

COMPOSITION DES FONCTIONS ENTIÈRES

Laurent Bonavero

Introduction

Le but de ce petit article est de mettre en évidence quelques questions et réponses liées à l'étude des fonctions entières et à leur dynamique. Nous étudierons plus particulièrement l'équation $g = f \circ f$ ainsi que les fonctions entières commutant avec la fonction exponentielle.

Ce travail voit en partie son origine dans un exposé d'Etienne Ghys sur la dynamique de la fonction exponentielle dans le plan complexe, exposé donné à l'ENS Lyon en Septembre 88 pour accueillir la nouvelle promotion d'élèves.

J'ai le plaisir de remercier ici Etienne pour la clarté de cet exposé et de tous ceux qui ont suivi depuis, ainsi qu'Alexis Marin pour de précieux commentaires.

1 Racine carrée de fonctions entières

Dans tout ce travail, nous n'étudierons que des fonctions entières d'une variable complexe. Rappelons que ce sont les fonctions holomorphes sur \mathbf{C} tout entier, ou de façon équivalente les fonctions f analytiques dont le développement de Taylor à l'origine est de rayon de convergence infini.

La question qui nous intéresse dans cette partie est la suivante : quelles sont les fonctions entières g qui possèdent une racine carrée entière, i.e. quelles sont les fonctions entières g telles que l'équation $g = f \circ f$ a une solution f entière ?

1.1 Un théorème de Fatou

Nous commençons par démontrer un théorème dû à Fatou [Fat26] qui implique que les fonctions entières de la forme $\exp(g(z)) + z$ n'ont pas de racine carrée.

THÉORÈME (FATOU, 1926). *Soit f une fonction entière qui n'est pas une translation. Alors la fonction $f \circ f$ a un point fixe dans \mathbf{C} .*

En d'autres termes, si une fonction g a une racine carrée, elle doit avoir au moins un point fixe.

DÉMONSTRATION. Raisonnons par l'absurde en supposant que f et $f \circ f$ n'ont pas de points fixes. Alors,

la fonction

$$h(z) = \frac{f(f(z)) - z}{f(z) - z}$$

est entière et ne prend pas les valeurs 0 et 1. Elle est donc constante par le petit théorème de Picard (ce dernier affirme en effet qu'une fonction entière non constante « rate » au plus une valeur). La fonction f vérifie donc une équation fonctionnelle du type $f(f(z)) - \lambda f(z) = (1 - \lambda)z$ où λ est un nombre complexe différent de 0 et 1.

En dérivant cette équation, on en déduit que $f' \circ f$ ne prend pas les valeurs 0 et λ . C'est donc que $f' \circ f$, donc f' , est constante, ce qui est exclu par l'hypothèse. ■

Remarquons que ce résultat ne permet pas de conclure quant à l'existence de racine carrée de l'exponentielle, cette dernière admettant de nombreux points fixes et plus généralement de nombreux points périodiques comme nous le verrons plus loin.

1.2 Racine carrée de l'exponentielle

Avant d'énoncer le résultat principal de ce paragraphe, rappelons que l'importance de la fonction exponentielle repose en particulier sur la proposition bien connue suivante :

LEMME (DE RELÈVEMENT). *Soit f une fonction entière qui ne s'annule pas. Alors il existe une fonction g entière telle que $f = \exp \circ g$. On dit que la fonction f se relève par l'exponentielle.*

En Septembre 88, Alexis Marin, alors professeur à l'École, donnait une démonstration élémentaire du résultat suivant :

THÉORÈME (THRON, 1956). *Il n'existe pas de fonction entière f vérifiant $\exp = f \circ f$.*

DÉMONSTRATION. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une telle f .

(i) Montrons que l'image de f est exactement \mathbf{C}^* . Soit y non nul fixé : alors $y = \exp x$ et $y = f(f(x)) \in f(\mathbf{C})$. Mais 0 ne peut pas être atteint par f : si $f(x) = 0$, x n'est pas nul, donc s'écrit $x = f(y)$ et $0 = \exp y$, ce qui est absurde.

