Points de Weierstrass d'une surface de Riemann compacte

Sandrine Leroy

Introduction

Nous allons nous intéresser ici à des points très remarquables : les points de Weierstrass ... Avant d'en dévoiler les multiples facettes, commençons par définir plus précisément ces fameux espaces dans lesquels ils vivent : les surfaces de Riemann compactes.

Surfaces de Riemann.

Une *surface* X est un espace topologique recouvert par des ouverts U_i homéomorphes à des ouverts V_i de **C**. C'est une *surface de Riemann* si les homéomorphismes $\phi_i : U_i \to V_i$ vérifient la condition suivante : lorsque $U_i \cap U_j$ est non vide, $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ est une fonction holomorphe sur $\phi_j(U_i \cap U_j)$. Les couples (U_i, ϕ_i) sont appelés des *cartes*, les homéomorphismes composés $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ des *changements de cartes* (ou *changement de coordonnées*) et tout recouvrement de X par des cartes est un *atlas* (voir figure 1).

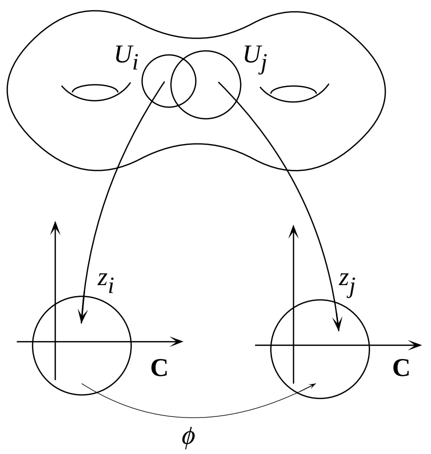

Figure 1 : Applications de changement de cartes sur une surface de Riemann

L'exemple le plus simple de surface de Riemann est bien sur **C** lui-même, muni de l'atlas composé de la seule carte $(\mathbf{C}, \mathrm{id})$; de même, tout ouvert de **C** est une surface de Riemann.

Un exemple de surface de Riemann compacte nous est fourni par la *sphère de Riemann* $\mathbf{P}^1$, obtenue à partir de **C** en rajoutant un point à l'infini. Rappelons que les cartes $(\mathbf{P}^1 - \{0\}, z \to 1/z)$, et $(\mathbf{C}, \mathrm{id})$ constituent un atlas de $\mathbf{P}^1$.

Citons un dernier exemple : les tores. Ceux-ci sont définis comme le quotient de **C** par un réseau $\Lambda = \mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2$, où ω_1 et ω_2 sont deux complexes **R**-linéairement indépendants. Tous sont homéomorphes à $S^1 \times S^1$, visualisable par le recollement deux à deux des côtés d'un carré (voir figure 2).

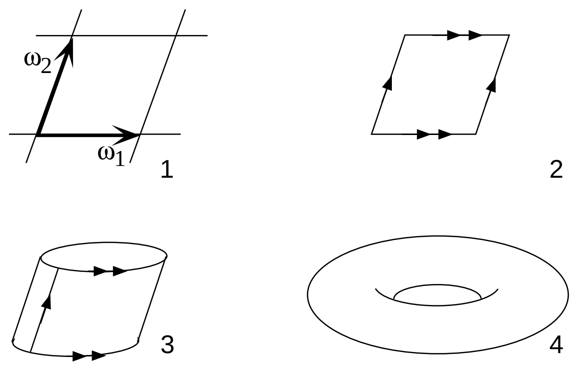

Figure 2 : Le tore

Pour définir un objet sur une surface, on doit très souvent considérer le problème localement. En effet, tout se passe alors comme si on était sur un ouvert de $\mathbf{R}^2$.

Donnons-nous ainsi deux surfaces de Riemann X et Y. Une application f, de X dans Y, sera dite *holomorphe* si, pour chaque carte (U_i, ϕ_i) de X, pour chaque carte (U'_k, ϕ'_k) rencontrant $f(U_i)$, les applications composées, entre ouverts de **C**, de la forme $\phi'_k \circ f \circ \phi_i^{-1}$, sont elles holomorphes au sens habituel.

En particulier, on parlera de fonction holomorphe sur X lorsque f arrive dans **C**. Remarquons qu'une fonction méromorphe sur X, ie une fonction admettant un nombre fini de pôles et holomorphe en dehors de ces points, peut être considérée comme une application holomorphe de X dans $\mathbf{P}^1$: il suffit d'attribuer à chaque pôle la valeur ∞ (vérifier qu'on définit bien ainsi à l'aide de la carte à l'infini une application holomorphe).

On note souvent les cartes sous la forme (U, z). Une application f sur X est alors considérée comme « fonction de z » sur la carte (U, z).

Il est utile de remarquer que la théorie des fonctions holomorphes développée sur **C** s'étend très facilement aux surfaces de Riemann ([F], §2). On hérite des théorèmes classiques fondamentaux : *comportement local, singularités*, *zéros et pôles isolés*, *principe du maximum*, *application ouverte*, *théorème des résidus* qui nous intéressera tout spécialement... L'étude des surfaces de Riemann compactes reposent par ailleurs sur deux théorèmes fondamentaux, à savoir le *théorème de Riemann-Roch* et le *théorème de dualité de Serre*. On pourra consulter [G-H] pour aborder ces théorèmes qu'on ne peut ici énoncer dans toute leur généralité. Rappelons à ce niveau que le

Théorème 1 (Application ouverte). *L'image de toute application holomorphe non constante entre deux surfaces de Riemann est ouverte.*

permet de montrer la

Proposition 1. *Toute fonction holomorphe sur une surface de Riemann X compacte est constante.*

Démonstration. En effet, soit X une surface de Riemann compacte, et f une application holomorphe non constante de X dans Y, autre surface de Riemann. $f(X)$ est alors ouvert, mais également compact, donc fermé dans Y. Par connexité, $Y = f(X)$, donc Y est compacte et f est surjective. Dans le cas où Y n'est pas compacte, on en déduit que f holomorphe est constante. ∎

Enfin, une dernière notion fondamentale relative aux variétés est celle de formes différentielles. Nous n'avons cependant pas besoin pour notre sujet de définir ces objets en toute généralité.

