

---

**DOMAINES GLOBALEMENT HYPERBOLIQUES  
DE L'ESPACE DE MINKOWSKI ET  
DE L'ESPACE ANTI-DE SITTER**

*par*

Thierry Barbot\*

---

**Résumé.** — Nous introduisons les notions de causalité dans les variétés lorentziennes dans le contexte particulier de l'espace de Minkowski et de l'espace anti-de Sitter. Nous montrons que le développement de tout fermé achronal sans bord de l'espace de Minkowski est un ouvert convexe - plus précisément, il s'agit d'intersections de demi-espaces bordés par des hyperplans affines de type lumière. Nous établissons le résultat analogue dans l'espace anti-de Sitter.

**Table des matières**

Introduction .....	1
1. Géométrie causale de l'espace de Minkowski .....	2
2. Géométrie de l'espace anti-de Sitter .....	20
3. Appendice : convexes de $\mathbb{S}^{n+1}$ .....	35
Références .....	38

**Introduction**

Le premier objectif de ce texte est de proposer une initiation aux propriétés de causalité. On introduit les diverses notions (courbes causales, achronalité, acausalité, développement de Cauchy) et établissons quelques propriétés remarquables fondamentales aussi bien dans l'espace de Minkowski que dans l'espace anti-de Sitter. Nous introduisons au passage l'univers d'Einstein et illustrons sa pertinence de ce type de question. Pour approfondir le thème abordé ici dans un cadre plus large, non restreint à l'espace de Minkowski et anti-de Sitter, voir [4].

Le contenu est élémentaire et accessible à une large audience. Il y a très peu de pré-requis, et qui sont tous de toute manière recouverts par les autres contributions

à cet ouvrage collectif. Ceci ne nous empêche pas de montrer ici un résultat original : le développement de Cauchy de tout fermé achronal de l'espace de Minkowski est convexe. Plus précisément il est intersection de demi-espaces bordés par des hyperplans affines de type lumière (cf. théorème 1.5.1). Il existe dans la littérature récente plusieurs preuves de versions affaiblies de ce théorème, essentiellement dans le cas où le fermé achronal est supposé de plus acausal, différentiable, et de sorte que la métrique riemannienne induite soit complète. C'est à notre connaissance la première fois que ce type de résultat est établi dans ce degré de généralité. Nous montrons aussi un résultat analogue, avec le même degré de généralité inédit, pour les fermés achronaux de l'espace-anti de Sitter (théorème 2.6.1).

## 1. Géométrie causale de l'espace de Minkowski

**1.1. Rappels sur la géométrie euclidienne.** — L'espace euclidien de dimension  $n$  est l'espace affine  $\mathbb{R}^n$  muni de la forme quadratique  $Q_n = x_1^2 + \dots + x_n^2$ . Tout vecteur tangent peut être vu comme un élément  $v$  de l'espace vectoriel sous-jacent sur lequel on peut évaluer  $Q_n$ ; on définit alors la norme  $\|v\|_0$  comme étant la racine carrée de  $Q_n(v)$ . La longueur d'une courbe  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  par morceaux comme étant l'intégrale :

$$L(c) = \int_a^b \|c'(t)\|_0 dt$$

On peut en fait calculer la longueur de toute courbe absolument continue (on dit aussi rectifiable) i.e. pour laquelle la dérivée  $c'(t)$  est presque partout définie, telle que l'intégrale ci-dessus soit finie et telle que  $c(b) - c(a) = \int_a^b c'(t) dt$ . La distance  $d_{euc}(x, y)$  entre deux points  $x$  et  $y$  de  $\mathbb{R}^n$  est la borne inférieure de la longueur des chemins rectifiables joignant  $x$  à  $y$ .

*1.1.1. Géodésiques en tant que courbes minimisant la longueur.* — Il est bien connu que la distance  $d_{euc}(x, y)$  est finie et réalisée par la "ligne droite"  $t \rightarrow x + t(y - x)$  (avec  $t$  variant dans  $[0, 1]$ ), et vaut donc  $\|y - x\|_0$ . C'est du reste facile à montrer : tout chemin est de longueur plus grande que sa projection orthogonale sur la ligne droite ! Nous disons que la ligne droite est une *géodésique*.

*1.1.2. Géodésiques de  $\mathbb{R}^n$  en tant que courbes auto-parallèles.* — Une autre remarque est que les géodésiques, i.e. les lignes droites, sont les courbes paramétrées  $c : [a, b] \rightarrow M$  solution de l'équation

$$c''(t) = 0 \quad \forall t \in [a, b]$$

De manière plus élaborée, ceci signifie que le vecteur tangent dérivé  $c'(t)$  est invariant par transport parallèle le long de la courbe. En d'autres termes,  $c$  est une géodésique pour la connexion de Levi-Civita associée à la métrique euclidienne, qui n'est autre que la connexion plate de l'espace affine plat  $\mathbb{R}^n$ .

1.1.3. *Géodésiques en tant que courbes minimisant l'énergie.* — Une troisième définition des géodésiques est la suivante : ce sont les courbes paramétrées qui minimisent l'énergie  $E$ , définie par :

$$(1) \quad E(c) = \int_a^b \|c'(t)\|_0^2 dt$$

Ainsi, la ligne droite  $c_0(t) = x + \frac{t-a}{b-a}(y-x)$  est la seule courbe qui minimise l'énergie parmi les courbes rectifiables  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  joignant  $x$  à  $y$ .

**1.2. L'espace de Minkowski.** — L'espace de Minkowski de dimension  $n+1$ , noté  $\mathbb{R}^{1,n}$ , est l'espace affine  $\mathbb{R}^{n+1}$ , de coordonnées  $(t, x_1, \dots, x_n)$ , muni de la forme quadratique  $Q_{1,n} = -t^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$ . Plus précisément, on le pense comme *variété lorentzienne*, ce qui signifie qu'on le considère comme muni de la *métrique lorentzienne*  $-dt^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2$ . Nous allons prendre l'habitude de noter  $p = (t, x)$  avec  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Tout vecteur tangent se décompose sous la forme  $v = (\tau, u)$  où  $\tau$  est la composante en  $t$  et  $u \in \mathbb{R}^n$  la composante en  $x$ . La "norme" de  $v$  est alors :

$$Q_{1,n}(v) := \|v\|^2 = \|u\|_0^2 - \tau^2$$

où  $\|u\|_0^2$  dénote la norme euclidienne  $Q_n(u)$ .

À la forme quadratique  $Q_{1,n}$  est associée une forme bilinéaire symétrique que nous appelons *produit scalaire* (nous préciserons "produit scalaire lorentzien" en cas d'ambiguïté) et notons  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ . Nous noterons aussi  $\langle \cdot | \cdot \rangle_0$  le produit scalaire (euclidien) sur  $\mathbb{R}^n$ , de sorte que :

$$\langle (t, u) | (t', u') \rangle = -tt' + \langle u | u' \rangle_0$$

Une parenthèse : nous appelons ici  $Q_{1,n}(v) = \|v\|^2$  la *norme* de  $v$ . Attention : cette terminologie diffère de celle utilisée dans le cadre euclidien : transposée telle quelle dans le contexte riemanien elle aboutit au carré de la norme usuelle. La notation  $\|v\|^2$ , provenant de l'analogie avec le cas euclidien qu'on souhaite maintenir autant que possible, est trompeuse : en effet, cette quantité peut fort bien être négative ! C'est ce qui se produit si la composante  $u$  est de norme plus petite que la valeur absolue de  $\tau$ .

La connexion plate de l'espace affine  $\mathbb{R}^{n+1}$  est compatible avec la métrique de Minkowski : elle est sans torsion et son transport parallèle préserve la norme des vecteurs. C'est donc la connexion de Levi-Civita de la métrique. Les géodésiques - au sens de courbes auto-parallèles - sont toujours les lignes droites  $t \rightarrow p + t(q-p)$ .

Mais on ne peut plus définir les géodésiques comme étant celles qui minimisent la longueur, et ce, pour plusieurs raisons. La première est tout simplement parce qu'on ne peut définir la longueur, car la "norme" des vecteurs tangents peut être négative, ce qui interdit de considérer leur racine carrée.

On peut songer contourner cette difficulté en prenant la racine carrée de la valeur absolue de  $Q_{1,n}(c'(t))$ , mais la notion de "longueur" ainsi obtenue est très mauvaise : en effet, on peut toujours relier deux points quelconques par une courbe de "longueur" nulle !

Il est déjà meilleur de considérer plutôt la notion d'énergie : la formule (1) reste sensée.

De fait, il est facile de voir que les lignes droites sont bien les *points critiques* de la fonctionnelle énergie. Mais il est erroné de penser qu'elles minimisent (ou maximisent) l'énergie.

En effet, décomposons toute courbe  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{1,n}$  en sa composante "horizontale" (ou "spatiale")  $c_h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  et sa composante "verticale" (ou "temporelle")  $c_v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Il est alors clair que l'énergie de  $c$  est :

$$E(c) = E(c_h) - E(c_v)$$

Ainsi, il apparait clairement que pour toute paire de points  $p \neq q$ , la borne inférieure (respectivement supérieure) de l'énergie des courbes reliant  $p$  à  $q$  est  $-\infty$  (respectivement  $+\infty$ ). Il semble donc bien désespéré d'envisager les géodésiques comme étant les courbes minimisant ou maximisant une fonctionnelle.

Or, ceci peut bien se produire, mais il faut pour cela se restreindre à une classe particulière de courbes !

#### 1.2.1. Courbes causales. —

**Définition 1.2.1.** — *Un vecteur de norme strictement négative est dit de type temps, ou plus simplement temporel. Un vecteur de norme strictement positive est dit de type espace, ou spatial. Un vecteur non-nul de norme nulle est dit de type lumière, nul ou isotrope. Enfin, un vecteur non-nul de type temps ou lumière est dit (de type) causal.*

**Définition 1.2.2.** — *Une courbe immergée de classe  $C^1$  est dite de type temps ou temporelle (respectivement spatiale, lumière, causale) si tous ses vecteurs tangents sont de type temps (respectivement espace, lumière ou causal).*

**Définition 1.2.3.** — *Le temps propre d'une courbe causale  $c : [a, b] \rightarrow M$  est l'intégrale sur  $[a, b]$  de la racine carrée de l'opposé de la norme du vecteur tangent  $c'(t)$ .*

On peut remarquer que, comme la longueur d'une courbe calculée selon une métrique riemannienne ambiante, le temps propre d'une courbe causale ne dépend pas de son paramétrage.

**Proposition 1.2.4.** — *Soit  $p, q$  deux points de  $\mathbb{R}^{1,n}$ . On suppose que le vecteur différence  $q - p$  est temporel. Alors, parmi les courbes causales de classe  $C^1$  reliant  $p$  à  $q$ , la ligne droite géodésique  $t \rightarrow p + t(q - p)$  est celle qui maximise le temps propre.*

**Preuve** Pour simplifier, nous supposons que  $p$  est le point de coordonnées toutes nulles, et que  $q = (t_0, 0)$  avec  $t_0 > 0$ . Il n'est pas difficile de voir qu'on peut toujours se ramener à ce cas en changeant le système de coordonnées.

Soit  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{1,n}$  une courbe causale reliant  $p$  à  $q$  : elle s'écrit  $c(s) = (c_v(s), c_h(s))$ . Les vecteurs tangents à la courbe vérifient :

$$-c'_v(s)^2 + \|c'_h(s)\|_0^2 \leq 0$$

ce qui implique que pour tout  $s$ , la composante verticale  $c'_v(s)$  est non-nulle : elle est donc de signe constant. Comme  $c_v(a) = 0 < t_0 = c_v(b)$ , ce signe doit être strictement positif. Donc,  $s \rightarrow c_v(s)$  est un difféomorphisme croissant. On peut changer le paramétrage de sorte que  $c_v(s) = s$ , ce qui permet de décrire la courbe causale sous la forme  $c(s) = (s, c_h(s))$ . Le temps propre de  $c$  est l'intégrale :

$$\int_0^{t_0} \sqrt{1 - c'_h(s)^2} ds$$

qui est bien maximale lorsque  $c'_h(s) = 0$ , i.e. lorsque  $c$  est une ligne droite !

■

On retrouve donc une situation analogue à celle du cas riemannien : les géodésiques causales sont celles qui maximisent le temps propre. Mais apparaît maintenant un phénomène nouveau : on ne peut pas toujours joindre deux points de  $\mathbb{R}^n$  par une courbe causale !

**Remarque 1.2.5.** — La proposition 1.2.4 est complètement fautive si on élargit la définition de courbe causale en incluant les courbes rectifiables dont les vecteurs tangents sont presque tous de type temps. En effet, on peut trouver des courbes  $C^1$  par morceaux zigzagant, dont la coordonnée  $c_v$  croît puis décroît avec  $s$ , et de temps propre arbitrairement grand.

*1.2.2. Orientation temporelle.* — Lors de la preuve de la Proposition 1.2.4, nous avons vu que les courbes causales (de classe  $C^1$ ) se divisent en deux catégories : celles pour lesquelles la composante verticale  $c_v$  croît avec le paramètre, et celles pour lesquelles cette composante décroît. Nous avons de plus observé dans la remarque 1.2.5 qu'il s'agit là d'un point important.

**Définition 1.2.6.** — Un vecteur tangent  $v = (\tau, u)$  à  $\mathbb{R}^{1,n}$  de type causal est dit orienté vers le futur, ou encore futur si sa composante  $\tau$  est strictement positive. Sinon, on dit que  $v$  est orienté vers le passé, ou passé.

Cette définition telle quelle semble dépendre du choix du système de coordonnées. Il n'en est rien ! Une autre manière d'introduire cette notion est la suivante : l'espace des vecteurs causaux tangents à  $\mathbb{R}^n$  admet deux composantes connexes, et deux vecteurs causaux sont dans la même composante connexe si et seulement si leur produit scalaire est strictement négatif.