(ii) Ainsi f ne s'annule pas, donc se relève par l'exponentielle : $f = \exp \circ g$. Mais alors $\exp(g \circ f) = f \circ f = \exp$. Donc il existe une constante C telle que $g \circ f(z) = z + C$ pour tout nombre complexe z . On en déduit que f est injective, donc que la fonction exponentielle est injective, ce qui est absurde. ■

Cette preuve, bien que propre à la fonction exponentielle, peut se généraliser pour montrer que les fonctions de la forme $P(z)\exp(Q(z))$ où P et Q sont des polynômes n'ont pas de racine carrée. Nous laissons cet exercice au lecteur.

Le but du dernier paragraphe de cette partie est de donner un critère plus général dû à Thron pour qu'une fonction entière n'ait pas de racine carrée.

1.3 L'équation $g = f \circ f$ d'après Pólya et Thron

L'étude de l'existence des solutions de cette équation se trouve considérablement simplifiée si l'on se borne à des fonctions g n'ayant pas une croissance trop forte à l'infini.

Avant d'aller plus loin, nous avons besoin de la notation suivante :

NOTATION. Si f est une fonction entière, on note pour tout réel r strictement positif :

$$M_f(r) = \sup_{|z| \leq r} |f(z)|.$$

La fonction M_f est évidemment croissante et les inégalités de Cauchy impliquent que si M_f croît moins vite qu'un polynôme, c'est que f est elle-même un polynôme. Il est donc intéressant de comparer M_f à une fonction qui croît plus vite que tout polynôme : la fonction exponentielle !

DÉFINITION. Soit f une fonction entière.

(i) On dira que f est d'ordre fini s'il existe des constantes A , B et ρ strictement positives telles que pour tout $r > 0$:

$$M_f(r) \leq A \exp(Br^\rho).$$

(ii) On dira que f est à croissance sous-exponentielle si pour tout ε strictement positif, il existe des constantes A_ε et B_ε telles que pour tout $r > 0$:

$$M_f(r) \leq A_\varepsilon \exp(B_\varepsilon r^\varepsilon).$$

La remarque suivante nous sera bien utile :

REMARQUE. Soit f une fonction entière non polynomiale à croissance sous-exponentielle. Alors f doit prendre toutes les valeurs une infinité de fois. Autrement dit, pour tout nombre complexe a , l'équation $f(z) = a$ a une infinité de solutions.

DÉMONSTRATION. Supposons $a = 0$ et raisonnons par l'absurde. Si f n'a qu'un nombre fini de zéros, que

l'on note $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$, alors $f(z) = (\prod_{i=1}^n (z - a_i))g(z)$ où la fonction g ne s'annule pas. Relevons g par l'exponentielle : $g = \exp \circ h$. Comme f est à croissance sous-exponentielle, il s'ensuit assez facilement que h est constante (sa partie réelle croît moins vite que tout polynôme) et donc f est un polynôme, ce qui est exclu. ■

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème suivant dû à Pólya [Pól26] :

THÉORÈME (PÓLYA, 1926). Soient f et h deux fonctions entières et $g = f \circ h$. Supposons que g est d'ordre fini, alors :

- (i) soit h est un polynôme, et f est d'ordre fini,
- (ii) soit h n'est pas un polynôme, f est à croissance sous-exponentielle et h est d'ordre fini.

Comme corollaire de ce résultat, Thron [Thr56] démontre l'énoncé suivant :

COROLLAIRE (THON, 1956). Soit g une fonction entière non polynomiale et d'ordre fini. Si g s'écrit $g = f \circ f$, alors g prend toutes les valeurs une infinité de fois.