Nous avons précisé que la donnée d'une fonction f sur X est la donnée d'autant de fonctions f_i sur les ouverts des cartes, avec pour condition de recollement $f_j = f_i \circ \phi$, si ϕ désigne l'application de changement de cartes. Remarquons ici que les fonctions dérivées f_i' ne définissent pas une fonction sur X, puisqu'elles ne vérifient pas la condition de compatibilité $f_j' = f_i' \circ \phi$. Par contre, elles vérifient d'autres conditions de recollement, à savoir : $f_j' = (f_i' \circ \phi)\phi'$, c'est-à-dire que la quantité invariante est cette fois la différentielle $df_i = f_i' dz_i$ sur $U_i \cap U_j$.

Plus généralement, une *forme différentielle méromorphe* est la donnée d'une famille de fonctions méromorphes f_i vérifiant la relation de compatibilité $f_j = (f_i \circ \phi)\phi'$. Sur une carte (U, z), la forme différentielle est alors notée $f dz$. Lorsque les fonctions f sur chaque carte sont holomorphes, on parle simplement de forme différentielle holomorphe.

Considérons par exemple une fonction méromorphe f sur une surface de Riemann X, elle définit une forme différentielle typique, à savoir df/f.

Nous allons dans toute la suite nous intéresser exclusivement aux surfaces de Riemann compactes.

Genre d'une surface de Riemann compacte.

Nous avons vu plus haut l'exemple du tore. Imaginons maintenant un « tore à deux trous », c'est-à-dire deux tores auxquels on aurait enlevé un petit disque, et qu'on aurait recousus l'un avec l'autre le long du cercle ainsi découpé (*somme connexe* de deux tores).

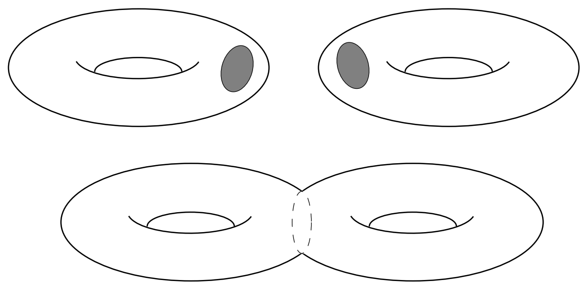

Figure 3 : Somme connexe de deux tores

Plus généralement, on pourrait même imaginer un « tore à g trous » (figures 3 et 4). Il se trouve que le nombre de « trous » d'une surface orientable (surface munie d'un atlas pour lequel toutes les applications de changements de carte sont de jacobien strictement positif) compacte est un invariant topologique (c'est-à-dire préservé par homéomorphisme). Il est appelé *genre* de la surface [Ma]. Il existe des surfaces de Riemann de genre quelconque, nous en verrons quelques exemples dans la suite.

Dans le cas précis des surfaces de Riemann compactes, on dispose d'un théorème très profond (voir [F]):

Théorème 2 (Riemann). *L'espace $\Omega(X)$ des formes différentielles holomorphes sur la surface de Riemann X est de dimension finie lorsque X est compacte. La dimension g de $\Omega(X)$ est exactement le genre de la surface de Riemann.*

Toutefois, il faut bien comprendre que le genre ne décrit pas complétement la surface : il existe des surfaces de même genre mais qui ne sont pas holomorphiquement équivalentes. Ainsi, Proposition 2 (FK). *Deux tores respectivement définis par les réseaux* $\mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2$ *et* $\mathbf{Z}\alpha_1 + \mathbf{Z}\alpha_2$ *sont holomorphiquement équivalents si et seulement si il existe* α *complexe non nul,* a, b, c, d *dans* $\mathbf{Z}$ *tels que* $ad - bc = 1$ *et* $(\alpha\omega_1, \alpha\omega_2) = (a\alpha_1 + c\alpha_2, b\alpha_1 + d\alpha_2)$.

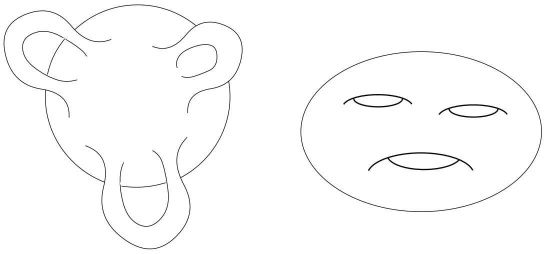

Figure 4 : Surface topologique de genre 3

Une fois le genre introduit, nous pouvons aborder le difficile problème de l'existence de fonctions méromorphes sur une surface de Riemann X. Rappelons d'abord que *toute fonction holomorphe sur une surface compacte est nécessairement constante.*

Le problème est différent pour les fonctions méromorphes. Le résultat suivant découle directement du théorème de *Riemann-Roch* ([F], §16) :

Théorème 3. *Soit* X *une surface de Riemann compacte,* a *un point de* X. *Il existe une fonction méromorphe non constante, holomorphe en tout autre point que* a*, admettant un pôle d'ordre inférieur ou égal à* $g + 1$ *en* a.