En d'autres termes, la relation "être dans la même composante connexe", i.e. "avoir la même orientation temporelle" s'exprime aisément sans recourir à un choix particulier de coordonnées. On fixe alors une orientation temporelle, i.e. un choix de composante simplement en choisissant un vecteur causal et en le décrétant orienté vers le futur. La définition 1.2.6 revient à décider que le vecteur  $(1, 0, \dots, 0)$  est futur.

Une fois fixée une orientation chronologique :

**Définition 1.2.7.** — Une courbe causale  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{1,n}$  de classe  $C^1$  est dite orientée vers le futur (resp. vers le passé) si tous ses vecteurs tangents sont orientés vers le futur (resp. vers le passé).

On simplifie là encore la terminologie en parlant de courbes causales futur ou passé.

Remarquons que toute courbe causale est chronologiquement orientée, soit vers le futur, soit vers le passé. On peut ainsi distinguer parmi les deux extrémités d'une courbe causale celle qui est *future* de celle qui est *passée*.

1.2.3. *Futur, passé.* — Une fois prescrite l'orientation temporelle on peut introduire les notions de futur et passé :

**Définition 1.2.8.** — *Le futur strict  $I^+(A)$  d'une partie  $A$  de  $\mathbb{R}^{1,n}$  est l'ouvert formé des extrémités futures de courbes temporelles futures non triviales issues d'un point de  $A$ .*

**Définition 1.2.9.** — *Le futur causal  $J^+(A)$  d'une partie  $A$  de  $\mathbb{R}^{1,n}$  est l'ensemble des points extrémités futures de courbes causales futur issues de points de  $A$  (y compris les courbes triviales réduites à un seul point).*

On définit de manière complètement similaire les *passés*  $I^-(A)$ ,  $J^-(A)$  ; ce sont les futurs de  $A$  pour l'orientation chronologique opposée. On peut aussi définir la notion de futur est de passé relatif à un ouvert :

**Définition 1.2.10.** — *Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^{1,n}$ , et  $A$  une partie de  $\mathbb{R}^{1,n}$ . Les futurs  $I_U^+(A)$ ,  $J_U^+(A)$  (resp. passés  $I_U^-(A)$ ,  $J_U^-(A)$ ) de  $A$  relatifs à  $U$  sont les futurs (resp. passés) de  $A \cap U$  pour la restriction de  $g$  à  $U$ , c'est-à-dire extrémités finales de courbes causales ou temporelles issues de  $A$  et contenues dans  $U$ .*

Il doit être clair qu'en général le passé de  $A$  relatif à  $U$  n'est pas l'intersection entre  $U$  et le passé de  $A$  dans  $\mathbb{R}^{1,n}$  !

**Définition 1.2.11.** — *Un ensemble  $A$  est futur-complet (resp. passé-complet) s'il est égal à son propre futur (resp. passé) (ces définitions s'appliquent aussi bien pour les futur-passé stricts que causaux).*

Une autre notion fort utile :

**Définition 1.2.12.** — *Un domaine  $U$  est causalement convexe si toute courbe causale reliant deux points de  $U$  est contenue dans  $U$ . Un sous domaine  $V$  d'un ouvert  $U$  est dit causalement convexe relativement à  $U$  si toute courbe causale contenue dans  $V$  et reliant deux points de  $U$  est contenue dans  $U$ .*

Ces définitions de futur, passé, peuvent à première vue sembler peu aisées à manipuler - comment en pratique décider qu'il existe bien une courbe temporelle ou causale reliant deux points donnés ? Mais ces notions s'avèrent très faciles à comprendre :

**Proposition 1.2.13.** — *Le futur  $I^+(p)$  (respectivement le futur causal  $J^+(p)$ ) d'un point  $p$  est l'ensemble des points  $q$  tels que  $q - p$  est un vecteur causal (respectivement temporel) orienté vers le futur.*

**Preuve** Il doit être clair pour le lecteur que si  $q - p$  est un vecteur causal futur, alors  $q$  appartient au futur causal de  $p$ . L'implication inverse découle de la preuve de 1.2.4.

On peut en fait réinterpréter cette preuve : nous y avons montré en fait que pour tout vecteur causal futur  $v_0$ , la forme linéaire  $p \rightarrow -\langle v_0 | p \rangle$  est strictement croissante le long de toute courbe causale futur. Ainsi, si  $q$  est dans le futur causal de  $p$ , pour

tout vecteur causal futur  $v_0$  le produit scalaire  $\langle v_0|q \rangle$  doit être plus petit que  $\langle v_0|p \rangle$ . Donc, le produit scalaire  $\langle v_0|q - p \rangle$  doit être négatif pour tout vecteur causal futur  $v_0$ , ce qui assure que  $q - p$  ne peut être de type espace.

Nous laissons au lecteur le cas du futur strict  $I^+(p)$ . ■

**Corollaire 1.2.14.** — Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}^{1,n}$ . Alors :

- le futur  $I^+(A)$  est ouvert,
- si  $A$  est fermé, le futur causal  $J^+(A)$  est l'adhérence de  $I^+(A)$ . ■

On peut donc introduire deux relations d'ordre :

**Définition 1.2.15.** — Si  $q$  appartient au futur strict de  $p$ , on note  $p \prec q$ . Si  $q$  appartient au futur causal de  $p$ , on note  $p \preceq q$ .

**Proposition 1.2.16.** — Les relations d'ordre  $\prec$  et  $\preceq$  sont transitives. Mieux : si  $p \prec q$  et  $q \preceq r$ , ou que  $p \preceq q$  et  $q \prec r$ , alors  $p \prec r$ . De plus,  $\preceq$  est réflexive : pour tout  $p$ ,  $p \preceq p$ .

**Preuve** Laissé au lecteur. ■

**Corollaire 1.2.17.** — Si  $q$  appartient au futur causal de  $p$ , mais pas à son futur strict, alors il existe une géodésique lumière reliant  $p$  à  $q$ . ■

1.2.4. *Courbes causales topologiques.* — La définition suivante permet d'étendre la notion de courbe causale tout en évitant les inconvénients de la définition trop naïve discutée à la remarque 1.2.5 :

**Définition 1.2.18.** — Une application continue  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{1,n}$  est une courbe causale (topologique) futur si pour tout temps  $s \leq t$  dans  $[a, b]$  on a  $c(s) \preceq c(t)$ .

Si de plus pour tout  $s < t$  on a  $c(s) \prec c(t)$  on dit que  $c$  est une courbe temporelle futur.

**Exercice 1.2.19.** — Montrer qu'en élargissant ainsi la notion de courbe causale, nous n'avons pas modifié la notion de futur : une courbe causale futur au sens de la définition 1.2.7 est causale futur au sens de 1.2.18, et si une courbe causale topologique future relie  $x$  à  $y$ , alors  $x \preceq y$ .

On peut évidemment définir de manière similaire la notion de courbe causale passé. Désormais, par courbe causale, nous entendons courbe causale topologique au sens de 1.2.18.

**Proposition 1.2.20.** — Soit  $c : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}^{1,n}$  une courbe causale futur. Son image dans  $\mathbb{R}^{1,n}$  est l'image d'une application localement Lipschitz d'un intervalle de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^{1,n}$ .

**Preuve** Montrer d'abord que que la coordonnée  $t$  croît strictement le long de  $c$  et permet donc de reparamétriser  $c$  sous la forme  $t \rightarrow (t, c_h(t))$ . Montrer ensuite qu'être causale futur signifie exactement que  $t \rightarrow c_h(t)$  est une application 1-Lipschitz. ■

Ainsi, à reparamétrage (absolument continu) près, les courbes causales futur sont les graphes d'applications 1-Lipschitz d'un intervalle de  $\mathbb{R}$  dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ . La courbe est temporelle si et seulement si l'application 1-Lipschitz  $c_h$  dont  $c$ 'est le graphe est contractante, i.e. :

$$\forall s < t, \quad d_{\text{euc}}(c_h(s), c_h(t)) < |t - s|$$

Dorénavant, sauf indication du contraire, nous paramétrons chaque courbe causale par sa coordonnée  $t$ .

On se pose maintenant la question : peut-on prolonger une courbe causale donnée ?

**Définition 1.2.21.** — *Un point limite futur (resp. passé) d'une courbe causale futur  $c : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}^{1,n}$  est un point  $p$  tel que pour tout voisinage  $U$  de  $p$  il existe un temps  $t_0$  dans  $]a, b[$  tel que pour tout  $t > t_0$  (resp.  $t < t_0$ ) l'image  $c(t)$  appartient à  $U$ .*

**Définition 1.2.22.** — *Une courbe causale futur  $c : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}^{1,n}$  est dite courbe futur inextensible si elle n'admet pas de point limite futur. Elle est dite courbe passé inextensible si elle n'admet pas de point limite passé.*

*Elle est dite inextensible si elle n'admet ni point limite futur, ni point limite passé.*

**Lemme 1.2.23.** — *On suppose la courbe causale futur  $c : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}^{1,n}$  paramétrée par la coordonnée  $t$  : i.e.  $c(t) = (t, c_h(t))$ . Alors,  $c$  admet un point limite futur (respectivement passé) si et seulement si  $b < +\infty$  (resp.  $a > -\infty$ ).*

*En particulier, les courbes causales inextensibles sont les courbes de la forme  $t \rightarrow (t, c_h(t))$  définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier.*

**Preuve** Découle trivialement du fait que toute application 1-Lipschitz définie sur un ouvert s'étend continûment sur l'adhérence. ■

**Proposition 1.2.24.** — *Toute courbe causale est contenue dans une courbe causale inextensible.*

**Preuve** Elle consiste à montrer que toute application 1-Lipschitz  $c_h : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  s'étend sur  $\mathbb{R}$  tout entier. Or, si  $a$  n'est pas infini, comme  $c_h$  est 1-Lipschitz, elle se prolonge continûment en  $a$  par une valeur  $c_h(a)$ . On pose alors  $c(t) = c_h(a)$  pour  $t \leq a$ . De la même manière, si  $b \neq +\infty$ , on pose  $c(t) = c_h(b)$  pour  $t \geq b$ . Ceci définit comme voulu une courbe causale inextensible étendant  $c$ . ■

**1.2.5. Ensembles achronaux, acausaux.** — Nous avons ci-dessus défini la notion de futur d'un ensemble  $A$ . Souvent, lorsqu'on évalue le futur  $I^+(A)$ , certains points de  $A$  sont superflus puisqu'eux même sont dans le futur d'autres points de  $A$  : si  $p$  est un élément de  $A$  qui est dans le futur d'un élément  $q \neq p$  de  $A$ , alors  $I^+(A) = I^+(A - \{p\})$ .

Il y a des ensembles  $A$  dans lesquels chaque élément est essentiel :

**Définition 1.2.25.** — Un sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{R}^{1,n}$  est achronal (respectivement acausal) s’il n’existe pas de courbe temporelle (respectivement causale) joignant deux points distincts de  $A$ . En d’autres termes, si  $p, q$  sont deux éléments distincts de  $A$ , alors  $q \notin I^+(p)$  (resp.  $q \notin J^+(p)$ ).

Il y a des versions locales :

**Définition 1.2.26.** — Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^{1,n}$ . Un sous-ensemble  $A \subset U$  est achronal relativement à  $U$  si pour tout  $p, q$  dans  $A$  on a  $q \notin I_U^+(p)$ . Il est acausal relativement à  $U$  si pour tout  $p \neq q$  dans  $A$  on a  $q \notin J_U^+(p)$ .

**Définition 1.2.27.** — Un sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{R}^{1,n}$  est localement acausal (resp. localement achronal) si tout point  $x$  de  $A$  admet un voisinage  $U$  dans  $\mathbb{R}^{1,n}$  tel que  $U \cap A$  est acausal (resp. achronal) relativement à  $U$  - en d’autres termes, il n’existe pas dans  $U$  de courbe causale (resp. temporelle) reliant deux points distincts de  $A$ .

**Lemme 1.2.28.** — Soit  $A$  une partie achronale de  $\mathbb{R}^{1,n}$ . Alors, il existe une partie  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  et une application 1-Lipschitz  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $A$  soit le graphe  $G(f)$  de  $f$  :

$$A = G(f) := \{(f(x), x) / x \in \Omega\}$$

**Preuve** Notons  $\pi : \mathbb{R}^{1,n} \rightarrow \mathbb{R}^n$  la projection sur les dernières coordonnées. Soit  $\Omega$  l’image de  $A$  par  $\pi$ . Les fibres de  $\pi$  sont des courbes temporelles : chacune ne rencontre  $A$  qu’en au plus un point : il existe donc une application  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $A$  soit le graphe  $G(f)$ . S’il existe deux éléments  $x$  et  $y$  tels que  $|f(y) - f(x)| > d_{\text{euc}}(x, y)$ , la ligne droite joignant  $(f(x), x)$  à  $(f(y), y)$  est une courbe temporelle joignant deux points distincts de  $A$  ! Cette contradiction montre que  $f$  est 1-Lipschitz. ■

Un autre exemple typique d’ensemble localement acausal est celui d’*hypersurface spatiale plongée*, i.e. l’image d’un plongement propre  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{1,n}$  de classe  $C^1$  tel que pour tout vecteur tangent  $v$  l’image  $df(v)$  est de type espace (indication : par le théorème des fonctions implicites, tout point  $x$  dans l’image de ce plongement admet un voisinage ouvert  $U$  tel que l’intersection entre  $U$  et l’image de  $f$  soit le lieu d’annulation d’une submersion  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Comme l’hypersurface est spatiale, quitte à restreindre  $U$  on peut supposer que pour tout vecteur tangent causal futur  $v$  en un point  $y$  de  $U$  on a  $dh_y(v) > 0$ . Donc  $h$  croît strictement le long des courbes causales futur contenues dans  $U$  : la locale achronalité de l’image de  $f$  s’en suit).