DÉMONSTRATION (DU COROLLAIRE). Appliquons le théorème de Pólya à $g = f \circ f$. Comme g n'est pas un polynôme, f est à croissance sous-exponentielle, et n'est pas un polynôme. On en déduit par la remarque qui précède que f , donc $f \circ f$, prend toutes les valeurs une infinité de fois. ■

Remarquons que l'hypothèse d'ordre fini faite sur g est essentielle : la fonction $\exp \circ \exp$ a une racine carrée et ne prend pas la valeur 0.

DÉMONSTRATION (DU THÉORÈME). Elle repose sur le lemme suivant qui bien qu'assez intuitif n'est pas immédiat. Nous l'admettrons ici.

LEMME (PÓLYA). Soient f et h deux fonctions entières et $g = f \circ h$. Alors, il existe une constante α strictement positive telle que pour tout $r > 0$, on a :

$$M_g(r) \geq M_f(\alpha M_h(r/2)).$$

Autrement dit, on a une sorte de loi de composition pour les fonctions M_f .

Reprenons le fil de la démonstration et écrivons le développement en série entière de h : $h(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$. Les inégalités de Cauchy pour h s'écrivent : $|a_n|(r/2)^n \leq M_h(r/2)$.

Comme g est d'ordre fini, on a grâce au lemme :

$$\forall r > 0, M_f(\alpha|a_n|(r/2)^n) \leq A \exp(Br^\rho).$$

Quitte à changer r en $\alpha(r/2)^n$, il vient :

$$\forall r > 0, M_f(|a_n|r) \leq A' \exp(B'r^{\rho/n}).$$

De là, si h n'est pas un polynôme (ceci signifie qu'il existe des $|a_n|$ non nuls pour n aussi grand que l'on veut), on en déduit que f est à croissance sous-exponentielle, le reste du théorème est alors facile. ■

1.4 Conclusion

L'étude des fonctions entières d'ordre fini recèle beaucoup d'autres merveilles, on renvoie par exemple à l'excellent ouvrage [Seg81] pour plus d'informations. Terminons cependant par les remarques suivantes.

- (i) Les phénomènes observés diffèrent totalement du cas réel : il existe par exemple des fonctions analytiques réelles f vérifiant $\exp = f \circ f$ sur \mathbf{R} .
- (ii) L'étude des fonctions entières de plusieurs variables complexes est considérablement plus difficile et est encore en plein essor.
- (iii) De même, les questions que nous nous sommes posées ici se traitent par des techniques complètement différentes lorsqu'on les considère localement (i.e pour des germes d'applications holomorphes) et sont encore largement ouvertes.

2 Etude de l'équation $f \circ \exp = \exp \circ f$

Dans l'exposé d'Etienne Ghys précédemment cité, ce dernier demandait quelles étaient toutes les fonctions entières qui commutent avec l'exponentielle, et en particulier s'il y en avait d'autres que les « triviales » (i.e les itérées finies de l'exponentielle). Dans la dernière partie de cet article, qui constitue un travail en commun avec Frédéric Bosio, nous répondons complètement à cette question.

Nous allons prouver le résultat suivant :

THÉORÈME. *Soit f une fonction entière telle que*

$$f \circ \exp = \exp \circ f.$$

Alors, on a les trois seuls cas possibles suivants :

- (i) f est constante et sa valeur est un point fixe de \exp ,
- (ii) $f(z) = z$,
- (iii) il existe un entier $n \geq 1$ tel que $f = \exp_n$ où \exp_n désigne la n -ième itérée de l'exponentielle.

Ainsi, la situation est bien triste : il n'y a pas de fonctions entières qui commutent avec l'exponentielle autres que celles qui viennent de suite à l'esprit.

Remarquons par ailleurs que ce résultat implique le théorème de Thron car une racine carrée de l'exponentielle commute avec cette dernière !

