Géométrie Non Commutative et Mécanique Quantique

Pré-requis : Notions de bases en Géométrie et Analyse

Résumé du cours :

Nous aimerions donner aux étudiants des notions de base en géométrie non-commutative et théorie quantique, en insistant sur leurs inter-relations : géométrie, algèbres d'opérateurs, analyse, mécanique quantique et théorie quantique de l'information.

Cours I : Denis Perrot (perrot@math.univ-lyon1.fr)
Cours II : Stéphane Attal (attal@math.univ-lyon1.fr)
Cours III : Thierry Fack (fack@math.univ-lyon1.fr)
Cours IV : Johannes Kellendonk (kellendonk@math.univ-lyon1.fr)
Cours V : Guillaume Aubrun (aubrun@math.univ-lyon1.fr)

1er semestre

Cours I : Opérateurs de Dirac en géométrie classique

1. Notions du calcul différentiel classique sur les variétés
2. Fibrés de spineurs et algèbres de Clifford
3. Opérateurs de Dirac, lien avec la physique quantique relativiste

Cours II : Mécanique quantique des systèmes ouverts

1. Introduction à la mcanique quantique (Etats, observables, mesures, Schrödinger)
2. Systmes quantiques ouverts (Matrices densité, applications complètement positives, théorèmes de Stinespring et Krauss, exemples physiques)
3. Interactions quantiques répétés (Modèle physique, dilatation, introduction aux chaînes de Markov, liens avec les systèmes dynamiques)
4. Théorie générale des semigroupes d'opérateurs (Semigroupes, générateurs, théorème de Hille-Yosida)
5. Equations maitresses de Lindblad (Semigroupes d'applications complètement positives, théorème de Lindblad, exemples.)

Cours III : Algèbres d'opérateurs et traces

1. Algèbres et leurs représentations
2. Notion de spectre, spectre de l'operateur de Dirac et son asymptotique
3. Traces, trace de Dixmier, Résidu de Wodzicki

2ème semestre

Cours IV : Triplets spectraux

1. Axiomes d'un triplet spectral (espace de Hilbert, algèbre d'opérateurs, Dirac)
2. Exemples : variété spinorielle commutative, tore non-commutatif et effet Hall quantique, ensemble de Cantor métrique et quasi-cristaux
3. Distance non-commutative
4. Calcul differentiel non-commutatif
5. Calcul integral non-commutatif
6. Fonction zêta et spectre de dimension

Cours V : Convexité en grande dimension et théorie quantique de l'information

1. Convexité en grande dimension
   - Notions de base de convexité ; inégalités de Brunn-Minkowski et apparentées.
   - Introduction à la théorie locale des espaces de Banach ; distance de Banach-Mazur.
   - Ellipsoïde de John et ses conséquences.
   - Entropie métrique.
   - Isopérimétrie et concentration de la mesure ; théorème de Dvoretzky.
   - Convexes aléatoires, théorème de Gluskin.
2. Théorie quantique de l'information
   - Rappels d'algèbre linéaire, produit tensoriel, applications complètement positives, canaux quantiques.
   - Intrication et séparabilité.
   - Application des méthodes de grandes dimensions.

Littérature :

A. Connes, *Non commutative geometry* (Academic Press, 1994).

J.M. Gracia-Bondia, J.C. Varilly, H. Figueroa *Elements of Noncommutative Geometry* (Birkhäuser, 2000).

J.C. Varilly, *An Introduction to Noncommutative Geometry* EMS Series of Lecturenotes in Mathematics 2006.

M. Ledoux, The concentration of measure phenomenon

G. Pisier, The volume of convex bodies and Banach space geometry

K. Ball, An elementary introduction to modern convex geometry (in Flavours of Geometry)

K. Davidson, S. Szarek, Local operator theory, random matrices and Banach spaces (in Handbook of the Geometry of Banach spaces).

Bengtsonn, K. Zyckowski, Geometry of quantum states