**Définition 1.2.29.** — Une partie  $A$  de  $M$  localement achronale est sans bord si pour tout point  $p$  de  $A$  il existe un voisinage  $U$  de  $p$  tel que :

- $U \cap A$  est achronal relativement à  $U$ ,
- toute courbe causale contenue dans  $U$  reliant un point de  $I_U^-(p)$  à un point de  $I_U^+(p)$  rencontre  $A \cap U$ .

Là encore nous signalons sans donner la preuve “facile” :

**Lemme 1.2.30.** — Toute hypersurface spatiale plongée est sans bord. ■

**Proposition 1.2.31.** — Soit  $A = G(f)$  une partie achronale de  $\mathbb{R}^{1,n}$ . Alors, le domaine de définition  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  si et seulement si  $A$  est sans bord.

**Preuve** Supposons que  $A$  est sans bord. Si  $x$  est un élément de  $\Omega$ , comme  $A$  est sans bord il existe un voisinage  $U$  de  $p = (f(x), x)$  tel que toute courbe causale contenue dans  $U$  reliant un point de  $I_U^-(p)$  à un point de  $I_U^+(p)$  rencontre  $A \cap U$ . On applique cela aux fibres  $\pi^{-1}(y)$  : si  $y$  est suffisamment proche de  $x$ , cette fibre rencontre bien le futur et le passé de  $p$ , et donc aussi  $A$ ; ce qui signifie que  $y$  appartient à  $\Omega$ .

Inversement, supposons  $\Omega$  ouvert. Pour tout  $p = (f(x), x)$  dans  $A$ , soit  $\epsilon$  un nombre positif tel que la boule  $B$  centrée en  $x$  et de rayon  $\epsilon$  soit contenue dans  $\Omega$ . Considérons le voisinage ouvert  $U = ]-\epsilon/2, \epsilon/2[ \times B$  de  $p$ . Soient  $(t^+, x^+)$ ,  $(t^-, x^-)$  deux points dans respectivement  $I_U^+(p)$ ,  $I_U^-(p)$ , et  $t \mapsto (t, x(t))$  une courbe causale reliant ces deux points. Comme  $t \mapsto x(t)$  est 1-Lipschitz et que  $t$  varie dans  $]t^-, t^+[ \subset ]-\epsilon/2, \epsilon/2[$  chaque  $x(t)$  est à distance au plus  $\epsilon/2$  de  $x^+$  ou de  $x^-$ , et donc à distance au plus  $\epsilon$  de  $x$  : il appartient à  $B$ . On peut donc considérer l'application  $t \mapsto f(x(t)) - t$ . Cette application est continue, positive en  $t^-$  et négative en  $t^+$ . Elle s'annule donc quelque part, ce qui signifie que la courbe causale rencontre bien  $A$ . ■

**Corollaire 1.2.32.** — Toute partie fermée, achronale et sans bord de  $\mathbb{R}^{1,n}$  est le graphe d'une application 1-Lipschitz  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Preuve** L'application 1-Lipschitz  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  s'étend de manière unique à l'adhérence. Soit  $x$  un point de cette adhérence :  $(f(x), x)$  appartient à l'adhérence de  $G(f)$ . Comme par hypothèse  $G(f)$  est fermé,  $x$  appartient en fait à  $\Omega$ , qui est donc un ouvert fermé du connexe  $\mathbb{R}^n$ . ■

**Remarque 1.2.33.** — D'après le théorème de Rademacher,  $f$  est presque partout différentiable. Là où cette différentielle est définie, la norme des vecteurs tangents images est positive ou nulle.

**Exercice 1.2.34.** — Montrer que  $A = G(f)$  est acausal si et seulement si  $f$  est contractante, i.e. :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, |f(y) - f(x)| < d_{\text{euc}}(x, y)$$

**Exercice 1.2.35.** — Montrer la version locale suivante :

**Lemme 1.2.36.** — Soit  $A$  une partie localement achronale sans bord de  $\mathbb{R}^{1,n}$ . Alors,  $A$  est l'image d'un plongement topologique Lipschitz d'une variété topologique  $\Sigma$  de dimension  $n$ . ■

Ainsi, de même que nous avons étendu la définition de courbe causale de classe  $C^1$  en une version topologique non-différentiable, la notion de partie localement achronale sans bord généralise celle d'hypersurface plongée spatiale. Ceci nous autorise à adopter la convention suivante :

**Définition 1.2.37.** — Une hypersurface topologique de type espace est une partie localement acausale sans bord. Une hypersurface topologique nul part temporelle est une partie localement achronale sans bord.

**Exercice 1.2.38.** — Est-il vrai que toute partie  $A$  de  $\mathbb{R}^{1,n}$  contient un sous-ensemble  $A'$  achronal tel que  $I^+(A) = I^+(A')$  ?

**1.3. Du localement achronal à l'achronal.** — Il y a une différentielle essentielle entre la notion de locale achronalité et celle d'achronalité : la locale achronalité n'interdit que les “petites” courbes temporelles reliant deux points de l'ensemble, mais n'exclut pas que de plus longues courbes temporelles le fassent. Cependant, nous allons voir ici quelques circonstances permettant d'assurer qu'une partie localement achronale soit achronale :

1.3.1. *Fermés achronaux.* —

**Proposition 1.3.1.** — *Toute partie localement achronale sans bord de  $\mathbb{R}^{1,n}$  qui est de plus fermée et connexe est le graphe d'une application 1-Lipschitz  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Elle est en particulier achronale.*

**Preuve** Soit  $A$  un fermé localement achronal sans bord. Soit  $p : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  la restriction de  $\pi$  à  $A$ . D'après le lemme 1.2.36 cette application est un homéomorphisme local : tout point de  $A$  admet un voisinage  $U$  tel que la restriction de  $p$  à  $U$  est injective.

Le principe de la preuve consiste à montrer que  $p$  est un *revêtement*, i.e. a la propriété de relèvement des chemins (voir par exemple [6]). Ceci amène bien à la conclusion puisque  $\mathbb{R}^n$  est simplement connexe.

Comme il n'est pas interdit de penser ici que les lecteurs/auditeurs ignorent la notion de revêtement, nous essayons de la contourner. Commençons par montrer la surjectivité de  $p$  : fixons un point  $p_0 = (t_0, x_0)$  dans  $A$ , et soit  $y$  un point quelconque de  $\mathbb{R}^n$ . On veut montrer que  $y$  appartient à  $\Omega = \pi(A)$ .

On note  $\Delta$  l'unique droite affine contenant  $x_0, y$ , et soit  $V = \pi^{-1}(\Delta)$ . Muni de la restriction de  $Q_{1,n}$ , l'espace  $V$  est isométrique à  $\mathbb{R}^{1,1}$ , et  $A_0 = A \cap V$  est un fermé achronal sans bord dans  $V \approx \mathbb{R}^{1,1}$ . On s'est ainsi ramené au cas  $n = 1$ .

Paramétrons  $\Delta$  par une coordonnée  $s$  de la manière suivante :  $x(s) = x_0 + s(x - x_0)$ . On considère l'ensemble  $I$  des  $s$  tels qu'il existe une application continue  $f : [0, s] \rightarrow \mathbb{R}$  tel que pour tout  $\eta$  dans  $[0, s]$  le point  $(f(\eta), x(\eta))$  appartient à  $A$ . Il est clair que  $I$  contient 0, comme  $p$  est un homéomorphisme local,  $I$  est ouvert. La définition de  $I$  rend évident qu'il est connexe : c'est donc un intervalle de la forme  $[0, s_{max}[$ , ou bien  $[0, 1]$  tout entier.

Dans le premier cas, on remarque que comme  $A$  est localement achronal,  $f$  est 1-Lipschitz : elle s'étend donc continûment en  $s_{max}$  ; comme  $A$  est fermé la limite  $(f(x(s_{max})), x(s_{max}))$  appartient elle aussi à  $A$ . Donc,  $s_{max}$  appartient à  $I$  : contradiction.

Donc,  $I = [0, 1]$  : le point  $y$  appartient à  $\Omega$ . Ainsi,  $\Omega$  est  $\mathbb{R}^n$  tout entier. Mais l'argument précédent donne mieux : il montre qu'il existe une application 1-Lipschitz  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  dont le graphe est contenu dans  $A$  et telle que  $f(x_0) = t_0$ . Il est clair que cette application est de plus unique : si  $g$  est une autre application satisfaisant cette propriété, alors  $\{f = g\}$  est non-vide (il contient  $x_0$ ), fermé (par continuité de  $f - g$ ) et ouvert (car  $p$  est un homéomorphisme local). C'est donc  $\Delta \approx \mathbb{R}$  tout entier, cqfd.

En considérant toutes les droites  $\Delta$  contenant  $x_0$ , on obtient une application  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dont le graphe  $G(f)$  est contenu dans  $A$ . Ce graphe est fermé (car la local achronalité de  $A$  assure que  $f$  est localement 1-Lipschitz, et donc continue); il est aussi ouvert dans  $A$  (car  $p$  est un homéomorphisme local) : comme  $A$  est supposé connexe, on obtient  $A = G(f)$ . ■

**Exercice 1.3.2.** — Montrer que le futur  $I^+(A)$  (resp. le passé  $I^-(A)$ ) de  $A = G(f)$  est l'épigraphe  $\{(t, x) | t > f(x)\}$  (resp. l'hypographe  $\{(t, x) | t < f(x)\}$ )

1.3.2. *Hypersurfaces spatiales complètes.* — Il y a un contexte apparaissant naturellement qui assure la validité des hypothèses de 1.3.1 :

**Lemme 1.3.3.** — Soit  $\sigma : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{1,n}$  une immersion isométrique de classe  $C^1$  d'une variété riemannienne connexe  $(\Sigma, g)$ . On suppose que  $(\Sigma, g)$  est complète. Alors,  $\sigma$  est un plongement, et son image est un fermé achronal sans bord de  $\mathbb{R}^n$ , i.e. le graphe  $G(f)$  d'une application contractante de classe  $C^1$ .

**Preuve** Reprenons la preuve la proposition 1.3.1, mais en prenant pour application  $p$  la composition  $\pi \circ \sigma$ . On cherche une application  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \Sigma$  telle que pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$  on a  $p \circ \varphi(x) = x$ .

La preuve de 1.3.1 se reproduit pour l'essentiel : on se fixe  $x_0 = p(\eta_0)$ , on se restreint à chaque droite  $\Delta$  de  $\mathbb{R}^n$  contenant  $x_0$ , et essayons de la relever dans  $\Sigma$ . Le point clé est le suivant : *l'application  $p$  dilate les distances*. En effet : soit  $v$  un vecteur tangent à  $\Sigma$ , sa  $g$ -norme est la  $\|\cdot\|$ -norme de son image par  $d\sigma$ . Cette image est de la forme  $(\tau, u)$ ; où du reste  $u$  est l'image de  $v$  par la différentielle de  $p$ . Notre affirmation est donc évidente puisque :

$$\|(\tau, u)\|^2 = \|u\|_0^2 - \tau^2 < \|u\|_0^2$$

On note  $I$  l'intervalle maximal de  $\Delta$  de la forme  $[x_0, x[$  sur lequel il existe une application continue  $\varphi$  à valeur dans  $\Sigma$  telle que  $p \circ \varphi(x) = x$ . Si  $I$  a une extrémité finie, sa longueur est finie. D'après l'affirmation ci-dessus, la courbe  $\varphi$  est de longueur finie dans  $(\Sigma, g)$ . Par complétude de cette dernière, cette courbe limite admet un point limite, ce qui contredit la définition de  $I$ .

On en déduit que  $I$  est  $\Delta$  tout entier. Par suite, il existe bien une application continue - et même contractante -  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \Sigma$  telle que  $p \circ \varphi = id$  (\*). L'image de  $\varphi$  est clairement à la fois fermée et ouverte dans le connexe  $\Sigma$  : c'est donc  $\Sigma$  tout entier. Donc,  $\varphi$  est surjective. Comme d'après (\*) elle est clairement injective, on obtient que  $p$  et  $\varphi$  sont des homéomorphismes inverses l'un de l'autre. Comme  $p = \pi \circ \sigma$ , on obtient que l'image de  $\sigma$  est le graphe d'une application  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . On en déduit bien que cette image est fermée, achronale, sans bord, et que  $\sigma$  est un plongement. ■

**1.4. Prolongement de parties achronales.** — On se pose la question suivante : toute partie achronale de  $\mathbb{R}^{1,n}$  peut-elle se prolonger en un fermé achronal sans bord ?

**Proposition 1.4.1.** — Soit  $A = G(f_0)$  une partie achronale dans  $\mathbb{R}^{1,n}$  non-vide. Alors, il existe un fermé achronal sans bord dans  $\mathbb{R}^{1,n}$  qui contient  $A$ . Plus précisément, il existe deux applications 1-Lipschitz  $f^\pm : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telles que les fermés achronaux sans bord contenant  $A$  sont exactement les graphes  $G(f)$  d'applications 1-Lipschitz vérifiant :

$$f^- \leq f \leq f^+$$

**Preuve**  $A$  est le graphe d'une application 1-Lipschitz  $f_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . On pose, pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$  :

$$\begin{aligned} f^-(x) &= \text{Sup}_{y \in \Omega} \{f_0(y) - d_{\text{euc}}(x, y)\} \\ f^+(x) &= \text{Inf}_{y \in \Omega} \{f_0(y) + d_{\text{euc}}(x, y)\} \end{aligned}$$

Soient  $x, x'$  dans  $\mathbb{R}^n$  ; pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $y$  dans  $\mathbb{R}^n$  tel que :

$$f^-(x) - \epsilon < f_0(y) - d_{\text{euc}}(x, y)$$

Or :

$$f^-(x') \geq f_0(y) - d_{\text{euc}}(x', y)$$

Donc :

$$\begin{aligned} f^-(x) - f^-(x') &< (\epsilon + f_0(y) - d_{\text{euc}}(x, y)) - (f_0(y) - d_{\text{euc}}(x', y)) \\ &< \epsilon + d_{\text{euc}}(x, x') \end{aligned}$$

d'après l'inégalité triangulaire. Comme ceci est valable pour tout  $\epsilon$ , et comme on peut échanger les rôles de  $x$  et de  $x'$ , on obtient que  $f^-$  est 1-Lipschitz.

