Immeubles

Sylvain Barré

Introduction

Le cercle, la sphère S^2 sont faciles à concevoir car définis dans notre espace $\mathbf{R}^3$. Pour la sphère $S^3 = \{(x_1,...,x_4) \in \mathbf{R}^4, x_1^2+...+x_4^2 = 1\}$, une projection stéréographique nous ramène dans $\mathbf{R}^3 \cup \{\infty\}$. Certes, il faut ajouter un point à l'infini, mais on ne passe pas dans la quatrième dimension. Comment faire pour la sphère S^4 ? L'homéomorphisme que nous allons décrire fera correspondre aux points de S^4 des bandes $\mathbf{R}\times]-r,r[$ de $\mathbf{R}^3$. Nous allons partir d'une remarque qui nous amènera à la découverte de l'homéomorphisme en question entre S^4 et ces bandes de $\mathbf{R}^3$. Alors, il apparaîtra un certain graphe tracé sur cette sphère et ce sera l'occasion de découvrir la notion d'immeuble de Tits de dimension un. En poussant un peu plus loin l'étude de ces objets, on arrivera presque à une définition algébrique des immeubles.

Je tiens à remercier Patrick Iglésias pour ses suggestions dans la partie 4 et pour l'élaboration des figures.

1 Remarque

Pour sortir de $\mathbf{R}^3$ tout en y restant, regardons l'espace des matrices carrées $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. Neuf dimensions c'est trop ; c'est un espace à quatre dimensions que l'on veut voir. Regardons le sous-espace des matrices symétriques, lui est de dimension six seulement. C'est encore un peu trop, demandons que la trace soit nulle. Voilà un espace de dimension cinq dans lequel pourrait se plonger la sphère S^4 et qui ne nous éloigne pas trop de $\mathbf{R}^3$. On le notera $\mathcal{P}$ et on le munit de la norme euclidienne $N(A) = \sqrt{tr({}^tAA)}$. Puisque $\{A \in \mathcal{P}, N(A) = 1\}$ est homéomorphe à la sphère S^4, c'est désormais cet espace que nous noterons S^4.

2 La bijection

On a appris cela en CP, une matrice symétrique de trace nulle c'est une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$ (pour la norme euclidienne standard) et trois valeurs propres associées de somme nulle. Remarquons que notre norme est invariante sous l'action du groupe orthogonal : si $P \in \mathcal{O}(3)$ alors $N(PA\,{}^tP) = N(A)$. Donc la somme des carrés des valeurs propres vaut 1. Pensons donc un point de S^4 comme une base orthonormée $(x_\alpha, x_\beta, x_\gamma)$ et trois valeurs propres qu'on va ordonner comme cela $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ telles que $\alpha+\beta+\gamma = 0$ et $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1$. Le sens des vecteurs de cette base n'est pas bien déterminé. Paramétrons le petit arc de cercle $\{\alpha \geq \beta \geq \gamma, \alpha+\beta+\gamma = 0, \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1\}$ par le réel $r \in [0,+\infty]$, où $r = 0$ si $\beta = \gamma$ et $r = +\infty$ si $\alpha = \beta$. Remarquons que $\alpha > 0$ et $\gamma < 0$, en particulier, on n'a jamais $\alpha = \beta = \gamma$. On peut par exemple choisir $r = (\beta-\gamma)/(\alpha-\beta)$.

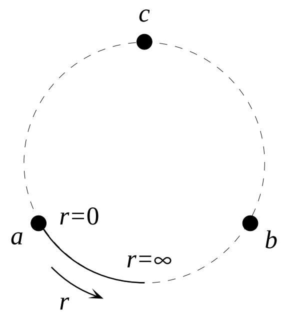

Figure 1 : Largeur de la bande

Définition 1. *Nous appellerons bande un ensemble* $\mathbf{R}X + [-r,r]Y = \{tX+sY, t \in \mathbf{R}, -r \leq s \leq r\}$ *pour tout* $0 \leq r \leq \infty$ *et tout couple* (X,Y) *de vecteurs orthogonaux de norme* 1. *Si* $r = 0$*, il s'agit d'une droite et si* $r = \infty$*, il s'agit d'un plan.*

