

LA PERCOLATION, UN MODÈLE DES PHÉNOMÈNES DE POROSITÉ

Nicolas Chabot

Introduction

En 1957, Broadbent et Hammersley s'attachent à un problème simple et concret: quelle est la probabilité pour que soit mouillé le centre d'une pierre poreuse immergée dans un fluide. Il reste cependant à trouver une modélisation convenable: c'est la naissance de la théorie de la percolation.

1 Présentation heuristique du modèle

On étudie la propagation du fluide dans un milieu formé de sites, ou atomes, de la pierre; certains sites sont reliés par des canaux, ou ponts, ouverts ou fermés (de manière aléatoire) suivant qu'il s'est formé ou non une cavité poreuse entre les deux sites extrémités. Cette propagation, contrairement à une diffusion, ne dépend pas du fluide mais du milieu. La distance entre deux sites est à l'image de la distance entre deux atomes: infiniment petite devant la dimension de la roche. Aussi, le fait que le liquide extérieur atteigne le coeur de la pierre sera symbolisé par l'existence d'un passage ouvert entre l'extérieur, l'infini, et « l'atome central ».

2 Un modèle élémentaire non trivial: \mathbf{Z}^d

Voici une représentation très élémentaire de notre problème, qui, pourtant, conserve de nombreux mystères (certains leur donneraient le nom barbare de « problèmes ouverts »).

Les atomes parcourent l'ensemble des points de \mathbf{R}^d à coordonnées entières noté:

$$\mathbf{Z}^d = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbf{R}^d \mid \forall 1 \leq i \leq d, x_i \in \mathbf{Z}\}$$

Les liaisons entre les sites sont les segments de longueur 1 entre ceux-ci, portés par les axes de coordonnées:

DÉFINITION 1. x et y de \mathbf{Z}^d sont adjacents si

$$\delta(x, y) = \sum_{i=1}^{i=d} |x_i - y_i| = 1,$$

une liaison e est, indépendamment des autres, ouverte (resp. fermée) avec une probabilité p (resp. $q = 1 - p$) où p est un paramètre réel fixé de $[0, 1]$.

On définit alors un espace probabilisé pour notre modèle comme suit: si \mathbf{E}^d est l'ensemble de toutes les liaisons sur \mathbf{Z}^d , on pose

$$\Omega = \prod_{e \in \mathbf{E}^d} \{0, 1\},$$

c'est à dire l'espace des états des arêtes du réseau (si ω est une *configuration*, c'est-à-dire un élément de Ω , la composante d'indice e , $\omega(e)$, vaut 0 si e est ouverte et 1 sinon). En accord avec la définition 1, la probabilité qui régit cette composante est:

$$\mu_e^p(\omega) = p\delta_{\{\omega(e)=0\}} + q\delta_{\{\omega(e)=1\}},$$

où δ est la masse de Dirac.

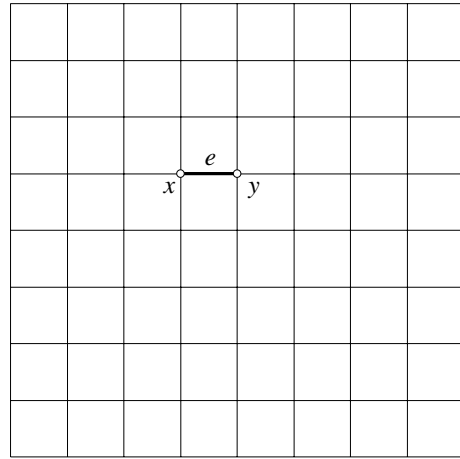


Figure 1. Exemple de \mathbf{Z}^2

On munit Ω de la tribu produit \mathbf{F} (la plus petite tribu qui rende mesurable l'évaluation de chacune des composantes) et de la probabilité produit \mathbf{P}_p des (μ_e^p) sur chacune des composantes e de \mathbf{E}^d .