On montre de manière analogue que  $f^+$  est 1-Lipschitz.

Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est 1-Lipschitz et coïncide avec  $f_0$  sur  $\Omega$ , alors pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$  et tout  $y$  dans  $\Omega$  on a :

$$f(x) \leq f(y) + d_{\text{euc}}(x, y) = f_0(y) + d_{\text{euc}}(x, y)$$

ce qui montre bien  $f(x) \leq f^+(x)$ . De manière analogue,  $f(x) \geq f^-(x)$ .

Enfin, si  $x$  est dans  $\Omega$ , comme  $f_0$  est 1-Lipschitz, pour tout  $y$  dans  $\Omega$  on a :

$$f_0(y) - d_{\text{euc}}(x, y) \leq f_0(x)$$

ce qui montre que  $f^-(x)$  est égal à  $f_0(x)$ . De manière analogue,  $f^+ = f_0$  sur  $\Omega$  : les applications  $f^\pm$  sont bien des extensions de  $f_0$  ; leurs graphes contiennent bien  $A$ . ■

On suppose dorénavant que la partie achronale  $A$  est fermée. On note  $A^+, A^-$  les graphes de  $f^+, f^-$ .

**Remarque 1.4.2.** — Il y a un exemple très particulier de fermé achronal sans bord qu'il convient de distinguer : celui des hyperplans lumière, i.e. les hyperplans affines  $H$  de direction orthogonale à un vecteur lumière.

**Lemme 1.4.3.** — Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^n$  nous avons l'alternative suivante :

- soit  $f^-(x)$  est réalisé par un élément  $y$  de  $\Omega$ , i.e.  $f^-(x) = f_0(y) - d_{euc}(x, y)$ ,
- soit  $p^- = (f^-(x), x)$  n'est causalement relié à aucun élément de  $A$ , auquel cas il existe un hyperplan affine  $H$  de type lumière contenant  $p^-$  et dont le futur  $J^+(H)$  contient  $A$ ,  $A^-$  et  $A^+$ .

**Preuve** Pour simplifier, et sans perte de généralité, on suppose  $x = 0$  et  $f^-(0) = 0$ . Pour tout entier  $n$ , il existe un élément  $y_n$  de  $\Omega$  tel que  $-1/n = f^-(0) - 1/n < f_0(y_n) - d_{euc}(x, y_n) = f_0(y_n) - \|y_n\|_0$ ; i.e. après avoir posé  $t_n = f_0(y_n)$  :

$$\|y_n\|_0 \geq t_n > \|y_n\|_0 - 1/n$$

Nous distinguons deux cas :

- soit les  $y_n$  admettent une valeur d'adhérence  $y$  dans  $\mathbb{R}^n$  : alors  $f^-(x) = f_0(y) - d_{euc}(x, y)$ . On est dans le premier cas de l'alternative de l'énoncé.
- soit après extraction d'une sous-suite les  $y_n$  convergent vers l'infini, et les  $v_n = \frac{y_n}{\|y_n\|_0}$  converge vers un vecteur  $\bar{v}$ . Par définition de  $f^-$ , pour tout  $y$  dans  $\mathbb{R}^n$  on a :

$$f^-(y) \geq t_n - d_{euc}(y_n, y) \geq \|y_n\|_0 - \|y_n - y\|_0 - 1/n$$

Or :

$$\begin{aligned} \|y_n - y\|_0 &= \sqrt{\|y\|_0^2 + \|y_n\|_0^2 - 2\langle y|y_n \rangle} \\ &= \|y_n\|_0 \sqrt{1 + \frac{\|y\|_0^2}{\|y_n\|_0^2} - 2\langle v_n | \frac{y}{\|y_n\|_0} \rangle} \\ &= \|y_n\|_0 (1 + \langle v_n | \frac{y}{\|y_n\|_0} \rangle) + o(1) \end{aligned}$$

Donc :

$$f^-(y) \geq -\langle v_n | y \rangle + o(1)$$

À la limite :

$$f^-(y) \geq -\langle \bar{v} | y \rangle$$

Or, le graphe de l'application  $y \rightarrow -\langle \bar{v} | y \rangle$  est un hyperplan lumière  $H$ . L'inégalité ci-dessus signifie que le graphe de  $A^-$  est au-dessus de  $H$ . Le lemme s'en déduit. ■

De manière analogue :

**Lemme 1.4.4.** — Si  $(f^+(x), x)$  n'est causalement relié à aucun élément de  $A$ , il existe un hyperplan affine  $H$  de type lumière contenant  $x$  et tel que :  $A^\pm \subset J^-(H)$ . ■

**Corollaire 1.4.5.** — On suppose que  $A$  est un fermé achronal dans  $\mathbb{R}^{1,n}$ . Soit  $x$  un élément de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $f^-(x) = f^+(x)$ . On note  $p = (f^+(x), x) = (f^-(x), x)$ . Alors, nous sommes dans une des situations suivantes, non mutuellement exclusives :

1.  $p$  est sur un segment lumière  $[p^+, p^-]$  avec  $p^+, p^-$  appartenant à  $A$ ,
2.  $p$  appartient à un rayon géodésique lumière futur ou passé inextensible  $r : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^{1,n}$  contenu dans  $A^- \cap A^+$  et d'extrémité initiale  $r(0)$  dans  $A$ ,
3.  $A^- = A^+$  est un hyperplan lumière contenant  $A$ .

**Preuve** Supposons tout d'abord qu'il existe deux éléments  $y^-, y^+$  dans  $A$  tels que :

$$\begin{aligned} f^-(x) &= f_0(y^-) - d_{euc}(x, y^-) \\ f^+(x) &= f_0(y^+) + d_{euc}(x, y^+) \end{aligned}$$

Alors :

$$f_0(y^-) - f_0(y^+) = d_{euc}(x, y^-) + d_{euc}(y^+, x) \geq d_{euc}(y^-, y^+)$$

Comme  $f_0$  est 1-Lipschitz, cette inégalité est une égalité : le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire. On en déduit que  $x$  est dans le segment  $[y^-, y^+]$  : nous sommes dans le premier cas de figure recensé dans l'énoncé.

Considérons maintenant le cas où il existe bien un élément  $y^+$  comme ci-dessus, mais pas de  $y^-$ . Alors, d'après le lemme 1.4.3, il existe un hyperplan lumière  $H$  contenant  $p = (f^-(x), x)$  et dont le futur causal  $J^+(H)$  contient  $A^-$  et  $A^+$ . Ce futur contient en particulier  $q^+ = (f^+(y^+), y^+)$ , or ce  $q^+$  est dans le passé causal  $J^-(p)$  de  $p$ . L'intersection entre  $J^-(p)$  et  $J^+(H)$  est le rayon géodésique lumière passé inextensible issu de  $p$  : on en déduit que  $p$  est contenu dans le rayon géodésique lumière futur inextensible  $r : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^{1,n}$  issu de  $q^+$ .

Remarquons que  $A^+$  et  $A^-$  doivent à la fois être contenu dans le futur de  $H$  et dans  $J^-(\partial J^+(q^+))$ , le passé du bord du cône futur de  $q^+$ . Il s'en suit que le rayon  $r$  est d'image contenue dans  $A^- \cap A^+$ .

Le cas où  $y^-$  existe bien et non  $y^+$  se traite de la même manière : nous nous retrouvons là encore dans le second cas de figure prévu dans l'énoncé.

Reste le dernier cas : celui où ni  $y^+$ , ni  $y^-$  existe : il existe alors deux hyperplans lumière  $H^+, H^-$  contenant chacun  $p = (f^-(x), x) = (f^+(x), x)$  et tels que :

$$(A^+ \cup A^-) \subset J^+(H^-) \cap J^-(H^+)$$

Mais il est facile de voir que l'intersection entre le futur causal d'un hyperplan lumière et le passé causal d'un autre hyperplan lumière ne peut contenir le graphe d'une application  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que si ces deux hyperplans lumière sont parallèles. Comme de plus  $H^-$  et  $H^+$  se rencontrent en  $p$  on obtient :

$$A^+ = A^- = H^+ = H^-$$

Ceci achève la preuve du corollaire.

**Exercice 1.4.6.** — Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose  $\theta_n = (1 - 1/n)\frac{\pi}{2}$ . Soit  $p_n$  le point de  $\mathbb{R}^{1,2}$  de coordonnées  $(n \sin(\theta_n), (n+1) \cos(\theta_n), (n+1) \sin(\theta_n))$ , et ajoutons à cette suite le point  $p_0 = (0, 0, 0)$ .

1. Montrer que l'union de tous les  $p_n$  est un fermé acausal de  $\mathbb{R}^{1,2}$ .

2. En déduire qu'il existe des fermés acausaux de  $\mathbb{R}^{1,n}$  qui ne peuvent être prolongés en des fermés acausaux sans bord.

**1.5. Développements de Cauchy.** — Dans ce § on se fixe un fermé achronal sans bord  $A = G(f)$ . Le but principal, après avoir défini le développement de Cauchy  $D(A)$ , est de montrer :

**Théorème 1.5.1.** — *Le développement de Cauchy de  $A$  est convexe. De plus, il est soit futur-complet, soit passé-complet, soit le domaine compris entre deux hyperplans lumières parallèles.*

1.5.1. *Définitions.* —

**Définition 1.5.2.** — *Le développement de Cauchy  $D(A)$  de  $A$  est l'ensemble des points  $p$  de  $\mathbb{R}^{1,n}$  tels que toute courbe causale inextensible passant par  $p$  rencontre  $A$ .*

$D(A)$  se décompose en trois parties :

- $A$  lui-même,
- la partie passée  $D^-(A)$ , i.e. l'ensemble des points  $p$  dans  $I^-(A)$  tel que toute courbe causale futur inextensible issu de  $p$  rencontre  $A$  (cf. définition 1.2.22),
- la partie future  $D^+(A)$  qui se définit comme étant l'ensemble des points  $p$  dans  $I^+(A)$  tel que toute courbe causale passé inextensible issu de  $p$  rencontre  $A$ .

**Lemme 1.5.3.** —  *$D^-(A)$  (resp.  $D^+(A)$ ) est l'ensemble des points de  $p$  tel que tout rayon géodésique lumière futur (resp. passé) inextensible issu de  $p$  rencontre  $A$ .*

**Preuve** Une des inclusions est évidente. Inversement, soit  $p_0 = (x_0, t_0)$  un point de  $I^-(A)$  tel que tout rayon géodésique lumière futur inextensible issu de  $p_0$  rencontre  $A$ , et soit  $t \rightarrow p(t) = (t, x(t))$  une courbe causale inextensible future issue de  $p_0$ , i.e.  $x(t_0) = x_0$ , et  $t \rightarrow x(t)$  est défini sur l'intervalle  $[t_0, +\infty[$ . On suppose pour simplifier et sans perte de généralité que  $x_0 = 0$ ,  $t_0 = 0$ .

Nous distinguons deux cas :

- aucun  $p(t)$  n'appartient à  $I^+(p_0)$  : pour tout  $t > 0$ , et tout  $s < t$ , le point  $p(t)$  doit appartenir à l'intersection entre  $\partial J^+(p_0)$  et  $\partial J^+(p(s))$ . Comme  $p(s)$  appartient à  $\partial J^+(p_0)$ , cette intersection est le rayon lumière futur issu de  $p(s)$  contenant le segment  $[p_0, p(s)]$ . Comme ceci est valable pour tout  $s < t$ , on en déduit que  $t \rightarrow p(t)$  est un rayon géodésique lumière. Par hypothèse, il doit rencontrer  $A$ .

- il existe  $t_1 > 0$  tel que  $p(t_1)$  appartient à  $I^+(p_0)$  : supposons par l'absurde qu'aucun  $p(t)$  ne rencontre  $A$ , i.e. que pour tout  $t$  on a  $f(x(t)) > t$ . Soit  $f_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par  $f_t(x) = t - d_{\text{euc}}(x, x(t))$ . Observez que le graphe de  $f_t$  est le bord de  $I^-(p(t))$ . Alors, pour tout  $t$  et tout  $x$  on a  $f(x) > f_t(x)$ . Si  $x(t)$  reste à distance finie de 0, chaque  $f_t(x)$  tend vers  $\infty$ , ce qui est absurde. Il existe donc une suite de  $t_n$  pour lesquels la suite des normes euclidiennes  $\|x(t_n)\|_0$  tend vers  $+\infty$ . Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que  $x(t_n)/\|x(t_n)\|_0$  converge vers un vecteur  $u$  de norme 1. Dans ce cas,  $f_{t_n}$  converge uniformément sur tout compact vers l'application  $f_\infty(x) = \langle x|u \rangle + C$ , où  $C$  est une constante (le graphe de  $f_\infty$  est un hyperplan lumière). Mais  $f_\infty(0) \geq f_{t_1}(0) = t_1 - d_{\text{euc}}(0, x(t_1)) > 0$ . Donc  $C$  est

strictement positif. Il s'en suit que le long du rayon géodésique issu de 0 et dirigé par  $u$  on a :

$$f(tu) \geq f_\infty(tu) = \langle tu|u \rangle + C > t$$

Ceci contredit le fait que la géodésique lumière  $t \rightarrow (t, tu)$  doit rencontrer  $A$ . ■

Dans ce qui suit on note  $\mathbb{S}^{n-1}$  la sphère unité de  $\mathbb{R}^n$ , i.e. l'ensemble des vecteurs de norme 1.