Définissons à ce niveau le *résidu d'une forme différentielle* :

Définition 1. *Soit* x *dans* X, (V, z) *une carte locale telle que* $z(x) = 0$. *Soit* ω *une forme différentielle méromorphe sur* X, ω *s'écrit* fdz *sur* V, *où* f *est méromorphe sur* V. *On pose alors*

$$\mathrm{Res}_x\, \omega := \mathrm{Res}_x\, f$$

où le second résidu est pris au sens habituel.

Lorsque de plus la surface est compacte, on peut définir le résidu global de ω par

$$\mathrm{Res}\, \omega := \sum_{x \in X} \mathrm{Res}_x\, \omega$$

On a alors :

Théorème 4 (des résidus). *Soit* X *une surface de Riemann compacte et* ω *une forme différentielle méromorphe sur* X. *La somme sur* X *des résidus de* ω *est alors nulle.*

Le théorème 3 nous permet à présent de démontrer le

Corollaire 1. *Toute surface de genre nul est biholomorphe à la sphère de Riemann.*

Démonstration. Appelons X notre surface, et a un point sur X. Soit f une fonction donnée par le théorème ci-dessus, qui admet un pôle d'ordre inférieur ou égal à 1 en a. L'ordre du pôle est alors exactement 1, sinon, f serait holomorphe sur une surface compacte, donc constante. Il nous faut à présent invoquer le *théorème des résidus.* Appliqué à la forme différentielle df/f, ce théorème montre que f admet un unique zéro , d'ordre 1. En considérant $f - \lambda$, pour tout λ de $\mathbf{C}$, on obtient que f atteint une et une seule fois chaque point de $\mathbf{P}^1$. Ainsi, f est bijective, holomorphe de X dans $\mathbf{P}^1$, donc X est biholomorphe à $\mathbf{P}^1$ (la dérivée de f, holomorphe et injective, ne s'annule pas). ∎

Ainsi, toute surface de Riemann compacte simplement connexe, donc homéomorphe à une sphère, donc de genre nul, est en fait biholomorphe à la sphère de Riemann. Ce qui, nous l'avons souligné plus haut, est faux ne serait-ce qu'en genre 1, est vérifié en genre 0.

Points de Weierstrass.

Abordons à présent le véritable sujet de cet article, à savoir les points de Weierstrass. A partir d'une définition simple mais un peu technique, nous essaierons de faire apparaitre une caractérisation efficace de ces points.

Le wronskien.

Précisons donc tout d'abord la notion de wronskien. Etant donné g fonctions holomorphes $f_1, \ldots, f_g$ sur $\mathbf{C}$, on note $W(f_1, \ldots, f_g)$ le déterminant de leurs dérivées :

$$W(f_1, \ldots, f_g) := \begin{vmatrix} f_1 & \cdots & f_g \\ f_1' & \cdots & f_g' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(g-1)} & \cdots & f_g^{(g-1)} \end{vmatrix}$$

Considérons maintenant une surface de Riemann X fixée. On la suppose compacte, et on note g son genre. Par définition, g représente la dimension de $\Omega(X)$. Donnons-nous alors une base $(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ de cet espace.

Fixons-nous enfin un point P de X. Nous allons définir le *wronskien des g formes holomorphes de la base en P*.

Soit (U, z) une carte locale en P telle que $z(P) = 0$. Chaque ω_k s'écrit sur (U, z) sous la forme $\omega_k = f_k dz$, où f_k est une fonction holomorphe sur le voisinage U de P. Posons :

$$W_z(\omega_1, \dots, \omega_g) := W(f_1, \dots, f_g)$$

où l'indice z nous rappelle que cette définition dépend du choix de la carte locale. L'important est cependant que l'ordre d'annulation de ce wronskien en P est indépendant tout autant du choix de la carte locale que du choix de la base de $\Omega(X)$ (on peut calculer explicitement le lien entre les wronskiens relatifs à deux cartes différentes, ainsi que le lien entre les wronskiens évalués à partir de deux bases distinctes).

Ces remarques nous autorisent finalement à poser la définition suivante :

Définition 2 (Point de Weierstrass.). *Soit X une surface de Riemann compacte. Un point P de X sera dit* point de Weierstrass *si, pour une base $(\omega_1, \dots, \omega_g)$ de $\Omega(X)$, pour une carte locale en P, le wronskien $W_z(\omega_1, \dots, \omega_g)$ s'annule. L'ordre du zéro de $W_z(\omega_1, \dots, \omega_g)$ en P est appelé* poids du point de Weierstrass*.*

On peut déjà constater qu'il n'y a qu'un nombre fini de points de Weierstrass, car leur ensemble est discret (un wronskien ne peut être nul sur un ensemble admettant un point d'accumulation sous peine d'être identiquement nul), donc fini dans un compact.

Fonctions méromorphes et points de Weierstrass.

Cette approche nous permet d'ores et déjà d'énoncer le résultat fondamental suivant :

Théorème 5. *Soit X une surface de Riemann compacte. Un point P de X est de Weierstrass si et seulement si il existe une fonction méromorphe sur X admettant P pour unique pôle, d'ordre inférieur ou égal à $\boldsymbol{g}$.*

Rappelons qu'un théorème très proche a déjà été énoncé plus haut (théorème 3), mais pour un point quelconque, l'ordre du pôle ne peut être majoré que par $\boldsymbol{g+1}$. Les points de Weierstrass sont donc les points où on peut abaisser l'ordre du pôle.

Essayons de comprendre un peu mieux ce dernier résultat.

