_i) tend vers le point p^+ (resp. p^-) si x_i et y_i tendent vers p et si, pour i suffisamment grand, x_i est à droite (resp. à gauche) de y_i , une orientation de K étant fixée.

Notons maintenant $\mathcal{T} \subset \mathcal{A}$ l'ensemble des couples distincts (p, q) tels que le segment pq intersecte le nœud K dans son intérieur de sorte que la droite (pq) soit une trisécante de K . Par définition, \mathcal{T} est contenu dans l'intérieur de \mathcal{A} .

LEMME 1. *Supposons que le nœud K n'a pas de quadrisécante ; alors \mathcal{T} est une réunion disjointe de cercles plongés dans l'intérieur de \mathcal{A} .*

DÉMONSTRATION. Soit $(p_1, p_2) \in \mathcal{T}$. Il existe un point $p_3 \in K$ contenu dans l'intérieur du segment p_1p_2 . Notons κ_i l'arête de K qui contient le point p_i .

D'après la description des ensembles $\Delta(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$ faite dans le paragraphe 2, la droite p_1p_2 correspond à une droite dans l'intérieur de l'intervalle $\Delta(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$, à moins que l'un des points p_i soit un sommet du nœud K .

Supposons dans un premier temps qu'aucun des points p_i n'est un sommet de K . Alors les droites $p'p'' \in \Delta(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$ voisines de p_1p_2 intersectent K en trois points : deux de ces points sont proches du couple (p_1, p_2) et l'autre, proche du point p_3 , est dans l'intérieur du segment $(p'p'')$. Donc, le point (p_1, p_2) est dans l'intérieur d'un intervalle contenu dans \mathcal{T} .

Si le point p_1 , par exemple, est un sommet de K , la droite p_1p_2 correspond à une extrémité de $\Delta(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$, et le couple (p_1, p_2) est l'extrémité d'un intervalle contenu dans \mathcal{T} , par le même argument que précédemment. Soit κ'_1 l'arête de K , autre que κ_1 qui passe par p_1 ; alors, $\Delta(\kappa'_1, \kappa_2, \kappa_3)$ est un intervalle non dégénéré dont une extrémité correspond à la droite p_1p_2 . Comme ci-dessus, l'ordre est constant, de sorte que si $d' \in \Delta(\kappa'_1, \kappa_2, \kappa_3)$ le couple $(d' \cap \kappa'_1, d' \cap \kappa_2)$ appartient à \mathcal{T} . On voit facilement que l'application ainsi définie est injective, son image est un intervalle qui se recolle à l'intervalle précédent en un voisinage

de (p_1, p_2) homéomorphe à un intervalle. Donc, tout point de \mathcal{T} appartient à un intervalle contenu dans \mathcal{T} .

Puisque le nœud K n'a pas de quadrisécante, chaque couple $(p_1, p_2) \in \mathcal{T}$ définit de manière unique un point p_3 dans l'intérieur du segment p_1p_2 . Donc, chaque point de \mathcal{T} possède un voisinage homéomorphe à un intervalle : \mathcal{T} est une variété topologique de dimension 1.

Remarquons aussi que \mathcal{T} est fermé dans \mathcal{A} : chaque trisécante est contenue dans l'un des intervalles $\Delta(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$; ceux-ci sont en nombre fini et fermés dans notre cas. Donc \mathcal{T} est compact : \mathcal{T} est homéomorphe à une réunion finie de cercles disjoints plongés dans \mathcal{A} . Par définition, \mathcal{T} est contenu dans l'intérieur de \mathcal{A} . ■

Le théorème 1 découlera des deux lemmes suivants :

LEMME 2. *Soit $C \subset \mathbf{R}^n$ un compact ; alors il existe un point de C qui n'est pas contenu dans l'intérieur d'un segment dont les extrémités sont dans C .*

DÉMONSTRATION. Soit a et b deux points qui maximisent sur le compact $C \times C$ la fonction distance $d(.,.)$; alors chacun de ces points vérifie les conclusions du lemme ci-dessus. En effet dans le cas contraire, a par exemple serait « entre » deux points c et d de C ; mais alors, l'une des deux distances $d(c, b)$ ou $d(d, b)$ serait supérieure strictement à $d(a, b)$. ■

LEMME 3. *L'espace \mathcal{T} contient une composante connexe qui n'est pas homotope à 0 dans l'anneau \mathcal{A} .*

DÉMONSTRATION. Dire qu'une courbe fermée plongée γ dans \mathcal{A} n'est pas homotope à 0 revient à dire que les deux courbes de $\partial\mathcal{A}$ sont dans des composantes connexes différentes du complémentaire de γ . Pour montrer le lemme ci-dessus, il nous suffit donc de voir que les composantes de $\partial\mathcal{A}$ sont dans des composantes connexes distinctes de $\mathcal{A} - \mathcal{T}$; ceci équivaut à montrer que tout arc plongé dans \mathcal{A} qui joint les deux composantes du bord intersecte \mathcal{T} .