**Définition 1.5.4.** — Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une application 1-Lipschitz. Pour tout  $\lambda > 0$ , on définit :

$$\begin{aligned} f_\lambda^-(x) &= \text{Sup}_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} \{f(x + \lambda u) - \lambda\} \\ f_\lambda^+(x) &= \text{Inf}_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} \{f(x + \lambda u) + \lambda\} \end{aligned}$$

**Lemme 1.5.5.** — Pour tout  $\lambda > 0$ ,  $f_\lambda^-$  est une application 1-Lipschitz majorée par  $f$  et  $f_\lambda^+$  est 1-Lipschitz, minorée par  $f$ . De plus, à  $x$  fixé,  $f_\lambda^-(x)$  décroît avec  $\lambda$ , et  $f_\lambda^+(x)$  croît avec  $x$ .

**Preuve** Comme :

$$-\lambda \leq f(x + \lambda u) - f(x) \leq \lambda$$

chaque  $f(x + \lambda u) - \lambda$  est majoré par  $f(x)$  : ceci montre que  $f_\lambda^-$  est bien défini et majoré par  $f$ . Une borne supérieure d'applications 1-Lipschitz est toujours 1-Lipschitz, et si  $\lambda > \mu$ , alors  $(f(x + \lambda u) - \lambda) - (f(x + \mu u) - \mu) = (f(x + \lambda u) - f(x + \mu u)) + \mu - \lambda \leq 0$ . On en déduit toutes les affirmations sur les  $f_\lambda^-$ . Le cas des  $f_\lambda^+$  est analogue. ■

**Définition 1.5.6.** —

$$\begin{aligned} f_\infty^-(x) &= \text{Inf}_{\lambda > 0} \{f_\lambda^-(x)\} \\ f_\infty^+(x) &= \text{Sup}_{\lambda > 0} \{f_\lambda^+(x)\} \end{aligned}$$

Rien n'assure que ces fonctions soient finies ; cependant :

**Lemme 1.5.7.** —  $f_\infty^-$  est soit une application 1-Lipschitz, soit vaut  $-\infty$  partout. De même,  $f_\infty^+$  est soit partout  $+\infty$ , soit une application 1-Lipschitz.

**Preuve** Cette une propriété générale des bornes sup ou inf d'ensembles d'applications 1-Lipschitz. ■

**Proposition 1.5.8.** — L'intérieur du développement de Cauchy  $\mathcal{D}(A)$  de  $A = G(f)$  est l'ouvert :

$$\mathcal{D}(f) = \{(t, x) | f_\infty^-(x) < t < f_\infty^+(x)\}$$

**Preuve** Soit  $(t, x)$  un élément de  $\mathcal{D}(f)$  : pour  $\lambda > 0$  assez grand on a :

$$f_{\lambda}^{-}(x) < t < f_{\lambda}^{+}(x)$$

Supposons  $t \leq f(x)$  : la définition même de  $f_{\lambda}^{\pm}$  montre que tous les rayons lumières futurs issus de  $(t, x)$  rencontrent le graphe  $A = G(f)$ . D'après le lemme 1.5.3  $(t, x)$  appartient à  $D(A)$ . Le cas  $t \geq f(x)$  se traite de manière analogue ; ceci montre que l'intérieur de  $D(A)$  contient  $\mathcal{D}(f)$ .

Inversement, soit  $p = (t, x)$  un point à l'intérieur de  $D(A)$ . On suppose  $t \leq f(x)$  ; le cas  $t \geq f(x)$  se traite de manière analogue. Pour tout vecteur  $u$  de norme 1, le rayon lumière  $s \rightarrow (t + s, x + su)$  doit rencontrer  $G(f)$  : on en déduit  $t \geq f_{\lambda}^{-}(x)$  pour un certain  $\lambda$ , d'où  $f_{\infty}^{-}(x) \leq t \leq f(x) \leq f_{\infty}^{+}(x)$ . Ceci doit rester vrai si on fixe  $x$  et modifie légèrement  $t$  : donc on doit avoir  $f_{\infty}^{-}(x) < t < f_{\infty}^{+}(x)$ , i.e.  $p \in \mathcal{D}(f)$  ■

**Lemme 1.5.9.** — Soit  $x$  un point de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $f_{\infty}^{-}(x)$  est fini. Alors, il existe un rayon lumière futur inextensible issu de  $p = (f_{\infty}^{-}(x), x)$  contenu dans  $G(f_{\infty}^{-})$ . En d'autres termes, il existe un vecteur  $u$  de  $\mathbb{R}^n$  de norme 1 tel que :

$$\forall \lambda > 0, \quad f_{\infty}^{-}(x + \lambda u) = f_{\infty}^{-}(x) + \lambda$$

**Preuve** Pour tout entier  $n$ , le point  $p_n = (f_{\infty}^{-}(x) - 1/n, x)$  n'appartient pas à  $D(f)$  : il existe donc un rayon lumière issu de ce point disjoint de  $G(f)$ , et donc de  $D(f)$ . Comme  $p_n$  est dans le passé de  $G(f)$ , ceci signifie qu'il existe un vecteur  $u_n$  tel que :

$$\forall \lambda \geq 0, \quad f_{\infty}^{-}(x + \lambda u_n) \geq f_{\infty}^{-}(x) - 1/n + \lambda$$

Après extraction d'une sous-suite, on peut supposer que les  $u_n$  converge vers un vecteur  $\bar{u}$  de norme +1. Alors :

$$\forall \lambda \geq 0, \quad f_{\infty}^{-}(x + \lambda \bar{u}) \geq f_{\infty}^{-}(x) + \lambda$$

Comme  $f_{\infty}^{-}$  est 1-Lipschitz, on en déduit le lemme. ■

Bien sûr, de manière symétrique, tout point de  $G(f_{\infty}^{+})$  est extrémité future d'un rayon lumière passé inextensible contenu dans  $G(f_{\infty}^{+})$ .

**Exercice 1.5.10.** — Montrer que  $\mathcal{D}(f)$  est vide si et seulement si  $G(f)$  est un hyperplan lumière.

1.5.2. Preuve du théorème 1.5.1. — On note :

$$\begin{aligned} W^{+} &= \{(t, x) / f_{\infty}^{-}(x) < t\} \\ W^{-} &= \{(t, x) / t < f_{\infty}^{+}(x)\} \end{aligned}$$

D'après la Proposition 1.5.8 l'intérieur  $\mathcal{D}(f)$  du développement de Cauchy est l'intersection  $W^{+} \cap W^{-}$ .

Soit  $x$  un point de  $\mathbb{R}^n$  en lequel  $f_{\infty}^{-}$  prend une valeur finie. Soit  $r$  le rayon futur lumière issu de  $(f_{\infty}^{-}(x), x)$  contenu dans  $G(f_{\infty}^{-})$  donné par le Lemme 1.5.9. Soit  $H$  l'unique hyperplan affine lumière contenant  $r$ .

**Lemme 1.5.11.** — *L'épigraphe  $W^+$  est contenu dans le futur  $I^+(H)$  de  $H$ .*

**Preuve** Pour tout  $t$  le point  $r(t)$  appartient à  $G(f_\infty^-)$ . Donc le passé  $I^-(r(t))$  est disjoint de  $W^+$ . Or, l'union de tous les ouverts  $I^-(r(t))$  est tout le passé  $I^-(H)$ , qui est donc disjoint de  $W^+$ . ■

Soit  $\mathbf{H}$  l'ensemble des hyperplans affines lumière disjoints de  $\mathcal{D}(f)$ . Il se partitionne en deux sous-parties : l'ensemble  $\mathbf{H}^+$  des hyperplans lumières  $H$  dont le futur  $I^+(H)$  contient  $\mathcal{D}(f)$ , et celui formé des hyperplans dont le passé contient  $\mathcal{D}(f)$  : on le note  $\mathbf{H}^-$ . Enfin, soit  $V^+$  (resp.  $V^-$ ) l'intersection de tous les  $I^+(H)$  (resp.  $I^-(H)$ ) où  $H$  décrit  $\mathbf{H}^+$  (resp.  $\mathbf{H}^-$ ).

Manifestement,  $\mathcal{D}(f)$  est contenu dans  $V^+ \cap V^-$ . En fait, il est clair que  $V^+$  contient  $W^+$ , et que  $V^-$  contient  $W^-$ .

**Lemme 1.5.12.** —  *$W^+$  et  $V^+$  sont confondus.*

**Preuve** Soit  $p$  un point de l'ouvert  $V^+$  à la frontière de l'ouvert  $W^+$  : on a  $p = (f_\infty^-(x), x)$ . D'après le lemme 1.5.11, il existe un élément  $H$  de  $\mathbf{H}^+$  qui contient  $p$ . Mais alors  $p$  ne peut appartenir à  $I^+(H)$ , ce qui contredit l'hypothèse  $p \in V^+$ . Cette contradiction montre que l'ouvert  $W^+$  est fermé dans le connexe (et même convexe)  $V^+$ . Donc,  $V^+ = W^+$ . ■

Bien sûr, de manière similaire, on a  $V^- = W^-$ . Ainsi,  $\mathcal{D}(f)$  est l'intersection des deux convexes  $V^+$  et  $V^-$ . De plus, il est clair que  $V^+$  est futur-complet, et que  $V^-$  est passé complet. Il y a trois cas possibles :

–  $V^+ = W^+$  est  $\mathbb{R}^{1,n}$  tout entier, i.e.  $f_\infty^- = -\infty$  : alors  $\mathcal{D}(f) = V^-$  est passé-complet.

–  $V^- = W^-$  est  $\mathbb{R}^{1,n}$  tout entier, i.e.  $f_\infty^+ = -\infty$  : alors  $\mathcal{D}(f) = V^+$  est futur-complet.

– Le cas  $-\infty < f_\infty^- \leq f_\infty^+ < +\infty$  : Dans ce cas, ni  $\mathbf{H}^-$ , ni  $\mathbf{H}^+$  n'est vide. Or, pour tout  $H^+ \in \mathbf{H}^+$  et  $H^- \in \mathbf{H}^-$  on doit avoir  $H^+ \cap H^- = \emptyset$ . Comme il s'agit d'hyperplans lumière, ceci n'est possible que si  $H^+$  et  $H^-$  sont parallèles entre eux ! On en déduit que tous les éléments de  $\mathbf{H}^+$  sont parallèles entre eux et parallèles à tous les éléments de  $\mathbf{H}^-$ . Ceci achève la preuve du théorème 1.5.1. ■

**Remarque 1.5.13.** — Nous avons montré un peu mieux : l'intérieur  $\mathcal{D}(f)$  du développement de Cauchy est une intersection de demi-espaces bordés par des hyperplans affines de type lumière. En d'autres termes, il s'agit soit du futur (ou passé) d'un hyperplan affine lumière, soit du domaine compris entre deux tels hyperplans affines lumière parallèles, soit d'un *domaine régulier futur ou passé complet* au sens de [5, Définition 4.1]. En complément de l'étude faite ici, observons que les domaines réguliers futur (ou passé) complets sont bien des développements de Cauchy de fermés *acausaux* sans bord (cf. [5, Lemme 4.9]).

**Exercice 1.5.14.** — Montrer que le futur (ou le passé) d'un hyperplan affine lumière, ainsi que le domaine compris entre deux hyperplans affines lumière, est toujours le développement de Cauchy d'un fermé achronal sans bord.

**Remarque 1.5.15.** — Le théorème 1.5.1 démontré ici est inédit. En effet, dans par exemple [1], il est démontré sous les hypothèses supplémentaires suivantes : le fermé achronal sans bord  $A$  est supposé différentiable, acausal (i.e. de type espace) et tel que la métrique induite soit complète.

## 2. Géométrie de l'espace anti-de Sitter

**2.1. “Rappels” sur l'espace hyperbolique.** — On se place à nouveau dans l'espace de Minkowski de dimension  $1 + n$ .

Notons  $\mathbb{H}^n$  la composante connexe du lieu  $Q_{1,n} = -1$  contenant les points de coordonnée  $t$  positive. En d'autres termes, c'est une nappe de l'hyperboloïde à deux nappes. Elle est paramétrée par  $\mathbb{R}^n$  de la manière suivante :  $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (t = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2 + 1}, x_1, \dots, x_n)$  (ce qui montre sa connexité).

On peut comprendre le fibré tangent à  $\mathbb{H}^n$  de la manière suivante : le plongement  $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^{1,n}$  induit un plongement  $T\mathbb{H}^n \subset T\mathbb{R}^{1,n}$ . On est habitué à  $T\mathbb{R}^{1,n}$  : il s'identifie canoniquement au produit  $\mathbb{R}^{1,n} \times \mathbb{R}^{1,n}$ . Cette identification provient du *parallélisme* de  $\mathbb{R}^{1,n}$  : tout vecteur se ramène par transport parallèle en un vecteur tangent à l'origine 0, et comme la connexion de  $\mathbb{R}^{1,n}$  est plate, ce vecteur ne dépend pas du chemin suivi dans  $\mathbb{R}^{1,n}$ . Ceci amène à identifier  $T\mathbb{H}^n$  avec les paires  $(p, v)$  où  $p$  (le point base) vérifie  $|p|^2 = -1$ , et  $\langle p | v \rangle = 0$ .

On peut munir  $\mathbb{H}^n$  d'une métrique riemannienne. Il suffit de procéder comme pour la métrique ronde de la sphère : si  $v$  est un vecteur tangent en un point  $x$  de  $\mathbb{H}^n$ , on définit  $g(v, v) = Q_{1,n}(v, d_x f(v))$ . Il est clair que ceci définit une forme quadratique sur chaque  $T_x \mathbb{H}^n$  :

$$ds_{hyp}^2 = \sum dx_i^2 - \frac{(\sum x_i dx_i)^2}{1 + \sum x_i^2}$$

Encore faut-il s'assurer que cette forme est bien définie positive pour chaque  $n$ -uplet  $(x_1, \dots, x_n)$  ! On peut s'en convaincre sans calcul : la métrique  $ds_{hyp}^2$  s'obtient en convenant que sa valeur en  $\zeta = (u, v)$  est  $Q_{1,n}(v)$ . Le fait que  $ds_{hyp}^2$  soit effectivement définie positive provient du fait que tout vecteur  $v$  non-nul  $Q_{1,n}$ -orthogonal à un vecteur  $u$  de  $Q_{1,n}$ -norme négative est de  $Q_{1,n}$ -norme positive puisque la signature est  $(1, n)$ .

