

Asymptotic behaviour of the Sinh-Gordon model multiple integrals

Intitulé français du sujet de thèse proposé :

Asymptotiques d'intégrales multiples du modèle de Sinh-Gordon

PhD supervisor :

- Alice Guionnet (alice.guionnet@ens-lyon.fr)
- Karol K. Kozłowski (karol.kozlowski@ens-lyon.fr)

Keywords :

Mathematical physics, probability theory, quantum integrable field theories, asymptotic analysis of multiple integrals.

Résumé

Le but de ce projet est d'étudier une certaine classe d'intégrales portant sur N variables en interaction très forte et leurs comportements asymptotiques quand N va vers l'infini. De nombreuses quantités en physique mathématique s'expriment via de telles intégrales, notamment les fonctions de corrélations dans la discrétisation sur réseau à N sites et en volume fini de la théorie quantique des champs Sinh-Gordon en 1+1 dimensions. Ces intégrales généralisent assez naturellement celles décrivant l'intégration sur le spectre de grandes matrices aléatoires hermitiennes tout en exhibant beaucoup de nouvelles caractéristiques. L'analyse de leur comportement à grand N permettra d'obtenir une description non-perturbative d'une théorie quantique des champs en volume fini. De surcroît, une meilleure compréhension de ce problème permettrait une avancée importante en mathématiques permettant d'analyser de nouveaux modèles de variables aléatoires en interaction forte, généralisant les célèbres modèles de Coulomb.

Synopsis

This project aims at studying a the large- N behaviour of class of integrals over N variables in strong interactions. Such integrals allow to express various kinds of quantities appearing in mathematical physics, for instance the correlation functions in the N -site discretisation of the 1+1 dimensional quantum Sinh-Gordon model in finite volume. In fact, on the one hand these integrals generalise rather naturally those describing the integration over the spectrum of large random hermitian matrices while on the other one they bring into the game many new features. The study of their large- N behaviour will allow to obtain a thorough and non-perturbative characterisation of a quantum field theory in finite volume. Moreover, the complete understanding of this problem would allow for an important progress in mathematics which would pave the way to the large- N analysis of new types of integrals involving integration variables in strong interaction and generalising the famous Coulomb gas models.

Scientific project

Multiple integrals constitute powerful tools allowing one to characterise a wide variety of quantities arising in theoretical physics (partition functions in statistical mechanics, correlation functions in quantum integrable models, etc) or mathematics (random matrix models, analytic combinatorics, etc). Very often, the nature of the mathematical or physical problem demands to extract the large N behaviour of multiple integrals involving N variables. The large deviation theory provides a theoretical setting allowing one to carry out such an analysis. However, this theory cannot be applied to a setting where the integration variables are subject to strong interactions, as is for instance the case of the Eigenvalues of large Gaussian random matrices or the famous Coulomb gas models. Recently, and for instance as developed in the works of Borot, Guionnet and Kozłowski or Leblé and Serfaty, there has emerged a new set of techniques allowing one to analyse such models. While having already led to important results, these methods are only still in their beginnings : the possibility to grasp the large- N behaviour of numerous interesting classes of N -fold integrals is still beyond their reach.

Correlation functions are objects of prime interest to the physics of a model since they correspond to quantities that are directly measurable experimentally. They are also the hardest observables to characterise : for most of the models, there is absolutely no hope to be able to describe them in any explicit manner. There exist however a class of models, called quantum integrable models, where the situation is much better : some of the correlation functions are given by explicit formulae. The analysis of these models then allows one to better understand the more complex one. For instance, the study of quantum integrable models corresponding to a quantum field theory in 1+1 dimensions would bring invaluable information of the sort.