La preuve de ce résultat occupera toute cette partie et se scinde en deux étapes : la première utilise les premières propriétés de l'exponentielle complexe (la $2i\pi$ -périodicité et le lemme de relèvement déjà cité), tandis que la deuxième utilise ses propriétés dynamiques.

2.1 Premières réductions

Dans la suite, nous supposons donc que f est une fonction entière commutant avec \exp .

Le lemme suivant est immédiat et essentiel :

LEMME. *La fonction f vérifie les deux assertions suivantes :*

- (i) *il existe un entier k tel que*

$$\forall z \in \mathbf{C} \quad f(z + 2i\pi) = f(z) + 2ik\pi,$$
- (ii) *si $f(z_0) = 0$, alors $z_0 = 0$.*

L'assertion (i) signifie une propriété de presque-périodicité pour f qui découle de la $2i\pi$ -périodicité de l'exponentielle, tandis que (ii) affirme que f ne peut s'annuler qu'en zéro.

Le but de la proposition suivante est de régler le cas où f s'annule effectivement en zéro.

PROPOSITION. *Soit f une fonction entière non constante qui commute avec l'exponentielle. Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

- a) *l'entier k du lemme précédent n'est pas nul,*
- b) *la fonction f s'annule,*
- c) *pour tout z , on a $f(z) = z$.*

DÉMONSTRATION. Nous démontrons chacun des points séparément.

b) implique a) : si $f(0) = 0$ et $k = 0$, alors $f(2i\pi) = 0$ par le (i) du lemme, ce qui est absurde.

a) implique b) : par l'absurde, supposons que f ne s'annule pas. Alors, f ne prend pas la valeur $-2ik\pi$, donc f est constante par le petit théorème de Picard.

c) implique a) est trivial.

a) implique c) : comme la valeur 0 n'est atteinte qu'un nombre fini de fois (égal à la multiplicité de f en 0),

on en déduit à nouveau par le (i) du lemme que la valeur $-2ik\pi$ n'est elle aussi atteinte qu'un nombre fini de fois. Par le grand théorème de Picard, il s'ensuit que f est un polynôme (ce dernier affirme en particulier qu'une fonction entière non polynômiale « rate » au plus une valeur, et que si c'est effectivement le cas, elle doit prendre toutes les autres une infinité de fois). Ainsi f est un polynôme n'ayant que 0 pour racine, donc $f(z) = Az^n$. Mais alors, l'équation $\exp(Az^n) = A \exp(nz)$ donne de suite $A = 1$ et $n = 1$. ■

Il reste donc à traiter le cas où la fonction f ne s'annule pas. Pour cela, donnons le résultat intermédiaire suivant :

PROPOSITION. *Soit f une fonction entière non constante qui commute avec l'exponentielle. Supposons que f ne s'annule pas. Alors, f vérifie l'une des assertions suivantes :*

- (i) *il existe un entier n positif tel que $f = \exp_n$,*
- (ii) *pour tout n , il existe une fonction entière g telle que*

$$f = \exp_n \circ g = g \circ \exp_n.$$

DÉMONSTRATION. Comme f ne s'annule pas, relevons la par l'exponentielle : $f = \exp \circ g_1$. Or f commute avec l'exponentielle donc il existe un entier k_1 tel que $g_1 \circ \exp = \exp \circ g_1 + 2ik_1\pi$. Posons alors $g = g_1 + 2ik_1\pi$.

On a alors, $f = \exp \circ g = g \circ \exp$ et deux cas se présentent : soit g s'annule en zéro et donc $g(z) = z$ d'après la proposition précédente, soit g ne s'annule pas et on recommence. ■

Pour achever la preuve du théorème, il suffit donc de montrer que le cas (ii) de la proposition ne peut pas se produire, sauf si la fonction f est constante.

2.2 Les points périodiques de l'exponentielle

2.2.1 Un théorème de Misiurewicz

Nous allons maintenant faire quelques rappels sur deux ensembles classiquement introduits dans l'étude de l'itération d'une fonction holomorphe (ou même plus généralement méromorphe) : l'ensemble de Julia et son complémentaire l'ensemble de Fatou.