**Définition 2.1.1.** —  $\mathbb{H}^n$  muni de la métrique riemannienne  $ds_{hyp}^2$  définie ci-dessus est l'espace hyperbolique.

Une fois définie la norme des vecteurs tangents, on peut calculer la longueur des courbes  $C^1$  par morceaux, voire celle des courbes absolument continues. On peut alors se demander quelles sont les courbes qui minimisent la longueur parmi celles d'extrémités  $p$  et  $q$  fixées. On aboutit là encore à la notion de géodésique, i.e. les courbes auto-parallèles. Elles minimisent aussi l'énergie.

Pour bien saisir la proposition suivante, il convient de bien connaître la notion de connexion ; du moins, suffisamment pour savoir que par un point et un vecteur tangent donné il ne passe qu'une et une seule courbe auto-parallèle.

**Proposition 2.1.2.** — *Les géodésiques de  $\mathbb{H}^n$  sont les intersections entre  $\mathbb{H}^n$  et les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^{1,n}$  de dimension 2 de type  $(1, 1)$ .*

**Preuve** Soit  $p$  un élément de  $\mathbb{H}^n$ , et  $v$  un élément non-nul de  $T_p\mathbb{H}^n$  : on peut considérer  $v$  comme un élément de  $\mathbb{R}^{1,n}$  orthogonal à  $p$ . Soit  $P_0$  le 2-plan de  $\mathbb{R}^{1,n}$  engendré par  $p$  et  $v$ . La restriction de  $Q_{1,n}$  à  $P_0$  est une forme quadratique de signature  $(1, 1)$  ; notons  $P_1$  le  $Q_{1,n}$ -orthogonal de  $P_0$ . Alors,  $\mathbb{R}^{1,n}$  est la somme orthogonale de  $P_0$  et de  $P_1$  ; la transformation qui à  $u_1 + u_2$  ( $u_1 \in P_0, u_2 \in P_1$ ) associe  $u_1 - u_2$  est une isométrie  $\sigma$  de  $Q_{1,n}$  dont l'ensemble des points fixes est  $P_0$ . Notons  $c$  l'unique géodésique (courbe auto-parallèle) vérifiant  $c(0) = p$ ,  $c'(0) = v$ . Pour chaque temps  $t$ , l'image par  $\sigma$  de  $c$  est l'unique géodésique qui passe par  $p$  et est tangente à  $v$  : c'est donc  $c$ . Donc, chaque  $c(t)$  est point fixe de  $\sigma$ , et appartient donc à  $P_0 \cap \mathbb{H}^n$ . On en déduit que l'image de  $c$  est précisément cette intersection. ■

**Exercice 2.1.3.** — Montrer sans utiliser la notion de connexion que les géodésiques décrites ci-dessus sont bien les courbes qui minimisent la longueur.

On peut maintenant aisément calculer la longueur des géodésiques et en déduire la fonction distance sur  $\mathbb{H}^n$ . Contentons-nous du calcul de la distance à "l'origine" :

**Corollaire 2.1.4.** — *La distance hyperbolique entre  $(1, 0, \dots, 0)$  et  $(t, x_1, \dots, x_n)$  est  $\text{Arch}(t)$ . L'espace hyperbolique est complet.*

**Preuve** Notons  $r^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$  et  $u_0$  le vecteur  $(x_1, \dots, x_n)/r$  de  $\mathbb{R}^n$ . On peut paramétrer l'intersection entre  $\mathbb{H}^n$  et l'unique 2-plan contenant  $(1, 0, \dots, 0)$  et  $(t, x_1, \dots, x_n)$  par  $c(\xi) = (\cosh(\xi), \sinh(\xi)u_0)$ . Le vecteur tangent  $c'(\xi)$  à la courbe  $c$  en  $\xi$  est  $(\sinh(\xi), \cosh(\xi)u_0)$ . Le carré de sa norme pour la métrique hyperbolique est  $-\sinh^2(\xi) + \cosh^2(\xi) = 1$ . Donc, la longueur de chemin parcouru par  $c$  entre les temps 0 et  $\xi$  est précisément  $\xi$ . On obtient ainsi que tout fermé borné de  $\mathbb{H}^n$  est compact (car, les fonctions  $r$  et  $t$  sont alors bornées). Ceci montre, d'après le Théorème de Hopf-Rinow, que  $\mathbb{H}^n$  est complet. Il existe donc toujours une géodésique minimisante entre  $c(0)$  et  $c(\xi)$ , qui ne peut être que  $c$  ! Le corollaire s'en déduit. ■

## 2.2. L'espace anti-de Sitter. —

**2.2.1. Premières définitions.** — Pour définir l'espace anti-de Sitter, on procède comme ci-dessus mais en partant cette fois-ci d'une forme quadratique de signature  $(2, n)$ . Plus précisément : soit  $\mathbb{R}^{2,n}$  l'espace affine de dimension  $n + 2$  muni des coordonnées  $(a, b, x_1, \dots, x_n)$  et de la forme quadratique  $Q_{2,n} = -a^2 - b^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$ .

**Définition 2.2.1.** — *L'espace anti-de Sitter  $AdS_{n+1}$  est le lieu  $\{Q_{2,n} = -1\}$  équipé de la métrique lorentzienne obtenue par restriction de la forme quadratique ambiante.*

Contrairement au cas de  $\mathbb{H}^n$ , il n'y a pas lieu ici de choisir une composante connexe :  $\{Q_{2,n} = -1\}$  est connexe.

**Exercice 2.2.2.** — Vérifier que la métrique ainsi obtenue est bien lorentzienne, i.e. de signature  $(1, n)$ .

Là encore, et avec une preuve similaire :

**Proposition 2.2.3.** — *Chaque géodésique de  $\text{AdS}_{n+1}$  est l'intersection entre  $\text{AdS}_{n+1}$  et un sous-espace vectoriel  $P_0$  de  $\mathbb{R}^{2,n}$  de dimension 2.* ■

Il y a cependant ici une nouveauté par rapport au cas de l'espace hyperbolique, selon le type du plan  $P_0$  :

- Si  $P_0$  est définie négatif, alors la géodésique est de type temps.
- Si  $P_0$  est dégénéré, i.e. de radical non-trivial, alors la géodésique est lumière,
- enfin, si  $P_0$  est de type  $(1, 1)$ , alors la géodésique est de type espace.

Remarquons que les géodésiques temporelles sont périodiques.

**2.2.2. Le modèle de Klein.** — On note  $\mathbb{P}^{n+1}$  le projectif de  $\mathbb{R}^{2,n}$  ; il nous sera aussi utile de considérer son revêtement double  $\mathbb{S}^{n+1}$ , i.e. le quotient de  $\mathbb{R}^{2,n} - \{0\}$  par la relation qui identifie deux vecteurs si l'un est multiple de l'autre par un scalaire positif. Remarquons que  $\mathbb{S}^{n+1}$  est topologiquement une sphère : on l'identifiera du reste souvent à la sphère de rayon 1 dans  $\mathbb{R}^{2,n}$  pour la métrique euclidienne  $Q_{n+2} = a^2 + b^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$ . On notera  $[a; b; x_1; \dots; x_n]$  les éléments de  $\mathbb{S}^{n+1}$ , étant entendu que les coordonnées  $a, b, x_1$ , etc... sont définies modulo multiplication simultanée par un nombre positif non nul. Pour toute partie  $A$  de  $\mathbb{R}^{2,n}$ , nous noterons  $[A]$  la projection de  $A - \{0\}$  dans  $\mathbb{S}^{n+1}$ .

La notion de droite (ou sous-espace) projective dans  $\mathbb{P}^{n+1}$  est familière ; nous aurons besoin ici de la notion relevée dans  $\mathbb{S}^{n+1}$  : un *cercle projectif* est la projection dans  $\mathbb{S}^{n+1}$  d'un 2-plan de  $\mathbb{R}^{2,n}$  - si on préfère considérer  $\mathbb{S}^{n+1}$  comme une sphère dans  $\mathbb{R}^{2,n}$ , on peut définir les cercles projectifs comme les intersections avec des 2-plans.

**Définition 2.2.4.** — *Le modèle de Klein de  $\text{AdS}_{n+1}$  est la projection de  $\text{AdS}_{n+1}$  dans  $\mathbb{S}^{n+1}$ . Il est noté  $\text{ADS}_{n+1}$ .*

Il convient de remarquer que la projection de  $\text{AdS}_{n+1}$  sur son modèle de Klein est un difféomorphisme : on peut pousser la métrique lorentzienne sur son image. On considère donc  $\text{ADS}_{n+1}$  comme muni de cette métrique lorentzienne.

Le principal avantage de ce modèle est que les géodésiques s'y représentent assez bien : ce sont les intersections entre  $\text{ADS}$  et les cercles projectifs. Il a aussi l'avantage d'être recouvert par des *cartes affines*. Plus généralement, il est bien connu que  $\mathbb{P}^{n+1}$  et  $\mathbb{S}^{n+1}$  sont recouverts par des cartes affines : choisissons un élément  $v$  non-nul dans  $\mathbb{R}^{2,n}$  ; l'ouvert des points  $p$  tels que  $\langle v|p \rangle < 0$  se projette dans  $\mathbb{S}^{n+1}$  en un ouvert  $U(v)$  homéomorphe à  $\mathbb{R}^{n+1}$ . L'homéomorphisme canonique  $U(v) \approx \mathbb{R}^{n+1}$  envoie les cercles projectifs sur les droites affines de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Nous n'utiliserons que des ouverts  $U(v)$  pour un vecteur  $v$  de norme  $-1$ .

**Définition 2.2.5.** — *Soit  $p_0$  un élément de  $\text{AdS}_{n+1}$ . On note  $\mathcal{A}(p_0)$  l'intersection entre  $\text{AdS}_{n+1}$  et le demi-espace  $\{p|\langle p|p_0 \rangle < 0\}$  : c'est un ouvert de  $\text{AdS}_{n+1}$  contenant  $p_0$ . On l'appelle ouvert affine centré en  $p_0$ . On note  $[\mathcal{A}](p_0)$  sa projection dans  $\text{ADS}_{n+1} \subset \mathbb{S}^{n+1}$ .*

Écrivons plus en détail le cas  $p_0 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ . Chaque élément de  $\text{ADS}_{n+1}$  admet un unique relevé  $p$  tel que  $\langle p|p_0 \rangle = -1$ , i.e. un élément  $(1, b, x_1, \dots, x_n)$ . Ainsi,  $[\mathcal{A}](p_0)$

s'identifie projectivement à l'ouvert  $\{(b, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{1,n} \mid -b^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\}$ , i.e. l'intérieur de l'hyperboloïde à une nappe. Notez que dans ce système de coordonnées celles de  $p_0$  sont nulles.

L'inconvénient majeur de ces cartes est qu'aucune d'entre elle ne contient  $\text{AdS}_{n+1}$  tout entier : chacune ne révèle qu'une portion de AdS. C'est complètement similaire au fait qu'il faut plusieurs cartes affines pour recouvrir  $\mathbb{P}^{n+1}$ . Donnons nous un point  $p_0$  et son opposé  $-p_0$  ; ici nous prenons l'exemple,  $\pm p_0 = (\pm 1, 0, \dots, 0)$  pour simplifier les écritures, mais tout choix de  $p_0$  (de norme  $-1$  !) conviendrait. Les cartes affines  $[\mathcal{A}](p_0)$  et  $[\mathcal{A}](-p_0)$  recouvrent tout  $\text{AdS}_{n+1}$ , à l'exception du lieu des points  $[a; b; x_1; \dots; x_n]$  orthogonaux à  $\pm p_0$ . Dans l'exemple que l'on s'est pris, il s'agit du lieu  $\{a = 0\}$ .

Ce lieu  $\{a = 0\} = \{(0, b, x_1, \dots, x_n) \mid -b^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = -1\} = [p_0^\perp]$  admet deux composantes connexes : celle où  $b$  prend des valeurs  $\geq 1$ , et celle où  $b$  prend des valeurs  $\leq -1$ . On note  $\mathbb{H}^\pm(p_0)$  ces composantes connexes : chacune, munie de la métrique riemannienne induite, est en effet isométrique à l'espace hyperbolique. Distinguer ces composantes l'une de l'autre requiert la donnée supplémentaire suivante : observer que pour tout  $\theta$  l'application linéaire  $R_\theta$  de  $\mathbb{R}^{2,n}$  dans lui-même qui agit trivialement sur les coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  et qui agit par rotation d'angle  $\theta$  sur les coordonnées  $(a, b)$  est une isométrie de  $Q_{2,n}$  :

$$R_\theta(a, b, x_1, \dots, x_n) = (a \cos(\theta) + b \sin(\theta), -a \sin(\theta) + b \cos(\theta), x_1, \dots, x_n)$$

On peut alors définir  $\mathbb{H}^+(p_0)$  comme étant la composante de  $[p_0^\perp]$  contenant  $R_{\pi/2}(p_0)$ , et  $\mathbb{H}^-(p_0)$  comme celle contenant  $R_{-\pi/2}(p_0)$ .

En résumé,  $\text{AdS}_{n+1}$  est l'union de deux cartes affines (domaine intérieur à un hyperboloïde à une nappe) recollées "à l'infini" le long de deux copies de l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^n$ .

