

Master MAIM 2ème année Recherche

Proposition de parcours

Titre : *"Analyse fonctionnelle et numérique. Applications à la mécanique et à l'imagerie."*

- Cours I.** *"Espaces de Sobolev. Equations elliptiques"*
enseignant : Petru Mironescu
- Cours II.** *"Analyse et mécanique des fluides"*
enseignant : Dragoş Iftimie
- Cours III.** *"Méthodes d'éléments finis pour les problèmes d'équations aux dérivées partielles sous contraintes"*
enseignants : Jérôme Pousin et Yves Renard
- Cours IV.** *"Méthodes numériques pour les EDP"*
enseignant : Daniel Le Roux
- Cours V.** *"Espace des fonctions à variation bornée et applications"*
enseignant : Simon Masnou

L'objectif de ce parcours est multiple :

1. Introduire des espaces fonctionnels fondamentaux pour l'étude des équations aux dérivées partielles et le calcul des variations : espaces de Sobolev, espaces de Lorentz, espace des fonctions à variation bornée ;
2. Montrer leur utilisation pour l'étude des équations elliptiques, pour l'analyse fine des équations d'Euler et de Navier-Stokes, pour l'étude des minimiseurs de certaines fonctionnelles, ou pour la formulation rigoureuse de certaines approches de résolution numérique approchée d'équations aux dérivées partielles.
3. Analyser plus particulièrement différentes méthodes numériques : les méthodes mixtes et de Galerkin discontinu d'une part, les méthodes d'éléments finis pour la résolution d'équations aux dérivées partielles linéaires sous contraintes convexes d'autre part.

Ce parcours balaie un spectre assez large de problèmes théoriques et numériques rencontrés en mathématiques appliquées. Certaines applications seront explicitement étudiées, notamment en mécanique des fluides, mécanique du contact, optimisation de forme et traitement des images.

Responsable du parcours : Simon Masnou, Institut Camille Jordan
masnou@math.univ-lyon1.fr

Cours I – Espaces de Sobolev. Equations elliptiques

Semestre : premier

Enseignant : Petru Mironescu, Institut Camille Jordan (mironescu@math.univ-lyon1.fr, <http://math.univ-lyon1.fr/~mironescu/>)

Prérequis : Analyse réelle et fonctionnelle niveau L3-M1. Il y aura une séance de remise à niveau en analyse

Résumé : Le cours aborde la théorie classique de la régularité elliptique, théorie illustrée dans le cas modèle de l'équation de Laplace. En bref, nous allons montrer que, si u est solution de l'équation $\Delta u = f$, alors u gagne deux dérivées par rapport à f . Typiquement : si $f \in L^3$, alors les dérivées de u d'ordre 0, 1 et 2 sont dans L^3 .

Programme

I. Espaces de Sobolev

1. Dérivées généralisées
2. Injections de Sobolev. Opérateurs de superposition. Règle de la chaîne
3. Inégalités d'interpolation. Inclusions de Sobolev sous optimales
4. Intégration par parties et autres formules intégrales
5. Théorie des traces

II. Intégrales singulières

III. Théories de régularité elliptique

1. Théorie L^p
2. Théorie C^α
3. Théorie de De Giorgi-Nash-Moser

IV. Introduction à la théorie des équations elliptiques semilinéaires

1. Identité de Pohozaev et applications
2. Théorème de Krasnoselski'i
3. Méthodes de monotonie
4. Méthodes topologiques pour l'existence des points critiques

Cours II – Analyse et mécanique des fluides

Semestre : premier

Enseignant : Dragoş Iftimie, Institut Camille Jordan (dragos.iftimie@univ-lyon1.fr, <http://math.univ-lyon1.fr/iftimie>)

Pré-requis : Une bonne connaissance de la transformation de Fourier et des distributions tempérées.

Résumé : On fait appel à un certain nombre de résultats d'analyse harmonique pour démontrer des théorèmes d'existence et d'unicité de solutions pour les équations de Navier-Stokes et d'Euler. Une partie importante du cours est consacrée à la preuve de ces résultats d'analyse harmonique qui ne demandent aucun pré-requis autre que la transformation de Fourier et les distributions tempérées.

Programme

- I. Quelques éléments d'analyse harmonique.
 1. Interpolation réelle.
 2. Espaces de Lorentz et propriétés.
- II. Applications aux équations de Navier-Stokes.
 1. Solutions mild dans $L^{3,\infty}$.
 2. Solutions stationnaires dans $L^p \cap L^{3,\infty}$.
 3. Stabilité asymptotique des solutions stationnaires.
 4. Remarques sur les solutions d'énergie finie.
- III. Applications aux équations d'Euler. Existence de solutions faibles et théorème d'unicité de Yudovich.

Cours III – Méthodes d'éléments finis pour les problèmes d'équations aux dérivées partielles sous contraintes

Semestre : second

Enseignants : Jérôme Pousin (Institut Camille Jordan et INSA de Lyon, Jerome.Pousin@insa-lyon.fr), Yves Renard (Institut Camille Jordan et INSA de Lyon, Yves.Renard@insa-lyon.fr).