Démonstration. Fixons-nous un point P de X, une base $(\omega_1, \dots, \omega_g)$ de $\Omega(X)$, et enfin une carte locale (U, z). Chaque ω_k est représentée par une fonction holomorphe f_k sur U, qui admet un développement en série de Taylor, de sorte qu'on écrit:

$$\omega_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn} z^n dz$$

Quel est le problème posé ? On cherche en fait à mettre en évidence une fonction méromorphe sur X qui ait de plus une partie principale en P de la forme

$$h = \sum_{n=0}^{g-1} \frac{c_n}{z^{n+1}} \tag{1}$$

avec $(c_0, \dots, c_{g-1})$ non tous nuls.

On est confronté à un problème dit *problème de Mittag-Leffler*, à savoir, la détermination d'une fonction à parties principales prescrites. On le rencontre déjà dans la théorie des fonctions méromorphes sur $\mathbf{C}$, voyons dans notre contexte comment le résoudre...

Supposons qu'il existe une fonction méromorphe f ayant une partie principale adéquate. D'après le théorème des résidus 4,

$$\forall \omega \in \Omega(X), \mathrm{Res}(f\omega) = 0,$$

ou encore

$$\forall k \in \{1, \dots, g\}, \quad \mathrm{Res}(f\omega_k) = 0.$$

Or,

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(f\omega_k) &= \mathrm{Res}(h\omega_k) \\ &= \mathrm{Res}(\sum_{n=0}^{\infty} a_{kn} z^n)(\sum_{n=0}^{g-1} \frac{c_n}{z^{n+1}}) \\ &= \sum_{n=0}^{g-1} a_{kn} c_n \end{aligned}$$

Donc, si f a la partie principale décrite par (1), on a

$$\forall k \in \{1, \dots, g\}, \sum_{n=0}^{g-1} a_{kn} c_n = 0. \tag{2}$$

Le système (2) admet une solution non triviale si et seulement si $\det(a_{kn}) = 0$. Mais ce déterminant représente précisément le terme constant du wronskien. Ainsi, on a établi que si une fonction aux propriétés voulues existe, le wronskien s'annule nécessairement.

Réciproquement, si le wronskien est nul, le système (2) admet une solution non triviale $(c_0, \ldots, c_{g-1})$. Le *théorème de dualité de Serre* permet alors de justifier l'existence d'une fonction méromorphe ayant la partie principale déterminée par le g-uplet $(c_0, \ldots, c_{g-1})$.

Finalement, on peut trouver une fonction méromorphe dont le pôle en P soit d'ordre seulement g si et seulement si le wronskien s'annule en P, i.e. si P est un point de Weierstrass. ▮

Ce théorème très significatif nous permet d'ores et déjà de faire quelques remarques de structure sur les points de Weierstrass. En particulier, on peut énoncer en

Corollaire 2. *Le groupe des automorphismes d'une surface de Riemann compacte laisse globalement invariant l'ensemble des points de Weierstrass.*

Démonstration. En effet, soit P un point de la surface X, et f une fonction méromorphe sur X, holomorphe en tout autre point que P, et admettant en P un pôle d'ordre minimal, disons n. Cet ordre est donc inférieur ou égal à g si P est point de Weierstrass, exactement égal à $g+1$ sinon. Soit γ un automorphisme de X. La composée $f \circ \gamma^{-1}$ est alors une fonction méromorphe sur X, holomorphe sur $X \backslash \{\gamma(P)\}$, et admettant en $\gamma(P)$ un pôle de même ordre n. On met ainsi en évidence que P et $\gamma(P)$ sont simultanément points de Weierstrass. ▮

Suite de sauts

Le théorème des sauts de *Weierstrass* va nous permettre de prolonger le théorème 5 que nous venons de démontrer.

Théorème 6 (Weierstrass). *Soit X une surface de Riemann compacte, de genre $g \geq 1$ et $P \in X$. Il existe une suite $1 = n_1 < n_2 < \ldots < n_g < 2g$ de g entiers telle qu'on ne puisse trouver aucune fonction holomorphe sur $X \backslash \{P\}$ et admettant un pôle d'ordre n_j en P.*

Démonstration. Il s'agit d'une application assez caractéristique du *théorème de Riemann-Roch.* Le contexte dans lequel nous nous plaçons est suffisamment simple pour que nous puissions développer la preuve du théorème de Weierstrass. Fixons-nous un point P de notre surface de Riemann compacte X. Soit $n \in \mathbf{Z}$,

- si $n \geq 0$, $L(nP)$ désigne le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\{0\} \cup \{f$ méromorphe sur X, holomorphe sur $X \backslash \{P\}$ et admettant en P un pôle d'ordre au plus $n\}$.
- Si au contraire $n < 0$, $L(nP)$ désigne $\{0\} \cup \{f$ holomorphe sur X et admettant en P un zéro d'ordre au moins $(-n)\}$.

On notera enfin $l(nP)$ la dimension sur $\mathbf{C}$ de $L(nP)$.

De même, on peut définir les espaces $I(nP)$, analogues des $L(nP)$ pour les formes différentielles. On notera alors $i(nP) = \dim I(nP)$. Remarquons par exemple que $i(0) = g$ (voir le théorème 2 sur le genre).