Proposition 1. *L'application* Φ *qui à toute matrice de* S^4 *associe la bande* $\mathbf{R}x_\alpha + [-r,r]x_\beta$ *est bien définie et est une bijection sur l'ensemble de toutes les bandes de* $\mathbf{R}^3$*.*

Démonstration. Cette application est bien définie car si $\alpha = \beta$, la bande associée est le plan (x_α, x_β) donc il n'y a pas d'ambigüité dans le choix de x_α et x_β. De même, si $\beta = \gamma$, puisque $r = 0$, la droite $\mathbf{R}x_a$ associée est bien définie.

Voyons maintenant qu'il s'agit d'une correspondance biunivoque. Pour qu'une matrice s'envoie sur la droite $\mathbf{R}x$, il faut que ses deux petites valeurs propres soient égales ($\beta = \gamma$) et correspondent au sous-espace propre $x^\perp$. On tire alors des équations liant les valeurs propres, les égalités suivantes : $\alpha = 2/\sqrt{6}$ et $\beta = \gamma = -1/\sqrt{6}$. Ainsi une droite a un et un seul antécédant.

Pour qu'une matrice s'envoie sur le plan $\mathbf{R}x + \mathbf{R}y$, il faut que ses deux grandes valeurs propres soient égales et le sous-espace propre correspondant est alors précisément ce plan. Là encore, on trouve de suite que $\alpha = \beta = 1/\sqrt{6}$ et $\gamma = -2/\sqrt{6}$. Un plan a donc un et un seul antécédant.

Qu'en est-t-il pour une bande $\mathbf{R}x + [-r, r]y$ où $0 < r < \infty$? Dans ce cas, les trois directions propres sont bien déterminées et r fixe les trois valeurs propres assiciées. ∎

3 L'homéomorphisme

Quelle topologie mettre sur l'ensemble des bandes de $\mathbf{R}^3$? Nous allons donner une base d'ouverts $U_{\varepsilon,B}$ où B décrit toutes les bandes et $\varepsilon \to 0$. Les angles $\prec$ entre deux droites ou deux plans non orientés seront pris dans l'intervalle $[0, \pi/2]$.

Si B est une droite, on notera

$U_{\varepsilon,B} = \{\mathbf{R}x + [-r, r]y \mid 0 \leq r < \varepsilon$ et $\prec (\mathbf{R}x, B) \leq \varepsilon\}$

Si B est un plan, on notera

$U_{\varepsilon,B} = \{B' = \mathbf{R}x + [-r, r]y \mid r \geq 1/\varepsilon$ et $\prec (B, B') \leq \varepsilon\}$

Si B est une bande de largeur $r_0 \in [0, \infty]$, on notera

$U_{\varepsilon,B} = \{B' = \mathbf{R}x + [-r, r]y \mid 0 < r < \infty, \mid r - r_0 \mid \leq \varepsilon$ et $\prec (B, B') \leq \varepsilon\}$.

On a ainsi défini un espace topologique séparé.

Théorème 1. *L'application Φ est un homéomorphisme de S^4 sur l'espace des bandes de $\mathbf{R}^3$.*

Démonstration. Il suffit de voir que Φ est continue puisqu'elle est bijective et que la source est compacte. Pour cela, vérifions que $\Phi^{-1}(U_{\varepsilon,B})$ est un voisinage de $A = \Phi^{-1}(B)$.

Si B est une droite ($\alpha > \beta = \gamma$), il y a un voisinage de A formé de matrices qui ont la plus grande de leurs valeurs propres simple et proche de α, et deux autres proches de β. Ainsi, dans ce voisinage, la fonction r sera proche de 0. De plus, la droite propre associée à la valeur propre proche de α se rapproche de B (au sens de l'angle).

Si B est un plan ($\alpha = \beta > \gamma$), le raisonnement est le même en remplaçant la grande valeur propre par la petite.

Si B est une vraie bande ($\alpha > \beta > \gamma$), dans un voisinage de A, il n'y a que des matrices à valeurs propres simples respectivement proches de α, β ou γ. Les sous-espaces propres se rapprochent aussi de ceux de A (au sens de l'angle).