**Exercice 2.2.6.** — Montrer que  $\mathbb{H}^\pm(p_0)$  est totalement géodésique.

**2.2.3. Causalité dans AdS : premières notions.** — On peut étendre, comme dans toute variété lorentzienne, la nomenclature sur les vecteurs tangents ainsi que les types de courbes ayant cours dans l'espace de Minkowski :

**Définition 2.2.7.** — Un vecteur de norme strictement négative est dit de type temps, ou plus simplement temporel. Un vecteur de norme strictement positive est dit de type espace, ou spatial. Un vecteur non-nul de norme nulle est dit de type lumière, nul ou isotrope. Enfin, un vecteur non-nul de type temps ou lumière est dit (de type) causal.

**Définition 2.2.8.** — Une courbe immergée de classe  $C^1$  est dite de type temps ou temporelle (respectivement spatiale, lumière, causale) si tous ses vecteurs tangents sont de type temps (respectivement espace, lumière ou causal).

**Définition 2.2.9.** — Le temps propre d'une courbe causale  $c : [a, b] \rightarrow M$  dans  $\text{AdS}_{n+1}$  est l'intégrale sur  $[a, b]$  de la racine carrée de l'opposé de la norme du vecteur tangent  $c'(t)$ .

On peut aussi définir une orientation temporelle. Pour ce faire, on considère le champ de vecteurs  $X_0$  sur  $\text{AdS}_{n+1}$  qui en un point  $(a, b, x_1, \dots, x_n)$  vaut  $(-b, a, 0, \dots, 0)$  : le flot de ce champ de vecteurs est  $(t, p) \rightarrow R_t(p)$ . Remarquons que  $X_0$  est de type temps, i.e. partout de norme négative :

**Définition 2.2.10.** — *Un vecteur de type causal tangent à  $\text{AdS}_{n+1}$  en un point  $p$  est dit orienté vers le futur, ou encore futur, si son produit scalaire avec  $X_0(p)$  est négatif. Sinon, on dit que le vecteur est orienté vers le passé, ou passé.*

Tout comme dans  $\mathbb{R}^{1,n}$  :

**Définition 2.2.11.** — *Une courbe causale  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{1,n}$  de classe  $C^1$  est dite orientée vers le futur (resp. vers le passé) si tous ses vecteurs tangents sont orientés vers le futur (resp. vers le passé).*

*On simplifie là encore la terminologie en parlant de courbes causales futur ou passé.*

On peut aussi définir la notion de futur, passé ; relatifs à un ouvert. On définit aussi la notion de parties achronales, acausales, localement achronales, localement acausales, etc...

Pour la notion de courbe causale topologique, nous avons besoin d'aménager et compliquer la définition que nous avons pris pour l'espace de Minkowski :

**Définition 2.2.12.** — *L'image d'une application continue  $c : ]a, b[ \rightarrow \text{AdS}_{n+1}$  est une courbe causale topologique futur si pour tout temps  $t_0$  et tout voisinage ouvert  $U$  de  $c(t_0)$  dans  $\text{AdS}_{n+1}$  il existe un voisinage  $I = ]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$  tel que pour tout  $t$  dans  $I$  on a :*

- si  $t \leq t_0$  :  $c(t)$  est dans le passé de  $c(t_0)$  relatif à  $U$ ,
- si  $t \geq t_0$  :  $c(t)$  est dans le futur de  $c(t_0)$  relatif à  $U$ ,

**2.2.4. Le modèle conforme d'Einstein.** — Il s'agit d'un système de coordonnées où il est particulièrement aisé d'appréhender la relation de causalité. Nous avons dans la section précédente mis en évidence deux éléments importants :

- $\text{AdS}_{n+1}$  contient des copies isométriques de  $\mathbb{H}^n$ ,
- il existe un groupe à un paramètre  $R_\theta$  d'isométries.

En poussant par  $R_\theta$  une copie de  $\mathbb{H}^n$  on obtient une identification  $\text{AdS}_{n+1} \approx \mathbb{S}^1 \times \mathbb{H}^n$ . Plus précisément : soit  $\varphi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{H}^n \rightarrow \text{AdS}_{n+1}$  l'application qui envoie  $(\theta, (t, x_1, \dots, x_n))$  sur  $(t \sin(\theta), t \cos(\theta), x_1, \dots, x_n)$ . C'est un difféomorphisme ; la métrique AdS s'écrit dans ces coordonnées :

$$ds_{AdS}^2 = -t^2 d\theta^2 + ds_{hyp}^2$$

où  $ds_{hyp}^2$  est la métrique hyperbolique, et  $t : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est l'application qui à un point de  $\mathbb{H}^n$  associe sa coordonnée  $t$  (on peut remarquer que  $-t^2$  est la norme du champ de vecteurs Killing engendrant  $R_\theta$ ).

Il va s'avérer extrêmement utile de diviser cette métrique par  $t^2$ . D'une part, on ne change pas ce faisant la notion de courbes causales et parties achronales. D'autre part, après cette division, on obtient une métrique dont les propriétés causales sont plus évidentes.

Soit  $\mathcal{H}^n$  l'hémisphère de dimension  $n$ , i.e. l'ouvert de la sphère unité  $\mathbb{S}^n$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  formé des points dont la dernière coordonnée  $x_{n+1}$  est strictement positive. On note  $ds_0^2$  la métrique sur  $\mathcal{H}^n$  obtenue par restriction de la métrique ambiante  $Q_{n+1}$ .

**Lemme 2.2.13.** — *La variété riemannienne  $(\mathbb{H}^n, t^{-2} ds_{hyp}^2)$  est isométrique à l'hémisphère  $(\mathcal{H}^n, ds_0^2)$ .*

**Preuve** L'isométrie est l'application  $\phi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathcal{H}^n$  qui à  $(t, x)$  associe  $(x/t, 1/t)$ . ■

**Corollaire 2.2.14.** — *La variété lorentzienne  $(\text{AdS}_{n+1}, t^{-2} ds_{AdS}^2)$  est isométrique à  $\mathbb{S}^1 \times \mathcal{H}^n$  équipé de la métrique  $-d\theta^2 + ds_0^2$ .* ■

*2.2.5. Le revêtement universel.* — Dans tous les énoncés suivants, on utilise l'identification  $\text{AdS}_{n+1} \approx \mathbb{S}^1 \times \mathcal{H}^n$ . On note  $d_0$  la distance sur  $\mathcal{H}^n$  induite par  $ds_0^2$ . On distingue un point remarquable sur  $\mathcal{H}^n$  : le pôle nord  $N_0 = (0, \dots, 0, 1)$ . C'est l'unique point à  $d_0$ -distance  $\pi/2$  de chaque point de  $\partial\mathcal{H}^n \subset \mathbb{S}^n$ .

**Corollaire 2.2.15.** — *Les courbes causales topologiques orientées vers le futur sont, après reparamétrage, les courbes de la forme  $s \rightarrow (\exp(is), x(s))$  où  $s \rightarrow x(s)$  est une courbe localement 1-Lipschitz de  $]a, b[$  dans  $(\mathcal{H}^n, ds_0^2)$ .* ■

Il apparaît donc clairement que la relation de causalité dans  $\text{AdS}_{n+1}$  est triviale : le futur de tout point, ainsi que le passé de tout point, est  $\text{AdS}_{n+1}$  tout entier !

Il n'en va pas de même pour le revêtement universel :

**Définition 2.2.16.** — *On appelle espace anti-de Sitter universel de dimension  $n+1$ , et on note  $\widetilde{\text{AdS}}_{n+1}$ , le produit  $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$  équipé de la métrique  $-t^2 d\theta^2 + ds_{hyp}^2$ .*

Ainsi, d'après le corollaire 2.2.14 l'application qui à  $(\theta, p)$  associe  $([\theta], p)$ , où  $[\theta]$  désigne la classe de  $\theta$  modulo  $2\pi$ , induit une isométrie locale  $p : \widetilde{\text{AdS}}_{n+1} \rightarrow \text{AdS}_{n+1}$ .

Les propriétés causales de  $\widetilde{\text{AdS}}_{n+1}$  sont alors non-triviales.

**Lemme 2.2.17.** — *Les courbes causales topologiques orientées vers le futur de  $\widetilde{\text{AdS}}_{n+1}$  sont, après reparamétrage, les courbes de la forme  $\theta \rightarrow (\theta, x(\theta))$  où  $\theta \rightarrow x(\theta)$  est une courbe localement 1-Lipschitz de  $]a, b[$  dans  $(\mathcal{H}^n, ds_0^2)$ .* ■

On en déduit :

**Corollaire 2.2.18.** — *Le futur d'un point  $(\theta_0, x_0)$  de  $\widetilde{\text{AdS}}_{n+1} \approx \mathbb{R} \times \mathcal{H}^n$  est l'ensemble des points  $(\theta, x)$  tel que  $\theta - \theta_0 > d_0(x, x_0)$ .* ■

**Remarque 2.2.19.** — En particulier, comme la distance maximale entre deux points de  $\mathcal{H}^n$  est  $\pi$ , tous les points de coordonnée  $\theta$  plus grande que  $\theta_0 + \pi$  appartient au futur de  $(\theta_0, x_0)$ . Distinguons aussi le cas où  $x_0$  est le pôle nord  $N_0$  : le futur de  $(\theta_0, N_0)$  contient tous les points de coordonnée  $\theta$  strictement supérieur à  $\theta_0 + \pi/2$ .

**Lemme 2.2.20.** — *Un rayon causal topologique futur  $s \rightarrow (\theta, x(\theta))$  où  $\theta \rightarrow x(\theta)$  est une courbe localement 1-Lipschitz de  $[0, b[$  dans  $(\mathcal{H}^n, ds_0^2)$ , est inextensible si et seulement si  $b = \infty$ , ou  $x$  s'étend continûment en  $b$  par un point  $x(b)$  dans  $\partial\mathcal{H}^n$ . ■*

**2.3. Parties achronales.** — Là encore, l'abondance de courbes causales qui se referment montre qu'il n'y pas de partie achronale dans  $\text{AdS}_{n+1}$ ; seules sont donc intéressantes l'étude des parties achronales dans  $\widetilde{\text{AdS}}_{n+1}$ .

*2.3.1. Premières propriétés.* — Les preuves des résultats analogues effectuées dans le cas de Minkowski montrent :

**Proposition 2.3.1.** — *Toute partie achronale de  $\widetilde{\text{AdS}}_{n+1}$  est le graphe  $G(f)$  d'une application 1-Lipschitz  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  où  $\Omega$  est un sous-ensemble de  $\mathcal{H}^n$ . Elle est sans bord si et seulement si  $\Omega$  est ouvert.*

*Enfin,  $G(f)$  est un fermé achronal sans bord de  $\widetilde{\text{AdS}}_{n+1}$  si et seulement si  $\Omega = \mathcal{H}^n$  tout entier.*

**Preuve** Exercice. ■

L'analogie de la proposition 1.3.1 est lui aussi vrai :

**Proposition 2.3.2.** — *Toute partie localement achronale sans bord de  $\widetilde{\text{AdS}}_{n+1}$  qui est de plus fermée et connexe est le graphe d'une application 1-Lipschitz  $f : \mathcal{H}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Elle est en particulier achronale.*

**Preuve** C'est essentiellement la même modulo quelques détails laissés au lecteur. ■

Enfin :

**Lemme 2.3.3.** — *Soit  $\sigma : \Sigma \rightarrow \widetilde{\text{AdS}}_{n+1}$  une immersion isométrique de classe  $C^1$  d'une variété riemannienne connexe  $(\Sigma, g)$ . On suppose que  $(\Sigma, g)$  est complète. Alors,  $\sigma$  est un plongement, et son image est un fermé achronal sans bord de  $\mathbb{R}^n$ , i.e. le graphe  $G(f)$  d'une application contractante de classe  $C^1$ .*

**Preuve** C'est un aménagement de la preuve du lemme 1.3.3 : il découle lui aussi du fait que  $\pi_0 \circ \sigma$  - où  $\pi_0 : \widetilde{\text{AdS}}_n \approx \mathbb{R} \times \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$  est la projection sur le deuxième facteur - augmente les distances. ■

*2.3.2. Prolongement de parties achronales.* —

**Proposition 2.3.4.** — *Soit  $A = G(f_0)$  une partie achronale dans  $\widetilde{\text{AdS}}_{n+1}$  non-vide. Alors, il existe deux applications 1-Lipschitz  $f^\pm : \mathcal{H}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telles que les fermés achronaux sans bord contenant  $A$  sont exactement les graphes  $G(f)$  d'applications 1-Lipschitz vérifiant :*

$$f^- \leq f \leq f^+$$

**Preuve** Prendre mot pour mot (en remplaçant  $d_{euc}$  par  $d_0$ ) celle dans Minkowski. ■

**2.4. L'univers d'Einstein.** — L'univers d'Einstein  $\text{Ein}_n$  est le bord d'une compactification de l'espace anti-de Sitter  $\text{AdS}_{n+1}$ . On peut le construire de deux manières.

*2.4.1. Modèle de Klein.* — On définit - et on note  $\mathbb{EIN}_n$  - l'espace (ou univers) d'Einstein comme étant la projection radiale dans  $\mathbb{S}^{n+1}$  du cône d'annulation  $\mathcal{C}_n = \{p \in \mathbb{R}^{2,n} | Q_{2,n} = 0\}$  : en d'autres termes, c'est la frontière de  $\text{AdS}_{n+1}$  dans  $\mathbb{S}^{n+1}$ . La structure canonique sur  $\mathbb{EIN}_n$  n'est pas une métrique lorentzienne, mais une *classe conforme* :

**Définition 2.4.1.** — *La classe conforme d'une métrique  $g$  (pseudo-)riemannienne sur une variété  $M$  est l'ensemble des métriques de la forme  $e^f g$ , où  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  est une application (comprendre : si  $v$  est un élément de  $T_x M$ , alors  $e^f g(v) = e^{f(x)} g_x(v)$ ).*

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{EIN}_n$ , et soit  $s : U \rightarrow \mathbb{R}^{2,n}$  une section locale de la projection radiale  $\text{Pr} : \mathbb{R}^{2,n} - \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$  on peut définir une fonction  $g_s$  sur  $TU$  par :  $g_s(\zeta) = Q_{2,n}(ds(\zeta))$ . Si on change la section  $s$ , i.e. si on la multiplie par une fonction strictement positive  $f$ , on ne fait que multiplier  $g_s$  par  $f^2$ . Ainsi, même s'il est vrai que la métrique  $g_s$  dépend du choix de la section  $s$ , sa classe conforme n'en dépend pas. L'univers d'Einstein est donc bien naturellement muni d'une classe conforme de métrique.