Bien qu'historiquement ces ensembles furent introduits pour l'étude des fractions rationnelles, nous en donnons ici les définitions pour une fonction entière :

DÉFINITION. *Si $\widehat{\mathbf{C}}$ désigne la sphère de Riemann et si f est une fonction entière, notons $F(f)$ l'ensemble des points de $\widehat{\mathbf{C}}$ au voisinage desquels la famille $(f^{\circ n})_{n \geq 0}$ est une famille normale.*

Nous noterons aussi $J(f) = \widehat{\mathbf{C}} \setminus F(f)$.

Autrement dit, l'ensemble de Fatou $F(f)$ est l'ensemble des points au voisinage desquels la dynamique est « pauvre » : la suite des itérées n'a pas un comportement « chaotique ». Rappelons en effet qu'une famille de fonctions holomorphes (ou méromorphes) sur un ouvert U est dite normale si toute sous-suite possède une suite extraite convergeant uniformément sur les compacts de U .

Inversement, l'ensemble de Julia $J(f)$ est l'ensemble des points au voisinage desquels la dynamique est chaotique. On renvoie aux belles images informatiques (voir [Dev89] et les figures de l'article de Pascale Roesch et Jean-Yves Briand dans ce numéro) pour des exemples et on laisse le soin au lecteur de montrer par exemple que $J(f(z) = z^2) = \mathbf{S}^1$.

L'étude de l'ensemble de Julia est liée de près à celle des points périodiques. Remarquons que nous avons déjà vu qu'une fonction entière qui n'est pas une translation en possède toujours.

DÉFINITION. *Un point z périodique de période n (i.e. $f^{\circ n}(z) = z$ et n est le plus petit entier vérifiant cette relation) est dit répulsif si $|(f^{\circ n})'(z)| > 1$.*

On est en mesure d'énoncer l'important théorème suivant, essentiellement dû à Fatou [Fat20] :

THÉORÈME (FATOU, 1920). *Si f n'est pas un polynôme de degré inférieur ou égal à un, l'ensemble $J(f)$ est un ensemble non vide parfait (i.e. fermé et sans point isolé).*

De plus, $J(f)$ est égal à l'adhérence des points périodiques répulsifs (ce dernier point est dû à Baker pour les fonctions entières).

Mis à part l'étude topologique de l'ensemble $J(f)$, une question naturelle est de le déterminer pour des fonctions ou familles de fonctions explicites. Cette question est très difficile et de nombreux travaux lui sont encore consacrés : nous renvoyons au récent article de survol [Ber93] et à la bibliographie qu'il contient.

Il a fallu par exemple attendre 1981 pour que Misiurewicz, répondant à une conjecture de Fatou détermine celui de l'exponentielle [Mis81] :

THÉORÈME (MISIUREWICZ, 1981). *L'ensemble de Julia de la fonction exponentielle coïncide avec la sphère de Riemann : $J(\exp) = \widehat{\mathbb{C}}$.*

2.2.2 Fin de la preuve

Rappelons qu'il s'agit de montrer la proposition suivante :

PROPOSITION. *Soit f une fonction entière telle que pour tout n , il existe une fonction entière g vérifiant*

$$f = \exp_n \circ g = g \circ \exp_n.$$

Alors f est constante.

Raisonnons par l'absurde. Il existe donc un point z_0 et un voisinage U de z_0 sur lequel f est injective. Pour tout entier n , la fonction \exp_n est donc injective sur U . Nous allons montrer que ceci ne peut pas se produire.