Ainsi Φ est continue et est donc un homéomorphisme. ∎

Désormais, S^4 désignera l'espace des bandes de $\mathbf{R}^3$.

4 La sphère S^4 recouverte par des drapeaux

Dessinons un graphe sur S^4. Les sommets sont de deux types : les droites et les plans. Il y a un arête entre une droite et un plan s'il la contient, celle-ci étant $\{\mathbf{R}x + [-r, r]y, r \in [0, \infty]\}$ qui relie $\mathbf{R}x$ à $\mathbf{R}x + \mathbf{R}y$. Le graphe ainsi défini est plongé dans la sphère S^4 et la recouvre totalement. Abstraitement, il s'agit du graphe des drapeaux de $\mathbf{R}^3$. Un drapeau étant la donnée d'une droite et d'un plan qui la contient. On peut construire de la même manière un graphe abstrait à partir de n'importe quel espace vectoriel de dimension trois. On le fera dans le paragraphe suivant.

Dans l'espace des bandes, on voit que l'ensemble des droites tout comme l'ensemble des plans est homéomorphe au plan projectif $P^2(\mathbf{R})$. [Il suffit de vérifier qu'on a mis la bonne topologie sur l'espace des bandes]. On peut donner un système d'équations algébriques pour ces deux plans projectifs vus dans la sphére S^4 cette fois-ci.

Proposition 2. *Si*

$$S^4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & x & y \\ x & b & z \\ y & z & c \end{pmatrix}, a + b + c = 0 \right. \\ \left. \text{et } a^2 + b^2 + c^2 + 2(x^2 + y^2 + z^2) = 1 \right\},$$

les deux sous-variétés algébriques définies par

$$\begin{vmatrix} a & x & y \\ x & b & z \\ y & z & c \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{3\sqrt{6}}$$

sont exactement nos deux plans projectifs, ensembles des sommets du graphe tracé sur S^4.

Remarque 1. A priori, on s'attend à obtenir une sous-variété de dimension 3 de S^4 puisqu'on n'a qu'une seule équation. Il n'en est rien et on essayera de comprendre pourquoi.

Démonstration. Il s'agit de traduire le fait qu'une matrice de trace nulle, de norme un, ait deux valeurs propres égales. On a déjà vu que ces valeurs propres sont déterminées et valent $(2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})$ pour les droites et $(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})$ pour les plans. En particulier, le déterminant de la matrice correspondant à un sommet du graphe est fixé et vaut $1/3\sqrt{6}$ pour une droite et $-1/3\sqrt{6}$ pour un plan.

Il ne reste donc plus qu'à voir la réciproque. Notons α, β, γ les valeurs propres d'une matrice symétrique de trace nulle, de norme un et de déterminant $\varepsilon/3\sqrt{6}$. Résolvons le système :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \alpha+\beta+\gamma & = & 0 \\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 & = & 1 \\ \alpha\beta\gamma & = & \varepsilon/3\sqrt{6} \end{array}\right.$$

L'identité suivante

$$\begin{aligned} \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha &= [(\alpha+\beta+\gamma)^2-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)]/2 \\ &= -1/2 \end{aligned}$$

nous permet de dire que α, β et γ sont les racines du polynôme

$$X^3-\frac{1}{2}X-\frac{\varepsilon}{3\sqrt{6}}=(X+\frac{\varepsilon}{\sqrt{6}})^2(X-\frac{2\varepsilon}{\sqrt{6}}).$$

Notre propostion est donc démontrée. ∎

Essayons d'éclairer un peu le mystère de la codimension deux donnée par une seule équation $\det = \pm 1/3\sqrt{6}$. Le calcul précédant nous montre que $\alpha\beta\gamma = \gamma(1/2-\gamma^2)$. Aussi, il est facile de voir que les valeurs propres α, β, γ varient de $-2/\sqrt{6}$ à $2/\sqrt{6}$ sur le cercle $\{\alpha+\beta+\gamma=0,\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1\}$. Ainsi, on trouve que le déterminant varie de $-1/3\sqrt{6}$ à $1/3\sqrt{6}$. De plus, exceptées pour ces deux valeurs extrêmes, il détermine trois valeurs propres deux à deux distinctes.