C'est grâce à quelques remarques sur ces espaces et aux théorèmes de *Riemann-Roch* et de *Serre* qu'on va pouvoir résoudre notre problème (voir par exemple [F] pour une présentation relativement élémentaire de ces théorèmes, qui s'énoncent dans un cadre nettement plus général avec des objets non encore introduits ici). Avec les notations que nous avons prises, on peut condenser ces deux théorèmes sous la forme :

$$l(nP) = 1 - g + n + i(-nP) \tag{3}$$

Tout repose alors sur les constatations suivantes :

1. $L(0) = L(0P) = \mathbf{C}$, car $L(0)$ désigne exactement l'ensemble des fonctions holomorphes sur X, dont on sait qu'elles sont nécessairement constantes puisque X est compacte.
2. $L(P) = L(0)$, car le *théorème des résidus* interdit l'existence d'une fonction méromorphe qui aurait un unique pôle, simple : le résidu de la forme différentielle fdz serait alors non nul.
3. $\forall n < 0, L(nP) = 0$: en effet, toute fonction holomorphe sur X est constante. On impose ici qu'elle s'annule en au moins un point, à savoir P, donc elle est nécessairement nulle.
4. $l(nP) - l((n-1)P) = 0$ ou 1. Pour le voir, considérons l'application
$$\begin{cases} L(nP) & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ f = \sum a_k z^k & \longmapsto & a_{-n} \end{cases}$$
où on s'est fixé un carte locale en P dans laquelle on écrit le développement de Laurent des fonctions méromorphes considérées. Le noyau de cette application est alors $l((n-1)P)$, d'où le résultat escompté.
5. à l'aide du *théorème de Riemann-Roch* pris sous une autre forme, on peut montrer que
$$\forall n < 2(g-1), i(nP) = 0.$$

6. on en déduit alors, grâce à l'équation (3), que $l((2g-1)P) = g$.

Soit enfin
$$\Gamma = \{n \in \mathbf{N}\backslash\{0\}, \exists f \in L(nP)\backslash L((n-1)P)\}.$$
C'est encore en vertu du *théorème de Riemann-Roch* que $\Gamma \subset \{2, \ldots, 2g-1\}$.

On appelle *trou* ou *lacune de Weierstrass* tout entier naturel compris entre 1 et $2g-1$ qui ne soit pas un élément de Γ. Explicitement, n est une lacune de Weierstrass si et seulement si il n'existe pas de fonction méromorphe sur X ayant un unique pôle en P, d'ordre exactement n, et encore, si et seulement si $l(nP) - l((n-1)P) = 0$ d'après la 4^e remarque.

Nous avons à présent réuni toutes les informations nécessaires. En effet, on a établi que $l(0) = l(P) = 1$, $l((2g-1)P) = g$, et que les sauts dimensionnels sont soit de 0, soit de 1. On compte qu'il y a donc $g-1$ sauts de 0 et autant de 1 à partir de $l(P)$, d'où, en comptant $n_1 = 1$, g lacunes de Weierstrass, qui sont les entiers annoncés dans le théorème. ∎

Ce théorème signifie donc que l'ordre du pôle d'une fonction méromorphe en un point donné P ne peut pas atteindre certaines valeurs, comme 1 par exemple. Ces valeurs interdites sont aussi appelées les *sauts* en P. On notera au contraire $\alpha_1, \ldots, \alpha_g$ les entiers entre 2 et $2g$ autorisés (les *non-sauts*). On pourra alors étudier les points d'une surface par l'intermédiaire des suites de sauts.

Citons les principales propriétés de la suite de sauts [FK]:

- $\forall 0 < j < g, \alpha_j + \alpha_{g-j} \leq 2g$
- $\alpha_1 = 2 \Rightarrow \forall 0 < j < g, \alpha_j + \alpha_{g-j} = 2g$
- $\alpha_1 > 2 \Rightarrow \exists 0 < j < g$ tel que $\alpha_j + \alpha_{g-j} > 2g$
- $\sum_{j=1}^{g-1} \alpha_j \geq g(g-1)$, et l'égalité équivaut à $\alpha_1 = 2$

Le théorème 5 que nous avons démontré un peu plus haut nous permet bel et bien de caractériser un point de Weierstrass par sa suite de sauts. En effet, on a démontré le

Théorème 7. *P est un point de Weierstrass si et seulement si $\alpha_1 \leq g$*

Pour un point qui n'est pas de Weierstrass, la suite des sauts est toujours $n_1 = 1$ (qui correspond au fait que toute fonction holomorphe sur X compacte est constante), $n_2 = 2, n_g = g$. Par contre, pour un point de Weierstrass, cette suite peut varier ... [voir figures 5, 6 et 7]

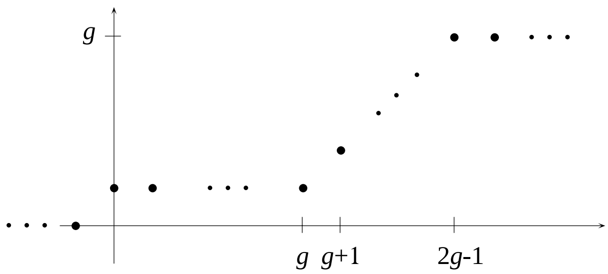

Figure 5 : Suite de sauts d'un point usuel

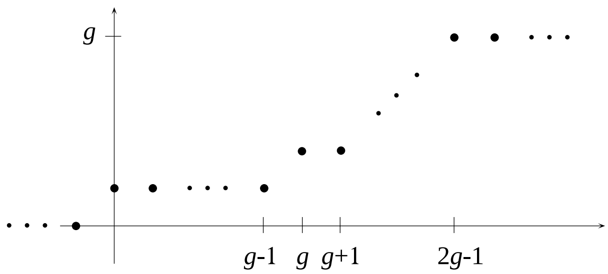

Figure 6 : Suite de sauts d'un point de Weierstrass de poids minimal

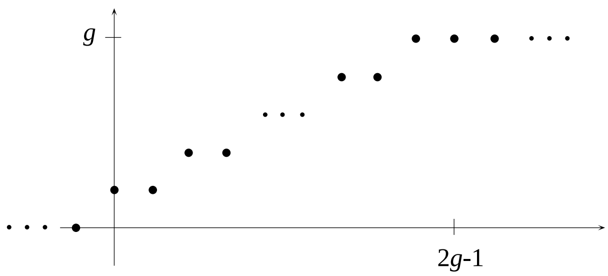

Figure 7 : Suite de sauts d'un point de Weierstrass de poids maximal

Dénombrement des points de Weierstrass.