DÉFINITION 2. Un chemin, ou passage, ouvert est une suite $(x_0, e_0, \dots, e_{n-1}, x_n)$ de sites et de liaisons ouvertes tel que, pour tout $0 \leq i \leq n-1$, e_i est l'arête entre x_i et x_{i+1} .

Pour une configuration ω fixée, on note $K(\omega)$ l'ensemble obtenu à partir de \mathbf{E}^d en retirant les liaisons fermées (mais pas leurs extrémités). Les composantes connexes de $K(\omega)$ sont appelées amas (ou amas ouvert).

Pour tout x de \mathbf{Z}^d , on appelle $C(x)$ l'amas de x , c'est à dire la composante connexe de $K(\omega)$ qui contient x . $C(x)$ est l'ensemble de tous les sites qui sont reliés à x par un canal ouvert.

REMARQUE 1. Du fait de l'invariance par translations entières, la distribution des $C(x)$ est indépendante du sommet x .

Le phénomène de percolation, c'est à dire la propagation du liquide depuis l'extérieur vers le centre, est donc ici équivalent à ce que l'amas de l'origine $(0, \dots, 0)$ est une composante connexe d'une infinité d'arêtes ouvertes. On étudiera donc la quantité $\Theta(p)$ définie comme la probabilité qu'il y ait effectivement percolation.

3 Etude du phénomène critique

La fonction Θ est une fonction non décroissante de p (le fait d'ouvrir plus facilement les liaisons augmente la probabilité d'avoir un amas à l'origine de taille infini) qui est nulle en 0 et vaut 1 en 1. Cependant, le problème de percolation prend tout son sens avec le résultat suivant:

THÉORÈME 1. Pour $d \geq 2$, il existe une valeur critique $p_c(d)$ de $]0, 1[$ tel que Θ est constamment nul avant $p_c(d)$ et est strictement positif après $p_c(d)$.

Le graphe conjecturé pour Θ est en fait donné par l'esquisse suivante:

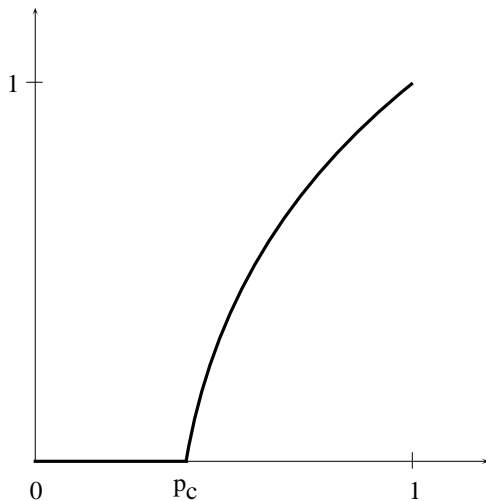


Figure 2. Graphe de Θ

C'est à dire qu'il existe deux phases tout à fait différentes:

1. pour $p < p_c$, il n'existe aucun amas infini, et donc la roche ne contient que des micro-cavités sans influence macroscopique.

2. pour $p > p_c$, il peut exister un amas infini en zéro, et par des arguments d'ergodicité [Burton-Keane], on peut même affirmer qu'il existe exactement un unique amas infini, et donc la pierre est dotée d'une cavité de dimension macroscopique: elle est creuse!

DÉMONSTRATION. Le cas $d = 1$ est sans intérêt car $\Theta(p) = 0$ pour tout $p < 1$. Comme $\mathbf{Z}^d \simeq \mathbf{Z}^d \times \{0\}$ est un sous-graphe de \mathbf{Z}^{d+1} , on a $p_c(d+1) \leq p_c(d)$. En effet, si la probabilité de percolation dans l'hyperplan $\mathbf{Z}^d \times \{0\}$ est non nulle, la probabilité de percolation dans \mathbf{Z}^{d+1} est non nulle.