Nous allons raisonner par l'absurde en supposant l'existence d'un arc entre les deux composantes de \mathcal{A} qui soit disjoint de \mathcal{T} .

Tout d'abord, considérons les couples de points de K qui sont contenus dans une même arête de K . La frontière dans \mathcal{A} de ce fermé est formée des couples (p, q) tels que p ou q est un sommet de K ; topologiquement, c'est la réunion de deux courbes de Jordan disjointes (voir Figure 2) ; elles bordent un anneau \mathcal{A}

(sombre dans la figure) inclus dans \mathcal{A} qui contient \mathcal{T} dans son intérieur.

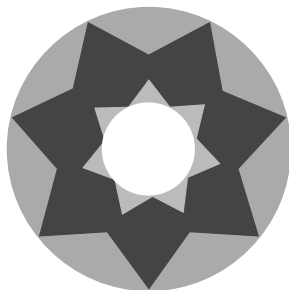


Figure 2

L'intersection de l'anneau A et du bord de \mathcal{A} est formée des points (p, p) , où p est un sommet de K .

Considérons maintenant un arc disjoint de \mathcal{T} qui joint les deux composantes de ∂A . L'intersection de cet arc avec l'anneau A contient un arc qui joint les deux composantes de ∂A . Choisissons un paramétrage $t \rightarrow c(t) = (p(t), q(t))$ de cet arc par l'intervalle $[0, 1]$. Quitte à modifier l'arc près de ∂A , on peut supposer que sa projection sur le premier facteur, c'est-à-dire la courbe $t \rightarrow p(t)$ vérifie :

1. $c(0) = (p, q)$ et $c(1) = (q, p)$ où p et q sont les sommets d'une arête de K ;
2. la courbe $t \rightarrow p(t)$ est homotope à 0.

Pour obtenir 1, on ajuste convenablement les extrémités de l'arc c . Pour obtenir 2, on modifie l'arc c près de l'une de ses extrémités en le faisant « spiraler » le nombre de fois adéquat autour de la composante de ∂A correspondante.

Alors, la réunion des segments $[p(t), q(t)]$ définit une application du carré $[0, 1] \times [0, 1]$ dans \mathbf{R}^3 . L'image de l'intérieur du carré est disjointe de K , puisque l'arc c évite \mathcal{T} . L'image du bord est le nœud K , paramétré ± 1 fois ; d'après le lemme de Dehn, le nœud K est alors trivial.

Cette contradiction termine la démonstration du lemme 3. ■

On déduit de ces deux lemmes le théorème 1 ; en effet, soit $t \rightarrow \gamma(t) = (p(t), q(t))$ une courbe non homotope à 0 dans \mathcal{A} contenue dans \mathcal{T} , paramétrée par le cercle ; cette courbe a la propriété qu'il existe un point $r(t)$ différent, pour tout t , de $p(t)$ et de $q(t)$. Ce point $r(t)$ varie continument avec t ; comme il est différent de $p(t)$, les applications $t \rightarrow p(t)$ et $t \rightarrow r(t)$ sont

homotopes et elles ont donc le même degré. Dire que la courbe γ n'est pas homotope à 0 dans \mathcal{A} revient à dire que sa projection $p(t)$, a un degré non nul ; il en est donc de même pour r . En particulier, r est surjective. Mais ceci signifie que tout point de K est toujours « entre » deux points de K , ce qui est impossible d'après le lemme 2. Cette contradiction entraîne que K possède au moins une quadrisécante, ce qui conclut la démonstration du théorème 1.

Dans l'article [Pan], on trouve un résultat plus précis, qui minore le nombre de quadrisécantes pour le nœud K en termes de son « nombre gordien », mais cette estimation ne semble pas s'adapter facilement aux nœuds qui ne sont plus polygonaux. Un argument de passage à la limite permet toutefois de montrer le résultat suivant :

THÉORÈME 2 (KUPERBERG). *Soit K un nœud différentiable non trivial ; alors il existe une droite D qui intersecte K en 4 points avec la propriété qu'aucun intervalle de $K - K \cap D$ n'est contenu dans K .*

Un nœud différentiable est l'image du cercle par une application différentiable injective. Un nœud différentiable se laisse bien approcher par des nœuds polygonaux K_i [Fox]. Ces nœuds K_i ont des quadrisécantes D_i d'après le théorème 1 ; quitte à en extraire une sous-suite, les droites D_i convergent vers une droite D . Il faut alors d'abord montrer que les points d'intersection $D_i \cap K_i$ ne vont pas s'écraser l'un sur l'autre pendant le passage à la limite ; cette étape n'est pas entièrement évidente [Kup].