L'équation $\det A = d$ pour $-1/3\sqrt{6} < d < 1/3\sqrt{6}$ définit donc l'espace des bandes de S^4 d'une largeur donnée dans $]0, +\infty[$. Topologiquement, il s'agit d'un espace de dimension trois qu'on peut voir comme le quotient $SO(3)/H_0$ où $H_0 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ est le stabilisateur d'une bande.

Pour $\det A = \pm 1/3\sqrt{6}$, c'est de l'espace des droites (ou plans) qu'il s'agit. On perd donc une dimension pour obtenir un plan projectif.

5 Les drapeaux sont des chambres

Explicitons ce graphe des drapeaux abstrait pour l'espace k^3 où k désigne le corps fini à deux éléments. Il s'agit alors d'un graphe fini.

Nous allons parler en termes de géométrie projective ; l'espace en question est le plan projectif $P^2(k)$. Il contient exactement 7 points et par dualité 7 droites aussi [il y a autant de points dans $P^2(k)$ que de vecteurs non nuls dans k^3 puisqu'il n'y a qu'un scalaire non nul]. Sur une droite se trouvent exactement trois points et par dualité, un point appartient à exactement trois droites [un plan de k^3 contient trois vecteurs non nuls].

Ainsi ce graphe sera trivalent et aura 14 sommets. Pour le comprendre totalement, on remarquera que son groupe d'isomorphisme, i.e. le sous-groupe des permutations des sommets qui préserve le type et les relations d'incidence, est le groupe $PGL(3,k) = GL(3,k) = SL(3,k)$; ceci étant un résultat bien connu de géométrie projective. On remarque aussi que l'élément

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

permute cycliquement les 7 droites de k^3. Maintenant on peut dessiner ce graphe. Plaçons ces 7 droites (ou points dans le plan projectif) dans l'ordre cyclique défini par g sur un cercle et intercalons entre deux droites le plan (ou droite dans le plan projectif) qu'elles engendrent.

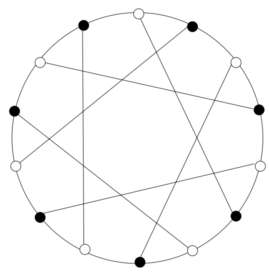

Figure 2 : Graphe des drapeaux de $P^2(k)$

Pour compléter ce graphe il suffit d'ajouter une arête et de saturer par rotation. On voit facilement que cette arête ne peut pas être un diamètre ni une petite corde (deux droites se couperaient en deux points), c'est donc une corde moyenne. Le résultat est dessiné sur la figure 2.

Il ne faut pas confondre ce dessin avec celui de la figure suivante qui représente la géométrie de ce même plan projectif.

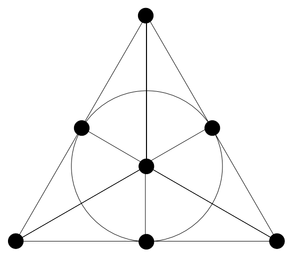

Figure 3 : Géométrie de $P^2(k)$.

Les 7 droites sont alors représentées par les trois côtés du triangle équilatéral, les trois hauteurs et le cercle inscrit. Les points étant les trois sommets, les trois pieds des hauteurs et le centre du cercle.

Considérons maintenant trois points du plan projectif non alignés, ils définissent un hexagone : deux points sont reliés par l'intermédiaire de la droite qu'ils définissent. On en dénombre ainsi 28 (le nombre d'ensembles à trois points, soit C_7^3 moins le nombre de droites soit 7). On pourra noter qu'il y en a de quatre sortes sur notre dessin : les demies-lunes, les cheminées, les chapeaux et les nœuds papillon. Elles sont toutes représentées figure 5.