En effet, d'après le théorème de Misiurewicz, il existe un point x dans U et un entier k non nul tel que $\exp_k(x) = x$ et $|(\exp_k)'(x)| > 1$. Au voisinage d'un tel point fixe, la fonction \exp_k a la dynamique d'une homothétie de rapport $(\exp_k)'(x)$ (plus précisément, la fonction \exp_k est conjuguée à sa dérivée au voisinage de x). On en déduit l'existence d'un voisinage V (isomorphe à un disque) de x dans U tel que $V \subset \exp_k(V)$.

Notons alors $V_n = \exp_{nk}(V)$. La suite V_n est une suite croissante d'ouverts simplement connexes (rappelons qu'un ouvert simplement connexe de $\widehat{\mathbb{C}}$ est caractérisé par le fait que son complémentaire dans $\widehat{\mathbb{C}}$ est un compact connexe). L'ouvert $\cup_{n \geq 0} V_n$ est donc un ouvert dont le complémentaire dans $\widehat{\mathbb{C}}$ est un compact connexe (car intersection décroissante de compacts connexes) qui contient 0 et l'infini : il contient donc un troisième point ! Par le théorème de Riemann, on en déduit que l'ouvert $\cup_{n \geq 0} V_n$ est analytiquement isomorphe au disque unité.

Autrement dit, la famille de fonctions $(\exp_{nk})_{n \geq 0}$ restreinte à V est une famille de fonctions à valeurs dans un disque. Cette famille de fonctions est donc uniformément bornée, donc normale d'après le théorème de Montel. En particulier, x est dans l'ensemble de Fatou de l'exponentielle. Or, par hypothèse, il est aussi dans l'ensemble de Julia de l'exponentielle. Contradiction et fin de la démonstration.

2.2.3 Commentaire

Après lui avoir transmis une première version de cet article, Walter Bergweiler m'a signalé que les fonctions entières commutant avec l'exponentielle ont déjà été déterminées par Baker en 1958 dans [Bak58]. Plus généralement, Baker considère le cas de la fonction $a \exp(bz) + c$ et montre qu'il n'y a pas de fonctions entières commutant avec cette dernière autres que les « triviales ». Evidemment, Baker ne s'appuie pas sur le théorème de Misiurewicz ; sa méthode est essentiellement analytique et repose sur le lemme de Pólya énoncé en 1.3.

Walter Bergweiler me signale aussi le problème ouvert suivant :

QUESTION. Deux fonctions entières non polynômiales qui commutent ont-elles le même ensemble de Julia ?

Je remercie vivement Walter Bergweiler pour ses remarques et pour la référence [Bak58].

Bibliographie

- [Bak58] I. N. Baker. Zusammensetzungen ganzer Funktionen. *Math. Zeitschr.* 69 (1958) 121-163.
- [Ber93] W. Bergweiler. Iteration of meromorphic functions. *Bull. Am. Math. Soc.* 29, 2 (1993) 151-188.
- [Dev89] R. L. Devaney. An introduction to chaotic dynamical systems. *second ed., Addison-Wesley, Redwood City, 1989.*
- [Fat20] P. Fatou. Sur les équations fonctionnelles. *Bull. Soc. Math. France* 47 (1919), 161-271 ; 48 (1920), 33-94, 208-314.
- [Fat26] P. Fatou. Sur l'itération des fonctions transcendentes entières. *Acta Math.* 47 (1926) 337-360.
- [Mis81] M. Misiurewicz. On iterates of e^z . *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 1 (1981) 103-106.
- [Pól26] G. Pólya. On an integral function of an integral function. *Journ. Lon. Math. Soc.* 1 (1926) 12-15.
- [Seg81] S. L. Segal. Nine introductions in complex analysis. *North-Holland mathematics studies* 53, (1981).

[Thr56] W. J. Thron. Entire solutions of the functional equation $f(f(z)) = g(z)$. *Can. Journ. Math.* 8, (1956) 47-48.

◇ Laurent Bonavero
UMPA ENS-Lyon
46, allée d'Italie
69364 Lyon cedex 7
`bonavero@umpa.ens-lyon.fr`