4 Surfaces algébriques dans \mathbf{R}^3

Voyons maintenant une application de ce résultat « lisse », toujours due à Greg Kuperberg.

THÉORÈME 3. *Soit P un polynôme en trois variables, dont le lieu des zéros dans \mathbf{R}^3 contient une tore T , bord d'un tore solide noué. Alors le degré du polynôme P est au moins 8.*

DÉMONSTRATION. Soit \mathcal{P} le tore solide bordé par T dans \mathbf{R}^3 ; le groupe fondamental de \mathcal{P} est le groupe cyclique \mathbf{Z} . Considérons l'ensemble \mathcal{K}_n , formé des courbes fermées dans \mathcal{P} dont la classe d'homotopie est égale à n fois le générateur. Pour tout $n \neq 0$, on montre que \mathcal{K}_n contient une courbe fermée qui a la plus petite longueur parmi toutes les courbes de \mathcal{K}_n . Cette courbe est une géodésique de \mathcal{P} pour la

métrique induite de \mathbf{R}^3 ; elle est donc différentiable, mais à priori, elle n'a pas de raisons d'être plongée.

Considérons maintenant $t \rightarrow c(t)$, la plus courte de ces géodésiques lorsque n varie ; alors l'application c est injective. En effet, si pour deux points différents a, b du cercle, on avait $c(a) = c(b)$, alors l'image de chaque intervalle du cercle, découpé par (a, b) serait une courbe fermée de longueur strictement plus petite que c ; comme la classe d'homotopie de l'une au moins de ces deux courbes n'est pas nulle, ceci contredirait la propriété de minimalité vérifiée par c .

Notons K l'image de c : c'est un nœud différentiable. Puisque le tore \mathcal{P} est « noué », K n'est pas trivial (K est au moins autant noué que \mathcal{P} , par un résultat de théorie des nœuds). Le théorème 2 s'applique à K et fournit une droite D qui coupe K en 4 points.

L'argument que nous allons donner maintenant s'adapte si le tore \mathcal{P} contient dans son intérieur d'autres composantes de $P^{-1}(0)$, mais nous supposons pour simplifier que le polynôme P y garde un signe constant, par exemple négatif. Alors, sur les 4 points de $D \cap K$ au moins le polynôme P restreint à D prend des valeurs négatives ou nulles. Evidemment P ne peut garder un signe négatif dans les deux intervalles non bornés de $D - K$ (chacun de ces intervalles ne peut rester de signe constant, sinon la droite resterait contenue dans le tore \mathcal{P}) ; d'où un zéro au moins dans ces deux intervalles, pour la restriction $P|_D$.

Le lemme suivant va nous permettre de mettre en évidence 8 zéros pour P .

LEMME 4. *Aucun intervalle borné de $D - K$ ne peut être entièrement contenu dans \mathcal{P} .*

DÉMONSTRATION. Raisonnons par l'absurde et notons q un intervalle de D , contenu dans \mathcal{P} dont les extrémités sont des points de K . Ces extrémités découpent K en deux arcs k_1, k_2 . Chacune des réunions $k_i \cup q$ est une courbe fermée contenue dans \mathcal{P} , distincte de K , et dont la longueur est strictement inférieure à celle de K . Comme la classe d'homotopie dans le tore \mathcal{P} de l'une au moins de ces deux courbes n'est pas nulle, ceci contredit la propriété de K . ■