Il suffit donc de montrer que $p_c(d) > 0$, pour tout $d \geq 2$, et que $p_c(2) < 1$. La preuve de ce dernier résultat nécessiterait des notions de dualité sur les graphes qui sortent quelque peu du cadre de cet article; cependant Harry Kesten montra en 1980 que $p_c(2) = 1/2$ (conclusion de 4 articles publiés sur une période de 21 ans). Pourtant, le principe en est très simple: s'il n'y a pas percolation, alors il y a suffisamment d'arêtes fermées pour qu'il y ait un amas d'arêtes fermées infini; il y a donc percolation pour le paramètre q correspondant à la probabilité pour une arête d'être fermée et donc $q_c(2) > 0$ comme nous allons le voir, ce qui s'écrit encore $1 - p_c(2) > 0$.

Pour le premier point, on envisage $\sigma(n)$ le nombre de chemins *auto-régulés* issus de l'origine et de longueur n , c'est à dire les chemins qui ne repassent pas par un de leurs sites (ce sont les chemins qui constituent un départ de voie vers l'infini, les boucles étant sans intérêt dans un telle voie). Soit $N(n)$ le nombre de ces chemins qui sont ouverts, ce qui a lieu avec une probabilité p^n indépendante du chemin auto-régulé de longueur n envisagé. Donc si on en fait la moyenne, on obtient:

$$\mathbf{E}_p(N(n)) = \mathbf{E}_p \left(\sum_{\Gamma} 1_{\{\Gamma \text{ est ouvert}\}} \right),$$

où Γ parcourt tous les chemins possibles, soit

$$\mathbf{E}_p(N(n)) = \sum_{\Gamma} \mathbf{P}_p(\Gamma \text{ est ouvert}) = p^n \times \sigma(n).$$

Ceci conduit à une majoration de $\Theta(p)$: la probabilité qu'il existe un chemin ouvert de l'origine à l'infini est plus petite que celle qu'il existe un chemin ouvert auto-régulé et de longueur n . Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\Theta(p) \leq \mathbf{P}_p(N(n) \geq 1) = \sum_{k \geq 1} \mathbf{P}_p(N(n) = k)$$

$$\Theta(p) \leq \sum_{k \geq 1} k \mathbf{P}_p(N(n) = k).$$

C'est à dire :

$$\Theta(p) \leq \mathbf{E}_p(N(n)) = p^n \times \sigma(n).$$

A présent, on sait que $\sigma(n) \leq 2d(2d - 1)^{n-1}$ (car on a $2d$ choix à partir de l'origine et à chaque nouveau pas, on a au plus $2d - 1$ choix, ne pouvant repartir par l'arête qui vient d'être empruntée). On a finalement

$$\Theta(p) \leq \frac{2d}{2d - 1} \times (p(2d - 1))^n$$

donc pour tout $p < 1/(2d - 1)$, $\Theta(p) = 0$ c'est à dire que $p_c(d) \geq 1/(2d - 1) > 0$. ■

4 Régularité de la fonction Θ

Comme le montre l'esquisse de l'allure attendue du graphe de cette fonction, on sait que Θ est une fonction croissante continue sur $[0, p_c[$ et $]p_c, 1]$, continue à droite en p_c et on espère que Θ est bien continue en p_c , c'est à dire que $\Theta(p_c) = 0$. L'affirmative a été démontrée pour $d = 2$ [Kes80] et $d \geq 209$ [HS88]. L'étude de la régularité de la fonction Θ est prétexte à présenter un théorème essentiel à l'étude de la percolation, la formule de Russo, qui justifie en particulier la croissance « apparente » de certains événements avec p :

DÉFINITION 3. Un événement A est dit croissant si $1_A(\omega) \leq 1_A(\omega')$ pour tout $\omega \leq \omega'$ où 1_A est l'indicatrice de l'événement A , c'est à dire que si ω' peut être obtenu à partir de ω en ouvrant des arêtes et que A a lieu pour ω , alors il a lieu pour ω' .

EXEMPLE 1. Soit A_n l'événement « il existe un passage ouvert entre le bord du d -cube $[-n, n]^d$ et l'origine ». Si un tel passage ouvert existe pour une configuration, il existera encore si l'on ouvre d'autres arêtes. A_n est donc un événement croissant.