On note usuellement W l'ensemble des points de Weierstrass de la surface considérée. La théorie des sauts fournit par exemple une détermination du cardinal de W, sans oublier le poids de chaque point de Weierstrass. Ainsi, toute surface compacte de genre g comprend $g(g-1)(g+1)$ points de Weierstrass comptés avec leur poids.

En particulier, dès que le genre dépasse 2, la surface contient effectivement un tel point !

Le poids de chaque point de Weierstrass est de plus majoré par $g(g-1)/2$, ce qui revient à dire que le nombre physique de points de Weierstrass, ou encore le cardinal de W, est compris entre $2g+2$ et $g^3 - g$.

Ces bornes sont atteintes (on verra un peu plus loin un exemple de surface dans laquelle tous les points de Weierstrass sont de poids maximal). Plus précisément, un point de Weierstrass est [FK]

- de poids minimal [figure 6] si et seulement si sa suite de sauts est : $1, 2, \ldots, g-1, g+1$;
- de poids maximal [figure 7] si et seulement si sa suite de sauts est : $1, 3, \ldots, 2g-1$.

Quelques exemples de surfaces de Riemann, et leurs points de Weierstrass.

Exemple 1 : Les quartiques.

Pour parler des quartiques, il nous faut d'abord définir brièvement ce qu'est un *espace projectif.*

L'espace projectif complexe $\mathbf{CP}^n$ peut être décrit comme l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbf{C}^{n+1}$. Autrement dit, $\mathbf{CP}^n$ est le quotient de $\mathbf{C}^{n+1}\backslash\{0\}$ par la relation d'équivalence suivante : deux $(n+1)$-uplets non triviaux $(x_0, \ldots, x_n)$ et $(x'_0, \ldots, x'_n)$ sont équivalents si et seulement si ils représentent deux points d'une même droite vectorielle, ie si les x_j sont proportionnels aux x'_j. On représente alors un point de $\mathbf{CP}^n$ grâce à des coordonnées homogènes $[x_0, \ldots, x_n]$, qui sont un représentant des classes d'équivalence. Dans la suite, on utilisera uniquement $\mathbf{CP}^2$.

L'objet auquel nous allons nous intéresser fait partie de ce qu'on appelle les *courbes algébriques lisses complexes* [B-K]. On se place sur $\mathbf{CP}^2$, et on considère les ensembles de points de $\mathbf{CP}^2$ vérifiant une équation de la forme : $P(X,Y,Z) = 0$, où P est un polynôme homogène dont les dérivées partielles premières ne peuvent jamais s'annuler simultanément en un point de la courbe (cette dernière condition correspond à la régularité de la courbe, qui est alors dite *lisse*).

On peut voir les courbes lisses un peu plus simplement. On considère les points de $\mathbf{C}^2$ vérifiant $P(X,Y) = 0$, où cette fois P n'est pas nécessairement homogène, mais possède encore en tout point au moins une dérivée non nulle.

Cependant, une telle courbe de $\mathbf{C}^2$ ne peut être compacte. On effectue alors ce qu'on appelle une *homogénéisation* : on rend homogène P en multipliant chaque monôme par une puissance adéquate d'une nouvelle indéterminée Z, de façon à ce que le nouveau polynôme Q de $\mathbf{C}[X,Y,Z]$ soit homogène de même degré que P, et vérifie en l'infini la condition de régularité.

L'équation $Q(X,Y,Z) = 0$ définit alors une courbe algébrique lisse complexe au sens où nous l'avions défini ci-dessus. Prenons un exemple concret :

$$P(X,Y) = X^2 - 3Y^3 + 4$$

s'homogénéise en :

$$Q(X,Y,Z) = X^2Z - 3Y^3 + 4Z^3.$$

On peut voir relativement facilement, en appliquant la *formule d'Euler* pour les fonctions homogènes et surtout le *théorème des fonctions implicites*, que toute courbe algébrique lisse complexe peut être munie d'une structure de surface de Riemann.

Nous nous proposons d'étudier ici le cas particulier des *quartiques*, courbes algébriques lisses définies par un polynôme de degré 4, pour aboutir au résultat final suivant ([M]):

Théorème 8. *Les points de Weierstrass d'une quartique sont les points d'inflexion.*

Démonstration. Nous allons plutôt travailler sur une courbe Γ définie par $P \in \mathbf{C}[X,Y]$. On notera P_j la partie homogène de degré j de P, c'est-à-dire la somme des monômes d'ordre j. Plaçons-nous en un point $M = (a,b)$ de Γ. La tangente à Γ en M peut être paramétrée sous la forme

$$\begin{cases} x = a + \lambda t \\ y = b + \mu t \end{cases}$$

M sera dit *point d'inflexion* de Γ si le polynôme à une variable $P(a+\lambda t, b+\mu t)$ est de valuation 3 (s'annule en 0 à l'ordre exactement 2).

Quitte à faire un changement de repère, on peut par exemple supposer que $P(0,0) = 0$ et que $P_1(X,Y) = Y$. La tangente en (0,0) à Γ admet alors pour équation $Y = 0$. En outre, (0, 0) est point d'inflexion de Γ si et seulement si $P_2(X,0) = 0$.

