Cours de logique M2R au premier semestre
Théorie descriptive des groupes
(Proposition de programme)

Dans le premier tiers du cours on fournira une "boîte à outils" de théorie des ensembles et topologie utile à tout étudiant en logique, en parlant notamment d'ordinaux, cardinaux, filtres et ultrafiltres, et topologie produit.
Ensuite on passera à une étude générale des groupes polonais (théorème de Birkhoff-Kakutani et conséquences), particulièrement importants dans l'analyse et la combinatoire d'aujourd'hui. On présentera et discutera des exemples issus de divers domaines (groupes d'automorphismes de structures variées : espaces métriques, espaces mesurés standard, structures du premier ordre...).
Le dernier tiers du cours développera, lui, quelques notions classiques en théorie descriptive des ensembles (combinatoire infinie) avant de les appliquer à la théorie des relations engendrées par une action définissable d'un groupe polonais, pour finir par le théorème de Silver et mentionner la conjecture de Vaught topologique.

Boîte à outils de théorie des ensembles

1. Ordinaux, Cardinaux
2. Axiome du choix et conséquences
3. Filtres, ultrafiltres
4. Notions de base de topologie : topologie produit. Espaces compacts, complets, lemme de Baire. Espaces polonais. Espace de Baire, espace de Cantor.

Groupes polonais : théorie générale et exemples.

1. Définitions, construction du groupe complété d'un groupe métrisable.
2. Exemples : groupe de permutation des entiers, groupes d'automorphismes de diverses structures.
3. Ensembles Baire-mesurables, théorème de Kuratowski-Ulam
4. Actions continues de groupes polonais : théorème de Pettis.

Actions définissables de groupes polonais

1. Ensembles boréliens, analytiques ; caractérisation des analytiques par le théorème de Suslin.
2. Relations d'équivalences fermées. Théorème de Kuratowski-Mycielski.
3. $\mathcal{G}_0$-dichotomie (Kechris, Solecki, Todorcevic) et une conséquence : le théorème de Silver.