DÉFINITION 4. Une arête e est une arête-pivot pour (A, ω) où A est un événement et ω une configuration si le fait de changer l'état de l'arête e et uniquement cette arête, dans la configuration ω , change le fait que A ait lieu.

EXEMPLE 2. Soit $A = A_3$, l'événement précédent et ω une configuration comme sur le graphe. Alors l'arête e garantit que A_3 a lieu si e est ouverte et n'a pas lieu si e est fermée.

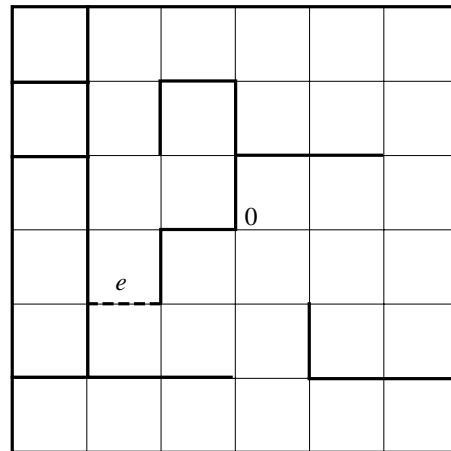


Fig. 3 Exemple d'arête-pivot

THÉORÈME 2 (FORMULE DE RUSSO). Soit A un événement croissant qui ne dépend que d'un nombre fini d'arêtes de \mathbf{Z}^d . Alors, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} \mathbf{P}_p(A) &= \mathbf{E}_p(N(A)) \\ &= \sum_{e \in \mathbf{E}^d} \mathbf{P}_p(e \text{ est une arête-pivot pour } A) \end{aligned}$$

où $N(A)$ est le nombre d'arêtes-pivots pour A .

REMARQUE 2. A ne dépend que d'un nombre fini d'arêtes donc $\mathbf{P}_p(A)$ est une fonction polynomiale en p et d'après la formule de Russo, $\mathbf{P}_p(A)$ est une fonction croissante de p .

DÉMONSTRATION. soit $\vec{p} = (p(e) : e \in \mathbf{E}^d)$ une collection de réels satisfaisant $0 \leq p(e) \leq 1$ pour tout e dans \mathbf{E}^d . Soit $(X(e) : e \in \mathbf{E}^d)$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. On définit la configuration $\nu_{\vec{p}}$ sur \mathbf{L}^d par $\nu_{\vec{p}}(e) = 1$ si $X(e) < p(e)$, 0 sinon, pour tout e de \mathbf{E}^d . $\mathbf{P}_{\vec{p}}$ est la mesure produit sur Ω telle que $\omega(e) = 1$ avec une probabilité $p(e)$ de telle manière que :

$$\mathbf{P}_{\vec{p}}(A) = \mathbf{P}(\nu_{\vec{p}} \in A)$$

On notera que $\mathbf{P}_p(A)$ est $\mathbf{P}_{\vec{p}}(A)$ pour un vecteur \vec{p} dont toutes les composantes sont égales à p . Cette approche permet de différencier l'utilité de chacune des arêtes pour A . Soit δ positif et $(f_i)_{i=1}^n$ les arêtes dont A dépend exclusivement ; $\mathbf{P}_{\vec{p}}(A)$ est donc une fonction polynomiale en les indéterminées $(p(f_i))_{i=1}^n$.

$$\mathbf{P}_{p+\delta}(A) - \mathbf{P}_p(A) = \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial \mathbf{P}_{\vec{p}}(A)}{\partial p(f_i)} \right|_{\vec{p}=(p)} \cdot \delta + o(\delta)$$