Résumé : L'objectif du cours est d'introduire et d'analyser des techniques numériques de résolution de certaines équations aux dérivées partielles sous contraintes. Ces équations interviennent dans de nombreux domaines d'application, que ce soit en imagerie, en ingénierie mécanique où en ingénierie financière, par exemple. On se limitera dans ce cours à l'étude des problèmes linéaires sous contraintes convexes. Après avoir introduit les notions d'analyse convexe nécessaires, nous nous attarderons sur les inéquations variationnelles avant d'en voir les approximations numériques par éléments finis ainsi que l'analyse d'erreur correspondante.

Programme

1. Optimisation sous contraintes et inéquations variationnelles.
2. Lagrangiens et Lagrangiens augmentés.
3. Approximation numérique par éléments finis des E.D.P. sous contraintes. Analyse d'erreur *a priori*.
4. Application à la mécanique du contact avec frottement.
5. Application à l'imagerie.

Cours IV : Méthodes numériques pour les EDP

Semestre : second

Enseignant : Daniel Le Roux, Institut Camille Jordan (dleroux@math.univ-lyon1.fr)

Résumé : Ce cours vise dans un premier temps à étudier les problèmes inhérents à l'approximation des méthodes mixtes, en particulier la condition de stabilité infsup ou condition LBB. Ce problème crucial est plus spécifique à la méthode des éléments finis qu'aux méthodes de volumes finis et de Galerkin discontinu. Il concerne cependant un très grand nombre de problèmes s'écrivant sous forme mixte.

Dans la deuxième partie de ce cours nous étudierons la méthode de Galerkin discontinu. Là encore le concept de stabilité est crucial. Il n'est plus basé, comme en éléments finis, sur une condition de stabilité de type infsup, mais sur le choix du terme de trace numérique. Le concept de la méthode de Galerkin discontinu remonte aux années 70 mais les développements théoriques ne sont apparus que peu à peu, depuis les années 90, au fur et à mesure que cette méthode était appliquée à différents types d'équations : hyperboliques, paraboliques, elliptiques.

Programme

I. Méthodes d'éléments finis mixtes

1. Espaces fonctionnels et formulation variationnelle
2. Approximation des problèmes point-selle
3. Vérification de la condition inf-sup ou LBB
4. Compléments pour les méthodes elliptiques

II. Méthodes de Galerkin discontinu

1. Problèmes linéaires et non linéaires, compressibles et incompressibles
2. Equations de haut ordre
3. Propriétés spectrales des opérateurs DG

Bibliographie

Elle sera accompagnée de notes de l'enseignant et de différents documents.

1. Brezzi F, Fortin M. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1991, **15**.
2. Arnold DN, Brezzi F, Cockburn B, Marini LD. Unied analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2002, 39 : 1749-1779.
3. Cockburn B, Karniadakis E, Shu CW, editors. Discontinuous Galerkin Methods - Theory, Computation and Applications. *Lectures Notes in Computational Science and Engineering*, Springer, Berlin, 2000 ; 11.

Cours V : Espace des fonctions à variation bornée et applications

Semestre : second

Enseignant : Simon Masnou, Institut Camille Jordan (masnou@math.univ-lyon1.fr)

Résumé : Il s'agit d'une introduction à l'espace des fonctions à variation bornée et aux ensembles de périmètre fini. Les définitions théoriques s'appuieront sur de nombreux exemples illustrant les particularités de ces notions. Leur utilité sera étudiée au travers de quatre applications, en optimisation de forme d'une part et en traitement des images d'autre part, qui permettront de faire également une brève introduction à la méthode directe du calcul des variations et à la Γ -convergence.

Pré-requis : Analyse réelle et fonctionnelle niveau L3-M1, en particulier la théorie de l'intégration et les espaces L^p . Espaces de Sobolev (cf Cours I du parcours).

Programme

1. Mesures et dimension de Hausdorff, ensembles de Cantor
2. Rectifiabilité
3. Espace BV (définition, représentation, notions de convergence, semi-continuité de la variation totale, compacité, approximation, formule de la coaire, inégalité de Poincaré, sauts, trace, extension, décomposition de la dérivée)
4. Ensembles de périmètre fini (définition, frontière réduite, théorème de structure, théorème de Gauss-Green, inégalités isopérimétriques)
5. Espace SBV (motivation, compacité)
6. Cas particulier des fonctions BV de la variable réelle
7. **Applications** :
 - (a) Modèle de Cahn-Hilliard pour les transitions de phase. Problème du profil optimal. Approximation par Gamma-convergence
 - (b) Surfaces minimales non paramétriques et surfaces à courbure moyenne prescrite. Existence de minimiseurs et remarques sur la régularité
 - (c) Débruitage d'images : modèle de Rudin-Osher-Fatemi. Motivations, existence de minimiseurs. Réduction aux ensembles de niveau et conséquences numériques.
 - (d) Segmentation d'images : modèle de Mumford-Shah. Minimisation et remarques sur l'approximation.