Définition 2. *Ces hexagones seront appelés les appartements, les arêtes (i.e. les drapeaux) les chambres et les sommets les murs.*

Remarquons maintenant les deux propriétés suivantes :

Proposition 3. *Deux chambres sont toujours contenues dans un même appartement. Si deux appartements ont une chambre en commun, il y a un isomorphisme entre ces deux appartements qui fixe la partie commune.*

Démonstration. 1) Deux chambres, c'est deux droites (toujours sécantes) et un point sur chacune d'elles. Trois situations peuvent se produire. Dans ces trois cas, on peut former un vrai triangle en ajoutant un ou deux points (voir la figure 4).

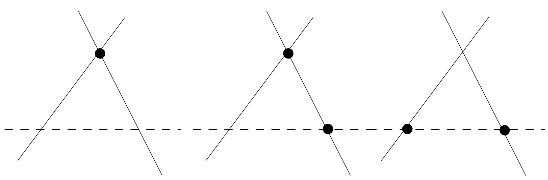

Figure 4 : Deux chambres sont dans un même appartement

2) Voyons pour commencer que l'intersection de deux appartements est connexe et vaut une, deux ou trois chambres. Notre graphe étant de valence trois, l'intersection de deux appartements est une réunion de chambres (pas de sommet isolé). Ensuite, il suffit de constater que deux droites se coupent en un et un seul point ce qui constitue un lien entre deux chambres disconnectées. Plus de trois chambres en commun imposeraient l'égalité des appartements. Maintenant, la seconde propriété est claire puisque tous les appartements sont des hexagones. Diverses intersections sont dessinées figure 5.

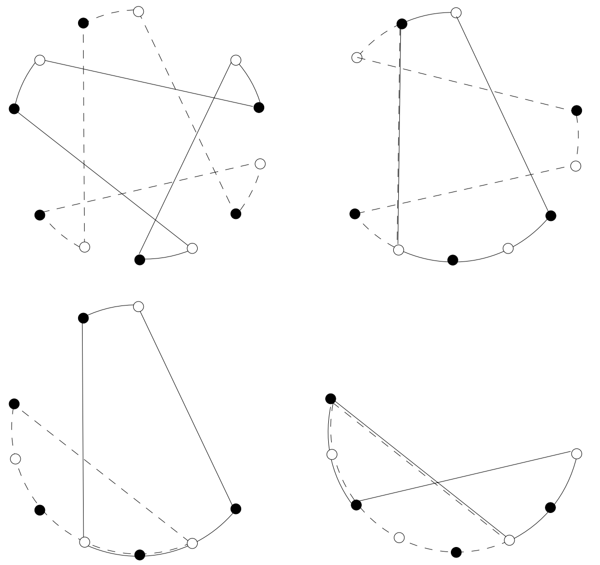

Figure 5 : Intersections d'appartements

La proposition est démontrée. ∎

Définition 3. *Un graphe est un immeuble s'il se compose d'appartements qui sont des $2m$-gones avec deux types de sommets qui s'alternent et s'il vérifie les deux propriétés mises en évidence plus haut.*

Remarque 2. On peut prendre $m = \infty$, auquel cas, un ∞-gone sera une droite. On vérifie très facilement qu'un arbre sans feuille (figure 6) est un immeuble (les appartements seront tous les ∞-gones).

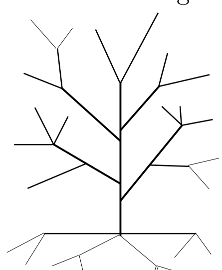

Figure 6 : Un immeuble

Le graphe des drapeaux d'un plan projectif sur un corps quelconque, est un immeuble (avec $m = 3$). La première propriété se démontre de la même manière que dans notre cas particulier ; pour la seconde, il suffit de remarquer que l'intersection de deux appartements est soit connexe soit égale à deux sommets opposés. Si l'intersection n'est pas connexe et contient un point, elle ne peut contenir en plus que la droite opposée.