Il reste donc à évaluer chaque dérivée partielle: on prend $\vec{p} = (p)$ le vecteur dont toutes les composantes sont égales à p et \vec{p}' dont toutes les composantes sont égales à p sauf celle de f_i qui vaut $p + \delta$. Comme A est un événement croissant, on a:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\vec{p}'}(A) - \mathbf{P}_{\vec{p}}(A) &= \mathbf{P}(\nu_{\vec{p}'} \in A) - \mathbf{P}(\nu_{\vec{p}} \in A) \\ &= \mathbf{P}(\nu_{\vec{p}} \notin A, \nu_{\vec{p}'} \in A), \end{aligned}$$

puisque $\{\nu_{\vec{p}'} \in A\}$ contient $\{\nu_{\vec{p}} \in A\}$. Alors,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\vec{p}'}(A) - \mathbf{P}_{\vec{p}}(A) &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{j \neq i} (X(f_j))\right) \\ &\in \{f_i \text{ pivot pour } A\}, \\ &p \leq X(f_i) < p + \delta. \end{aligned}$$

Comme « f_i est une arête-pivot pour A » est indépendant de l'état de l'arête f_i :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\vec{p}'}(A) - \mathbf{P}_{\vec{p}}(A) &= \mathbf{P}(p \leq X(f_i) < p + \delta) \\ &\times \mathbf{P}_p(f_i \text{ pivot pour } A) \\ &= \delta \mathbf{P}_p(f_i \text{ pivot pour } A) \end{aligned}$$

On obtient donc le résultat suivant:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{P}_{\vec{p}}(A)}{\partial p(f_i)} \right|_{\vec{p}=(p)} = \mathbf{P}_p(f_i \text{ pivot pour } A),$$

ce qui achève la démonstration. ■

On peut alors montrer simplement que Θ est une fonction croissante, continue à droite (et donc continûment égale à zéro à gauche de p_c). En effet, si pour tout n de \mathbf{N}^* , A_n est l'événement « il existe un passage ouvert entre le bord de $[-n, n]^d$ et l'origine », alors A_n est un événement croissant, ne dépendant que de l'état des arêtes dans $[-n, n]^d$, on peut alors lui appliquer la formule de Russo:

$$\frac{d}{dp} \mathbf{P}_p(A_n) = \mathbf{E}_p(N(A_n)) \geq 0,$$

donc

$$\Theta(p) = \mathbf{P}_p(\bigcap_{n \geq 1} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_p(A_n)$$

car les A_n sont emboîtés. Ainsi Θ est limite décroissante de fonctions croissantes continues. La continuité à gauche sur $]p_c, 1]$ [BeKea84] est une conséquence de l'unicité de l'amas infini (il existe presque-sûrement une unique composante connexe infinie d'arêtes ouvertes) dont la démonstration de Keane et Burton offre une approche ergodique du système (avis aux inconditionnels) [BuKea89].

Conclusion

La percolation est le type même du problème très simple à poser... mais dont les résultats apparemment évidents se révèlent rapidement d'une difficulté non négligeable. De plus, le modèle simple de \mathbf{Z}^d offre déjà un exemple ardu de l'étude des phénomènes critiques.

Bibliographie

- [BuK89] R.M. Burton et M. Keane. Density and Uniqueness in Percolation. Comm. Math. Phys., 1989, vol. 121, p. 501-505
- [BeK84] Van den Berg et M. Keane. On the Continuity of Percolation Probability Function. Conference on Modern Analysis and Probability. R.Beals et al. 1984. Contemporary Mathematics 26. American Mathematical Society. Providence. Rhode Island. p. 61-65
- [Gri89] G.R. Grimmett. Percolation. North Holland, 1989.
- [Kes80] H. Kesten. The Critical Probability of Bond Percolation on the Square Lattice is 1/2. Comm. Math. Phys., 1980, vol. 74, p. 41-59
- [Kes82] H. Kesten. Percolation for mathematicians. Birkhäuser, 1982, Boston
- [Kes87] H. Kesten. Percolation Theory and First-Passage Percolation. Annals of Proba. 1987, vol 15, n° 4, p. 1231-1271
- [HS88] T. Hara et G. Slade. Mean-field Critical Phenomena for Percolation in High Dimensions, 1988, Preprint.

◇ Nicolas Chabot
8, rue J. Monod, 69007 Lyon
nchabot@ens-lyon.fr