In 2006, Bytsko and Teschner [BT] have applied the quantum separation of variables method so as to construct in a non-perturbative fashion and solve a model appearing in integrable 1+1 quantum field theory, the N lattice site discretisation of the Sinh-Gordon model in finite volume R . The analysis of [BT] allows one to express some of the elementary correlation functions of this model, the so-called form factors, in terms of N -fold integrals. These form factors correspond to elementary correlation functions of the model in that they allow one to compute all the more complex correlators. Many interesting form factors of this model can be expressed in terms of a N -fold integral over $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ taking the form :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \prod_{a < b}^N \left\{ \sinh [\omega_1(\lambda_a - \lambda_b)] \sinh [\omega_2(\lambda_a - \lambda_b)] \right\} \cdot \prod_{a=1}^N \left\{ e^{-V(\lambda_a)} \right\} \cdot d^N \lambda .$$

ω_1, ω_2 are related to the model's coupling constants while the "confining potential" V contains all the information on the type form factor that is considered. Finally, the number of integrations N corresponds to the number of sites of the discretisation.

One should bare in mind that the central question in physics is to be able to grasp the structure of the correlators in the continuous model, and not the lattice discretised one. This amounts to studying the $N \rightarrow +\infty$ limit of the model's form factors. Until now, for the discussed model, various expressions for the form factors, directly in the continuum and finite volume R were conjectured by Lukyanov [L], Negro-Smirnov [NS] , LeClair-Mussardo [LM]. It is conceptually important to test these conjectures and to understand how such results may surface starting from the lattice discretised model, which is the sole to be mathematically well defined.

This PhD research project aims at attacking these questions. Thus, the main goal of the PhD will consist in obtaining the large- N behaviour of the above class of multiple integrals which is precisely an integrable 1+1 quantum field theory. The setting up of the method allowing one to do so would consist, in itself, a important progress in mathematics allowing one to analyse many new models of random variables in strong interaction, generalising the famous Coulomb

gases. In particular, the technique would be applicable to many other instances of multiple integrals of interest to physics, in particular those arising in the context of quantum integrable models solvable through the quantum separation of variables.

References

- [BT] A.G. Bytsko and J. Teschner, "Quantization of models with non-compact quantum group symmetry. Modular XXZ magnet and lattice sinh-Gordon model.", *J. Phys. A* 39 (2006), 1292712982.
- [LM] A. LeClair and G. Mussardo, "Finite temperature correlation functions in integrable QFT.", *Nucl. Phys. B* 552 (1999), 624642.
- [L] S. Lukyanov, "Finite temperature expectation values of local fields in the sinh-Gordon model.", *Nucl. Phys. B* 612 (2001), 391412.
- [NS] S. Negro and F.A. Smirnov, "On one-point functions for sinh-Gordon model at finite temperature.", *Nucl. Phys. B* 875 (2013), 166185.

Projet scientifique

Les intégrales multiples sont des outils très puissants permettant de caractériser une panoplie de quantités intervenant en physique théorique (fonctions de partitions en physique statistique, fonctions de corrélations dans les modèles intégrables quantiques, etc) ou en mathématiques (modèles de matrices aléatoires, calcul de quantités combinatoires, etc). Très souvent, la nature du problème mathématique ou physique demande d'extraire le comportement à grand N d'intégrales multiples portant sur N variables. C'est l'objet de la théorie des grandes déviations de donner un cadre théorique pour effectuer une telle analyse. Cependant, cette théorie ne s'applique pas aux modèles de variables en interaction forte, comme dans le cas des valeurs propres de grandes matrices gaussiennes ou les célèbres modèles de gaz de Coulomb. De nouvelles techniques ont émergées récemment pour analyser ces modèles, par exemple dans les travaux de Borot, Kozłowski et Guionnet ou Leblé et Serfaty. Ces méthodes, bien qu'ayant déjà conduit à des résultats importants, n'en sont qu'à leurs débuts : le calcul du comportement à grand N de nombreuses classes intéressantes d'intégrales de N -uplets reste encore hors de leur portée.