6 Groupes associés aux immeubles

On a déjà parlé du groupe d'isomorphismes de l'immeuble tout entier noté G. Pour le graphe des drapeaux, $G = PSL(3,k)$. Introduisons maintenant d'autres groupes naturellement associés à un immeuble. Tout d'abord, le groupe d'isomorphisme d'un appartement. N'oublions pas qu'il s'agit d'isomorphismes de graphes étiquetés. S'il y a $2m$ chambres dans un appartement, ce groupe sera le groupe diédral D_{2m} ($m = \infty$ compris). On le note en général W et on l'appelle *groupe de Weyl*. Il est engendré par les deux symétries s et s' par rapport aux murs d'une même chambre.

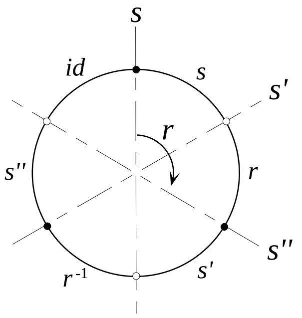

Figure 7 : Le groupe de Weyl

Dans l'exemple du graphe des drapeaux, W vaut D_6, c'est aussi le groupe des permutations sur trois lettres (voir figure 7).

Notons B_C (resp. N_Σ) le sous-groupe de G qui fixe une chambre C donnée (resp. un appartement Σ donné). Dans le cas du graphe des drapeaux, B est isomorphe au sous-groupe des matrices triangulaires supérieures (appelé *groupe de Borel*), tandis que N lui est isomorphe au sous-groupe des matrices qui ont un et un seul élément non nul sur chaque ligne et chaque colonne [il suffit de considérer les vecteurs de la base canonique pour le voir]. Dans le cas d'un arbre trivalent, B contient D_∞, mais aussi des éléments d'ordre 2 qui ne commutent pas à D_∞, d'autres qui commutent ; quant à N, il ne contient que des éléments d'ordre une puissance de 2.

Remarquons maintenant une propriété qu'on vérifie facilement dans le cas des immeubles de drapeaux et dans le cas des arbres homogènes.

PROPOSITION 4. *Le groupe G opère fortement transitivement sur son immeuble Δ.*

Cela signifie qu'étant données deux chambres C et C' et deux appartements Σ et Σ' qui les contiennent respectivement, il y a une transformation de G qui envoie Σ sur Σ' et C sur C'. On peut donner deux autres expressions de cette même propriété. Par exemple, on pourrait aussi dire que G opère transitivement sur les chambres et qu'un stabilisateur B_C opère transitivement sur les appartements qui contiennent C. Ou bien encore, que G opère transitivement sur les appartements et qu'un stabilisateur N_Σ opère transitivement sur les chambres de Σ. [Dans le cas des drapeaux ou des arbres homogènes, on vérifie facilement cette dernière forme.]

Pour toute la suite, on supposera cette propriété vérifiée et on pensera à nos exemples. On se fixe aussi une chambre C et un appartement Σ qui la contient et tel que $N = N_\Sigma$ opère transitivement sur les chambres de Σ. On a donc un morphisme surjectif $N \longrightarrow W$ de noyau $T = B \cap N$. Ceci parce qu'une transformation qui fixe un appartement globalement et l'une de ses chambres, les fixe en fait toutes. Dans le cas des drapeaux, T est le sous-groupe de G formé des matrices diagonales et on notera que son normalisateur dans G est exactement N. Dans la suite, on pensera $W = N/T$. Résumons tout cela par le diagramme :

$$\begin{tikzcd} & G & & \\ B \arrow[ur] & & N \arrow[ul] \arrow[r] & W \\ & T \arrow[ul] \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

7 La permutation de Jordan-Hölder

PROPOSITION 5. *Les sous-groupes B et N engendrent le groupe G.*

REMARQUE 3. Ainsi, la donnée de B et N fournit tous les autres groupes :

$$G =< B, N > \; ; \; T = B \cap N \; ; \; W = N/T.$$

DÉMONSTRATION. Pour lire ce qui suit, on pourra garder un œil sur la figure 8. Soit $g \in G$. Cet élément g envoie la chambre C sur la chambre C'. Soit alors un appartement Σ' qui contient C et C'. Il y a $b \in B$

qui fixe C et qui envoie Σ' sur Σ. Ainsi, le produit bg envoie C sur $C'' \in \Sigma$. Mais alors il y a aussi $w \in N$ (un représentant de $w \in W = N/T$) qui envoie C'' sur C. Donc wbg fixe la chambre C et est donc un élément $b' \in B$. En particulier B et N engendrent G, mais en fait, on a démontré plus : $G = BWB$. ∎