Regroupons maintenant les informations obtenues ; la restriction $P|_D$ prend des valeurs négatives (ou nulles) sur 4 points dans $K \cap D$; dans chaque intervalle du complémentaire de ces quatre points, elle prend au moins une valeur strictement positive. On en déduit qu'elle a au moins 8 zéros, ceux-ci étant comptés avec

multiplicité. Donc, le degré du polynôme $P|_D$ est au moins 8. ■

On peut se demander si l'estimation ci-dessus est la meilleure possible. Greg Kuperberg pose dans son article la question du degré minimal d'un polynôme sur \mathbf{R}^3 dont le lieu des zéros est le bord d'un voisinage régulier du nœud de trèfle. Nous allons pour conclure décrire une construction due à Slava Kharlamov d'un polynôme de degré 8 qui répond à cette question. On commence par trouver un polynôme de degré 4 dans le plan des (x, y) dont le lieu des zéros est la projection du nœud de trèfle. Pour cela considérons le cercle unité C dans le plan et son équation : $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Soient P_1, P_2 et P_3 les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans C , l_i l'équation de la droite passant par les sommets P_k, P_l mais pas par le sommet P_i . Alors, pour ϵ suffisamment petit et du signe convenable, le lieu des zéros dans le plan du polynôme $P = (x^2 + y^2 - 1)^2 + \epsilon l_1 l_2 l_3$ est une courbe immergée avec les sommets P_i comme points doubles et qui est formée de 3 fois 2 arcs qui joignent P_i à P_{i+1} en restant proches de l'arc de cercle entre ces deux points ; ce lieu des zéros est donc équivalent à la projection du nœud de trèfle (voir Figure 1). Le lieu des zéros du polynôme P considéré comme polynôme dans \mathbf{R}^3 est le cylindre sur cette projection ; en particulier, ce lieu des zéros contient le nœud de trèfle.

Nous allons maintenant trouver un polynôme de degré 4 tel que les zéros communs de P et Q soient le nœud de trèfle. Pour cela, soit a_i (resp. b_i) l'équation dans le plan (x, y) de la bissectrice intérieure (resp. extérieure) du triangle $P_1 P_2 P_3$ en P_i . Posons $a = a_1 a_2 a_3$ et $b = b_1 b_2 b_3$. Le lieu des zéros du polynôme $Q = za + b$ contient d'une part le graphe de la fraction rationnelle $-b/a$, d'autre part des droites verticales passant par les zéros communs de a et b (donc les trois droites verticales passant par les points doubles P_i). Etudions l'intersection du graphe de la fraction rationnelle $-b/a$ avec le cylindre sur la projection du nœud de trèfle. Grâce au choix de a_i, b_i , lorsque $p \in P^{-1}(0)$ tend vers l'un des points P_i en restant sur une même branche, la limite de la fonction $-b/a$ existe et les valeurs limites sur les deux branches sont différentes ; donc le graphe de la fraction $-b/a$ intersecte le cylindre $P^{-1}(0)$ près de P_i en deux arcs, l'un étant au-dessus de l'autre. Pour des raisons de symétrie, cette intersection est donc le nœud de trèfle ou son symétrique par rapport au plan des (x, y) (mais

dans ce cas, il suffira d'échanger a et b). On voit alors que l'ensemble des zéros communs de P et de Q est formé des trois droites verticales passant par les points P_i et du nœud de trèfle K . On peut modifier le polynôme P , en lui rajoutant un terme quadratique de façon à éliminer ces 3 droites verticales. Alors le nœud de trèfle apparaît comme lieu des zéros communs de deux polynômes de degré 4 ; pour $\epsilon > 0$ assez petit le lieu des zéros de $P^2 + Q^2 - \epsilon$ est alors le bord d'un voisinage régulier du nœud de trèfle.

L'énoncé du théorème 3 est donc optimal.

Bibliographie

- [Ber] M. Berger, Géométrie, Fernand Nathan, vol. 4, 1978.
- [BoW] M. Boileau et C. Weber, Le problème de J. Milnor sur le nombre gordien des nœuds algébriques, L'enseignement mathématique, vol. 31, pp. 49–98, 1983.
- [Fox] R. H. Crowell et R. H. Fox, Introduction to knot theory, Springer Verlag, 1963.
- [Hem] J. Hempel 3-manifolds, Princeton University Press, vol. 86.
- [Jac] W. Jaco, Lectures on three-manifolds topology, CBMS vol. 43.
- [Kup] G. Kuperberg, Quadrisecants of knots and links, Journal of Knot theory and its ramifications, vol. 3, pp. 40–50, 1994.
- [Pan] E. Pannwitz, Eine elementargeometrisch Eigenschaft von Verschlingungen und Knoten, Math. Ann., vol. 108, pp. 629–672, 1933.
- [Pap] C. D. Papakyriakopoulos, On Dehn's lemma and the asphericity of knots, Ann. of Math., vol. 66, pp. 1–26, 1957.
- [Rol] D. Rolfsen, Knots and Links, Publish or Perish, 1976.

◇ J.-P. Otal
UMPA ENS-Lyon
46, allée d'Italie
69364 Lyon cedex 7
jpotal@umpa.ens-lyon.fr