Les fonctions de corrélations sont des objets de prime intérêt pour la physique d'un modèle dans la mesure où elles sont directement mesurables expérimentalement. Ce sont aussi les objets les plus difficiles à caractériser : pour la plupart des modèles il n'y a aucun espoir de pouvoir les décrire de manière explicite. Il existe cependant une classe de modèles, appelés modèles intégrables quantiques, où la situation est bien meilleure ; certaines fonctions de corrélations y sont explicites. L'analyse de ces modèles permet également de mieux comprendre les autres. L'étude des modèles intégrables quantiques qui correspondent à une théorie quantique des champs en 1+1 dimensions apporterait ainsi des informations inestimables.

En 2006, Bytsko et Teschner [BT] ont appliqué la méthode de la séparation des variables quantiques pour construire de manière non-perturbative et résoudre un modèle intervenant en théorie quantique des champs intégrable en 1+1 dimensions, le modèle de Sinh-Gordon en volume fini R et sur réseau à N sites. L'analyse de [BT] permet d'exprimer les fonctions de corrélations élémentaires, appelées facteurs de forme, comme des intégrales explicites sur N variables. Ces facteurs de formes correspondent à des fonctions de corrélations "élémentaires" du modèle dans la mesure où ils permettent, par la suite, de calculer toutes les autres fonctions de corrélations plus complexes. Un bon nombre de facteurs de forme de ce modèle peut s'écrire en terme d'une intégrale N -uple portant sur les variables $\lambda_1, \dots, \lambda_N$:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \prod_{a < b}^N \left\{ \sinh [\omega_1(\lambda_a - \lambda_b)] \sinh [\omega_2(\lambda_a - \lambda_b)] \right\} \cdot \prod_{a=1}^N \left\{ e^{-V(\lambda_a)} \right\} \cdot d^N \lambda .$$

ω_1, ω_2 sont reliées aux constantes de couplage du modèle et le "potentiel confinant" V dépend du type de facteur de forme considéré. Enfin, le nombre d'intégrations N correspond au nombre de sites de la discrétisation.

La question centrale en physique est d'obtenir les corrélateurs de la théorie dans le continu et non sur réseau, ce qui revient à étudier le comportement à $N \rightarrow +\infty$ de ses facteurs de forme. Jusqu'à présent, pour le modèle en question, diverses expressions pour les facteurs de forme, directement dans le continu et en volume fini R , furent conjecturées par Lukyanov [L], Negro-Smirnov [NS] , LeClair-Mussardo [LM]. Il est conceptuellement important de pouvoir tester ces conjectures et de comprendre comment de tels résultats peuvent resurgir à partir du modèle discrétisé, mathématiquement bien défini.

Cette thèse propose de s'attaquer à ces questions. Il s'agira d'obtenir le comportement à grand N des facteurs de forme dans la discrétisation sur réseau du modèle de Sinh-Gordon quantique. Sur le plan mathématique cela demandera d'extraire le comportement asymptotique à grand nombre de variables d'intégration de la classe d'intégrales multiples donnée ci-dessus. La mise au point d'une méthode d'analyse asymptotique adaptée à ce problème constituerait, en soi, une avancée importante en mathématiques permettant d'analyser de nouveaux modèles

de variables aléatoires en interaction forte, généralisant les célèbres modèles de Coulomb. En particulier, cette technique serait applicable à toute une panoplie d'autres exemples d'intégrales multiples d'intérêt pour la physique, notamment celles apparaissant dans d'autres modèles intégrables solubles par la séparation des variables quantiques.

Références

- [BT] A.G. Bytsko and J. Teschner, "Quantization of models with non-compact quantum group symmetry. Modular XXZ magnet and lattice sinh-Gordon model.", *J. Phys. A* 39 (2006), 1292712982.
- [LM] A. LeClair and G. Mussardo, "Finite temperature correlation functions in integrable QFT.", *Nucl. Phys. B* 552 (1999), 624642.
- [L] S. Lukyanov, "Finite temperature expectation values of local fields in the sinh-Gordon model.", *Nucl. Phys. B* 612 (2001), 391412.
- [NS] S. Negro and F.A. Smirnov, "On one-point functions for sinh-Gordon model at finite temperature.", *Nucl. Phys. B* 875 (2013), 166185.