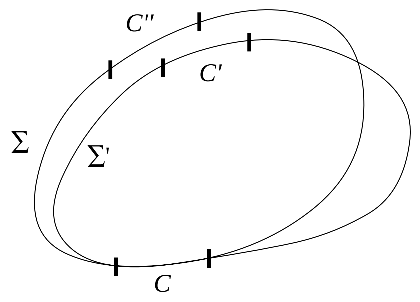

Figure 8 : B et N engendrent G

Et on peut dire encore mieux ; on obtient ce qu'on appelle *la décomposition de Bruhat de* G.

Proposition 6. *On a l'égalité suivante :*

$$G = \coprod_{w \in W} BwB.$$

Démonstration. Pour voir cela, on va construire une application $\Phi : G \longrightarrow W$ qui détermine l'élément $w \in W$ dans l'écriture $g = bwb'$.

Lemme 1. *L'élément w est entièrement déterminé par la chambre $g(C)$.*

Démonstration. On sait que w est entièrement défini par sa valeur sur C qui vaut précisément $b^{-1}g(C)$. Il s'agit donc de voir qu'un élément de B qui envoie $C' = g(C)$ dans Σ, le fait toujours sur la même chambre. Pour cela, on remarquera deux choses :

- C et C' sont dans un même appartement (disons Σ'),
- un appartement est envoyé sur un appartement par un élément de G (on se contentera de le vérifier sur nos exemples).

Si bien qu'un élément de B qui enverrait C' dans Σ, (disons sur C'') transformerait Σ' en un appartement Σ'' ayant C' et C'' au moins en commun avec Σ. La place de C'' dans Σ'' est celle de C' dans Σ' mais aussi celle de C'' dans Σ grâce au deuxième point de la proposition 3. Le lemme est donc démontré.∎

La proposition s'en suit. ∎

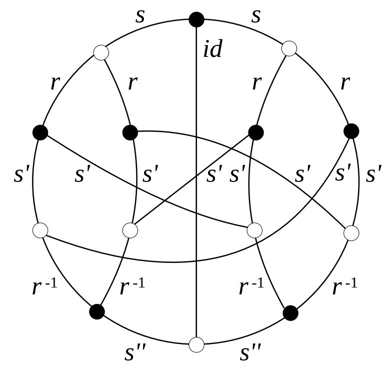

Figure 9 : L'application Φ

Un corollaire de notre démonstration est l'existence d'une fonction $\delta : Ch(\Delta) \times Ch(\Delta) \longrightarrow W$, où $Ch(\Delta)$ désigne l'ensemble des chambres de Δ, invariante par l'action de G par translation à gauche telle que :

$$\delta(C, gC) = \Phi(g) = w.$$

Remarquons que $\delta(C, C') = \delta(C', C)^{-1}$ car $\delta(gC, C) = \delta(C, g^{-1}C) = \delta(C, gC)^{-1}$.

Nous avons représenté sur la figure 9 le graphe des drapeaux de $P^2(k)$ de telle sorte que la " distance" d'une chambre à la chambre centrale verticale C soit déterminée par sa hauteur. On a donc obtenu un moyen géométrique pour déterminer l'élément w dans la décomposition de Bruhat. Dans le cas de l'immeuble des drapeaux, on a vu qu'il s'agissait d'une permutation : *la permutation de Jordan-Hölder*.

Références

W. Ballmann, M. Gromov, V. Schroeder *Manifolds of nonpositive curvature*, p253, Birkhäuser 1985.

K.S. Brown, *Buildings*, Springer Verlag 1989.

K.S. Brown, *Five lectures on buildings*, Congrès de Trieste 1990.

◇ Sylvain Barré
UMPA ENS–Lyon
46, allée d'Italie
69364 Lyon cedex 7
sbarre@umpa.ens-lyon.fr