En $(0,0)$, $\partial P/\partial Y \neq 0$. On peut donc appliquer *le théorème des fonctions implicites.* Localement, $P(X,Y) = 0$ équivaut à $Y = f(X)$ où f est analytique. $P(0,0) = 0$ se traduit par $f(0) = 0$, et le fait que la tangente soit la droite $Y = 0$ entraine que $f'(0) = 0$. Si (0, 0) est de plus un point d'inflexion, on a alors $f''(0) = 0$.

Toute droite de $\mathbf{CP}^2$ coupe la courbe Γ en quatre points, en comptant les multiplicités (on dira que la droite d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = a + \lambda t \\ y = b + \mu t \end{cases}$$

coupe Γ en (a, b) avec la multiplicité m si $P(a+\lambda t, b+\mu t)$ est de valuation m). Les points d'intersection correspondent en effet aux zéros d'un polynôme de degré 4, sauf si le terme P_4 est nul au point considéré. Dans ce cas, on a des racines dans $\mathbf{C}^2$ et une racine à l'infini (voilà pourquoi on doit se placer sur $\mathbf{CP}^2$!). Finalement, dans $\mathbf{CP}^2$, toute droite coupe bien exactement quatre fois avec les multiplicités notre quartique (et plus généralement d fois une courbe algébrique lisse de degré d).

Montrons à présent que tout point d'inflexion de Γ est un point de Weierstrass. L'outil privilégié est alors le théorème 5... Précisons avant tout que le genre d'une courbe algébrique lisse complexe de degré d est donné par la formule

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

(voir par exemple [R]). Notre quartique est ainsi de genre 3.

Soit maintenant P_1 un point d'inflexion. Il nous suffit d'exhiber une fonction méromorphe sur la courbe (on considère alors la courbe dans $\mathbf{CP}^2$) qui admette pour unique pôle P_1, et qui soit d'ordre 3.

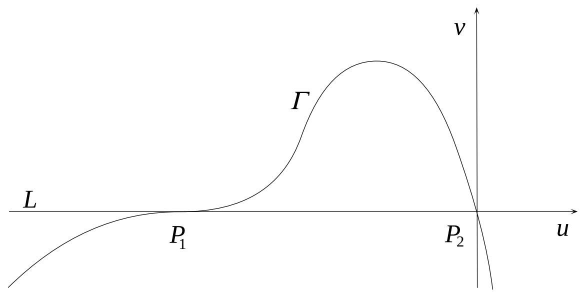

Figure 8 : Point d'inflexion d'une quartique

Appelons L la tangente en P_1 à Γ. L coupe Γ en P_1 avec une multiplicité 3, donc elle coupe Γ en un unique autre point P_2, avec pour multiplicité 1. Choisissons comme système de coordonnées affines (u, v) dans $\mathbf{C}^2$ le système orthonormé d'origine P_2, dans lequel L est décrite par $u = 0$. Considérons enfin la fonction définie sur Γ par $f(u, v) = v/u$. Cette fonction est holomorphe sur la courbe sauf peut-être en P_1 et P_2 [figure 8].

Que se passe-t-il en P_2 ? Le contact entre L et Γ en P_2 est d'ordre 1, donc L n'est pas tangente à Γ en P_2. Par conséquent, $\partial P/\partial v \neq 0$ en P_2, et l'on peut appliquer le théorème des fonctions implicites. Localement, sur Γ, v s'exprime sous la forme $v = \phi(u)$, et $\phi(0) = 0$. Ainsi, il s'agit en fait d'une fausse singularité, f est holomorphe au voisinage de P_2.

Reste à voir qu'elle admet effectivement un pôle d'ordre 3 en P_1 ! Or, l'étude locale que nous avons menée plus haut au voisinage de (0, 0), en supposant qu'il était point d'inflexion, nous permet d'écrire, en tenant compte du système de coordonnées ici choisi : au voisinage de P_1, sur Γ, $u = \psi(v)$, avec $\psi(v_0) = \psi'(v_0) = \psi''(v_0) = 0$. Localement, $u = a(v - v_0)^3 + \ldots$, donc

$$f(u, v) = \frac{v_0}{a(v - v_0)^3} + \ldots$$

admet un pôle d'ordre 3 en P_1.

En résumé, chaque point d'inflexion est de Weierstrass. Pour pouvoir affirmer que ce sont les seuls, il faut encore les dénombrer. Une quartique compte 24 points d'inflexion (cela se calcule à l'aide du *théorème de Bezout* en géométrie algébrique), et $3^3 - 3 = 24$, donc il ne peut pas y avoir d'autre point de Weierstrass. Ceux qu'on a déterminés sont par ailleurs de poids minimal. ▮

Ce premier exemple nous suggère qu'une approche plus géométrique des points de Weierstrass est possible. Voici un second exemple dans lequel ces points se caractérisent encore différemment ...

Exemple 2 : Les surfaces hyperelliptiques.

Ces surfaces, bien qu'étant parmi les plus simples à étudier, possèdent quantité de propriétés surprenantes. Essayons tout d'abord de décrire simplement ce qui se cache derrière cette intimidante dénomination...

DÉFINITION 3. *On appelle* surface hyperelliptique *toute surface de Riemann X compacte munie d'une fonction méromorphe $\pi : X \longrightarrow \mathbf{P}^1$ qui admet exactement deux pôles.*

En fait, on peut se représenter très concrètement une surface hyperelliptique de la manière suivante. Soit

$$f(z) = (z - a_1) \ldots (z - a_{2g+2})$$

un polynôme sur $\mathbf{C}$ à racines distinctes dans $\mathbf{C}$. Posons

$$X := \{(z, w), z, w \in \mathbf{P}^1, w^2 = f(z)\}$$

et notons π la projection selon la première coordonnée. On remarque :

- $\forall z \neq a_j, \pi^{-1}(z) = \{(z, w_1), (z, w_2)\}$, où w_1 et w_2 sont les deux racines, distinctes, de $f(z)$ qui n'est pas nul.

- $\forall j, \pi^{-1}(a_j) = \{(a_j, 0)\}$, car $f(a_j)$ est nul.

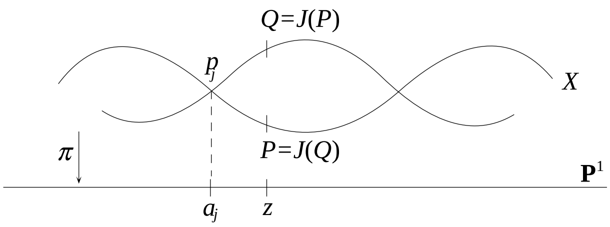

Figure 9 : Surface hyperelliptique et involution hyperelliptique

Nous allons montrer que *les points de Weierstrass de la surface X ainsi construite sont exactement les points* $p_j := \pi^{-1}(a_j)$ *au-dessus des racines du polynôme initial.*

D'après le théorème 5, et à la lumière des résultats sur les suites de sauts, il suffit tout simplement d'exhiber pour chaque j une fonction f_j méromorphe sur X, qui admet un unique pôle en p_j **d'ordre 2** ! La fonction définie sur X par

$$f_j(x) = \frac{1}{\pi(x) - \pi(p_j)},$$

soit plus explicitement

$$f_j(z, w) = \frac{1}{z - a_j},$$

permet bien de conclure : l'existence d'une fonction méromorphe sur X dont l'unique pôle p_j est d'ordre strictement inférieur à $g+1$ traduit que p_j est un point de Weierstrass. Tous les points qui nous intéressent sont donc de Weierstrass.

Par ailleurs, il n'y en a aucun autre sur X, puisque chacun des p_j est de poids maximal, à savoir $g(g-1)/2$ (car l'ordre de la fonction exhibée est 2). Il suffit alors de faire le décompte des points de Weierstrass avec leur multiplicité pour voir qu'on les a bien tous déterminés...

L'étude des points de Weierstrass peut déjà nous laisser deviner que les surfaces hyperelliptiques sont tout-à-fait remarquables ! A vrai dire, ce sont les seules surfaces de Riemann compactes dont tous les points de Weierstrass sont de poids maximal.

Mais ce n'est pas tout ! On a parlé un peu plus haut du groupe des automorphismes d'une surface X, usuellement noté $\mathrm{Aut}(X)$. Lorsque X est hyperelliptique, on peut considérer l'automorphisme J suivant.

DÉFINITION 4 (INVOLUTION HYPERELLIPTIQUE). *Soit* $p \in X$, *s'il existe* $q \in X$ *tel que* $\pi(p) = \pi(q)$, *on pose* $J(p) = q$ *; sinon, on pose* $J(p) = p$.

Localement, au voisinage d'un point de Weierstrass (ie d'un point fixé par J), J s'écrit simplement $z \mapsto -z$. On dit que J « échange les feuillets », ce qu'on comprend intuitivement assez bien sur le dessin représentatif d'une surface hyperelliptique [figure 9].

Notons d'autre part $S(W)$ l'ensemble des permutations de l'ensemble W des points de Weierstrass de la surface X. Ce qu'on a vu antérieurement se traduit par l'existence d'un morphisme de $\mathrm{Aut}(X)$ dans $S(W)$. On peut en outre montrer que le noyau de ce morphisme est trivial, sauf dans un cas : celui où X est hyperelliptique (voir par exemple [FK] pour toutes ces propriétés). Le noyau est alors engendré par J. Il en découle immédiatement un résultat non trivial : $\mathrm{Aut}(X)$ *est fini.*

Une étude relativement simple, à l'aide de la *formule de Riemann-Hürwitz* ([F] §17), conduit même à une majoration du cardinal de $\mathrm{Aut}(X)$ par 48 en genre 2 ; par $84(g-1)$ en genre supérieur. En genre 3, la surface de Klein, étudiée par C. Bavard [B] dans le précédent numéro de ce journal, atteint cette borne.

Dernière particularité des surfaces hyperelliptiques et de l'involution hyperelliptique : tout automorphisme d'une surface de Riemann admet au plus $2g+2$ points fixes, et J est le seul automorphisme non trivial qui en admette autant.

Bibliographie

[B] Christophe Bavard. La surface de Klein, *Le journal de maths des élèves*, ENS–Lyon, vol.1 n° 1, 1994.

[B-K] Egbert Brieskorn, Horst Knörrer. Plane Algebraic Curves, *Birkhäuser Verlag.*

[FK] Farkas-Kra. Riemann Surfaces, Deuxième édition, *Springer-Verlag*, 1992.

[F] Forster. Lectures on Riemann Surfaces, *Springer-Verlag*, 1981.

[G-H] Phillip Griffiths, Joseph Harris. Principles of Algebraic Geometry, *John Wiley & Sons*, 1978.

[Ma] William S.Massey. Algebraic Topology : an Introduction, *Harcourt, Braco & World*, 1967.

[M] Mumford. Curves and their Jacobians, *Michigan University Press*, 1976.

[R] Eric Reyssat. Quelques Aspects des Surfaces de Riemann, *Birkhäuser*, 1989.

[Y] Kichoon Yang. Compact Riemann Surfaces and Algebraic Curves, *World scientific*, 1988.

◇ Sandrine Leroy
UMPA ENS–Lyon
46, allée d'Italie
69364 Lyon cedex 7
sleroy@ens@ens.ens-lyon.fr