*2.4.2. Le modèle conforme.* — Si on choisit comme section - globale! -  $s$  celle qui envoie  $[p]$  sur l'unique représentant  $p$  de norme +2 pour  $Q_{n+2}$ , un calcul élémentaire montre que la métrique  $g_{s_0}$  est isométrique à la métrique  $-d\theta^2 + ds_0^2$  sur  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}$ .

Pour distinguer ces deux modèles l'un de l'autre, on note  $\text{Ein}_n$  le produit  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}$  muni de la classe conforme de la métrique  $-d\theta^2 + ds_0^2$ . Il peut être même encore plus judicieux de considérer  $\text{Ein}_n$  comme étant la frontière de  $\text{AdS}_{n+1} \approx \mathbb{S}^1 \times \mathcal{H}^n$  dans  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^n$ .

*2.4.3. Plongement conforme de AdS dans Ein.* — S'il est vrai que  $\text{Ein}_n$  doit être pensé comme le bord de  $\text{AdS}_{n+1}$ , on peut aussi l'envisager comme contenant  $\text{AdS}_n$ . Plus précisément : considérons dans  $\mathbb{R}^{2,n}$  l'hyperplan affine  $\{x_n = 1\}$ . Son intersection avec  $\mathcal{C}_n$  est le lieu des points  $(a, b, x_1, \dots, x_{n-1}, 1)$  tels que  $-a^2 - b^2 + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = -1$ . On en déduit que si  $V$  désigne l'ouvert de  $\mathbb{EIN}_n$  projection des points de  $\mathbb{R}^{2,n}$  de coordonnée  $x_n$  strictement positive, et si  $s : V \rightarrow \mathbb{R}^{2,n}$  est la section qui à un point  $[p]$  associe son représentant de coordonnée  $x_n$  valant 1, alors  $(V, g_s)$  est isométrique à  $\text{AdS}_n$ . Ceci montre bien que  $V$  est l'image d'un plongement conforme de  $\text{AdS}_n$ .

*2.4.4. Cartes affines.* —

**Définition 2.4.2.** — *Soit  $p_0$  un élément de  $\text{AdS}_{n+1}$ . On note  $\partial\mathcal{A}(p_0)$  l'intersection entre  $\mathbb{EIN}_n$  et la projection du demi-espace  $\{p | \langle p | p_0 \rangle < 0\}$ . On l'appelle ouvert affine de  $\text{Ein}_n$  centré en  $p_0$ .*

Comparons avec la définition 2.2.5 : l'ouvert  $\partial\mathcal{A}(p_0)$  est la frontière de  $\mathcal{A}(p_0)$  dans la carte affine de  $\mathbb{S}^{n+1}$ . Ainsi, dans cette carte affine,  $\partial\mathcal{A}(p_0)$  est l'hyperboloïde  $\{(b, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{1,n} \mid -b^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ . Par ailleurs, les cartes affines dans  $\text{AdS}_n$  sont aussi les intersections entre  $\text{AdS}_n \approx V \subset \mathbb{E}\mathbb{I}\mathbb{N}_n$  et les cartes affines de  $\text{Ein}_n$ . En effet, si  $p_0 = (a, b, x_1, \dots, x_{n-1})$  est un point de  $\text{AdS}_n$ , le plongement conforme de  $\mathcal{A}(p_0) \subset \text{AdS}_n$  dans  $V \subset \mathbb{E}\mathbb{I}\mathbb{N}_n$  est égal à l'intersection entre  $V$  et  $\partial\mathcal{A}(\hat{p}_0)$ , où  $\hat{p}_0$  est l'élément  $(a, b, x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$  de  $\text{AdS}_{n+1}$ .

**2.4.5. Courbes causales.** — L'univers d'Einstein admet une classe conforme lorentzienne canonique : même s'il n'est pas judicieux de parler de la norme des vecteurs tangents, il est tout-à-fait licite de parler du *signe* de leur norme : on peut encore distinguer les vecteurs de type temps, causal, espace, etc... ainsi que pour les courbes.

On choisit une orientation temporelle sur  $\text{Ein}_n$  : celle pour laquelle la coordonnée  $\theta$  croît localement le long des courbes causales futur. Comme pour l'espace anti-de Sitter, la relation de causalité dans l'univers d'Einstein est triviale. Il est plus intéressant d'étudier celle dans l'*Univers d'Einstein universel*  $\widetilde{\text{Ein}}_n$ , qui est le produit  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$  muni de la métrique  $-\text{d}\theta^2 + \text{d}s_0^2$ . Les propriétés causales établies dans l'espace de Minkowski restent vraies, nous les énonçons sans preuve :

**Lemme 2.4.3.** — *Les courbes causales topologiques orientées vers le futur de  $\widetilde{\text{Ein}}_n$  sont, après reparamétrage, les courbes de la forme  $\theta \rightarrow (\theta, x(\theta))$  où  $\theta \rightarrow x(\theta)$  est une courbe localement 1-Lipschitz de  $]a, b[$  dans  $(\mathbb{S}^{n-1}, \text{d}s_0^2)$ . Celles qui sont inextensibles sont celles ayant pour domaine de définition  $\mathbb{R}$  tout entier.* ■

**Corollaire 2.4.4.** — *Le futur d'un point  $(\theta_0, x_0)$  de  $\widetilde{\text{Ein}}_n \approx \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$  est l'ensemble des points  $(\theta, x)$  tel que  $\theta - \theta_0 > d_0(x, x_0)$ .* ■

**2.4.6. Parties achronales.** —

**Proposition 2.4.5.** — *Toute partie achronale de  $\widetilde{\text{Ein}}_n$  est le graphe  $G(f)$  d'une application 1-Lipschitz  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  où  $\Omega$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Elle est sans bord si et seulement si  $\Omega$  est ouvert. Enfin,  $G(f)$  est un fermé achronal sans bord de  $\widetilde{\text{Ein}}_n$  si et seulement si  $\Omega = \mathbb{S}^{n-1}$  tout entier.* ■

**Proposition 2.4.6.** — *Toute partie localement achronale sans bord de  $\widetilde{\text{Ein}}_n$  qui est de plus fermée et connexe est achronale.* ■

**2.4.7. Prolongement de parties achronales.** — Comme dans  $\widetilde{\text{AdS}}$  :

**Proposition 2.4.7.** — *Soit  $A = G(f_0)$  une partie achronale dans  $\widetilde{\text{Ein}}_n$  non-vide. Il existe deux applications 1-Lipschitz  $f^\pm : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telles que les fermés achronaux sans bord contenant  $A$  sont exactement les graphes  $G(f)$  d'applications 1-Lipschitz vérifiant :*

$$f^- \leq f \leq f^+$$

■

*2.4.8. Prolongement à l'infini.* — Dans cette section,  $A$  désigne un fermé achronal sans bord de  $\widetilde{\text{AdS}}_{n+1}$  : c'est le graphe d'une application 1-Lipschitz  $f : \mathcal{H}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Bien qu'étant fermé dans  $\widetilde{\text{AdS}}_{n+1}$ ,  $A$  n'est pas fermé dans  $\widetilde{\text{Ein}}_{n+1}$  ! En fait, étant 1-Lipschitz,  $f : \mathcal{H}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se prolonge continument et de manière unique en une application 1-Lipschitz  $\bar{f} : \partial\mathcal{H}^n \approx \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ . Le graphe  $G(\bar{f})$  est un fermé achronal de  $\widetilde{\text{Ein}}_n$  qui est aussi l'ensemble des points adhérents à  $G(f)$ .

**Définition 2.4.8.** — *Le graphe  $G(\bar{f})$  est appelé bord de  $A$  et noté  $\partial A$ .*

Inversement :

**Proposition 2.4.9.** — *Soit  $\Lambda_0 = G(\bar{f}_0)$  un fermé achronal sans bord dans  $\widetilde{\text{Ein}}_n$  non-vide. Alors, il existe deux applications 1-Lipschitz  $f^\pm : \mathcal{H}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telles que les fermés achronaux sans bord de  $\widetilde{\text{AdS}}_{n+1}$  dont le bord dans  $\widetilde{\text{Ein}}_{n+1}$  est  $\Lambda_0$  sont exactement les graphes  $G(f)$  d'applications 1-Lipschitz vérifiant :*

$$f^- \leq f \leq f^+$$

**Preuve** Poser, pour tout  $x$  dans  $\mathcal{H}^n$  :

$$\begin{aligned} f^-(x) &= \text{Sup}_{y \in \mathbb{S}^{n-1}} \{\bar{f}_0(y) - d_0(x, y)\} \\ f^+(x) &= \text{Inf}_{y \in \mathbb{S}^{n-1}} \{\bar{f}_0(y) + d_0(x, y)\} \end{aligned}$$

■

**Définition 2.4.10.** — *L'ouvert  $\{(\theta, x) | f^-(x) < \theta < f^+(x)\}$  est appelé domaine de développement de  $\Lambda_0$  et noté  $\mathcal{I}(\Lambda_0)$ .*

Montrer qu'ici l'analogue du lemme 1.4.3 est plus facile, et découle directement de la compacité de  $\Lambda_0$  :

**Lemme 2.4.11.** — *Pour tout élément  $x$  de  $\mathcal{H}^n$  il existe deux éléments  $y^+$  et  $y^-$  de  $\Lambda_0$  tels que  $f^-(x) = \bar{f}_0(y^-) - d_0(x, y^-)$  et  $f^+(x) = \bar{f}_0(y^+) + d_0(x, y^+)$ .* ■

Autre nouveauté :

**Proposition 2.4.12.** — *On a l'alternative suivante :*

- soit  $f^-(x) < f^+(x)$  pour tout  $x$  dans  $\mathcal{H}^n$ ,
- soit il existe un point  $x_0$  dans  $\mathbb{S}^{n-1} = \partial\mathcal{H}^n$  tel que pour tout  $x$  :

$$f^-(x) = f^+(x) = d_0(x_0, x) + \bar{f}_0(x_0)$$

Le deuxième cas de cette alternative est dit *totalelement dégénéré*. Dans ce cas,  $G(f^-) = G(f^+)$  est un sous-espace totalement géodésique isotrope.

**Preuve** Soit  $x$  un point de  $\mathcal{H}^n$  tel que  $f^-(x) = f^+(x)$ . D'après le lemme 2.4.11 on a :

$$\bar{f}_0(y^-) - d_0(x, y^-) = f^-(x) = f^+(x) = \bar{f}_0(y^+) + d_0(x, y^+)$$

Donc :

$$d_0(y^-, y^+) \geq \bar{f}_0(y^-) - \bar{f}_0(y^+) = d_0(y^-, x) + d_0(x, y^+)$$

Or comme  $\partial\mathcal{H}^n$  est totalement géodésique dans  $\mathbb{S}^n$ , cette inégalité n'est possible que si  $y^-$  et  $y^+$  sont des points antipodaux de  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Alors, pour tout  $x$  dans  $\mathcal{H}^n$  on a :

$$d_0(y^-, x) = \pi - d_0(y^+, x)$$

La proposition s'en déduit, avec  $x_0 = y^+$ . ■

Enfin :

**Proposition 2.4.13.** — *Supposons  $\Lambda_0$  non totalement dégénéré. Alors, il existe un fermé acausal sans bord  $A$  dont le bord  $\partial A$  est  $\Lambda_0$ .*

**Preuve** Je remercie A. Fathi pour m'avoir communiqué la preuve de cette proposition. Quitte à translater dans la coordonnée  $\theta$  on peut supposer que  $f^-$  et  $f^+$  sont partout positives. Pour tout entier  $n \geq 1$  et tout  $x$  dans  $\mathcal{H}^n \cup \mathbb{S}^{n-1}$ , soit :

$$g_n(x) = \text{Sup}(f^-(x), (1 - \frac{1}{n})f^+(x) - \frac{1}{n})$$

On définit alors :

$$g(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{g_n(x)}{2^n}$$

Remarquons que chaque  $g_n(x)$  est majoré par le nombre positif  $f^+(x)$  et minoré par le nombre positif  $f^-(x)$ , ce qui montre que, à  $x$  fixé, la série  $g(x)$  converge absolument.

Nous avons plusieurs points à vérifier :

– Si  $x$  est dans  $\mathbb{S}^{n-1}$ , alors  $g(x) = \bar{f}_0(x)$ . En effet, on a alors  $g_n(x) = \text{Sup}(\bar{f}_0(x), (1 - \frac{1}{n})\bar{f}_0(x) - \frac{1}{n}) = \bar{f}_0(x)$  et donc  $g(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\bar{f}_0(x)}{2^n} = \bar{f}_0(x)$ .

– Chaque  $g_n$  est 1-Lipschitz : bien sûr, puisque le supremum  $\rho = \text{Sup}\{\phi, \psi\}$  de deux fonctions 1-Lipschitz est lui-même 1-Lipschitz.

–  $g$  est contractante. Puisque chaque  $g_n$  est 1-Lipschitz, il en est de même pour  $g$ . Supposons qu'elle ne soit pas contractante, i.e. qu'il existe  $x, x'$  tels que  $g(x) - g(x') = d_0(x, x')$  et  $x \neq x'$ . Alors :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{g_n(x) - g_n(x')}{2^n} = d_0(x, x')$$

ce qui, comme chaque  $g_n$  est 1-Lipschitz, n'est possible que si pour tout  $n$  on a  $g_n(x) - g_n(x') = d_0(x, x')$ .

Comme  $\Lambda_0$  n'est pas totalement dégénéré on a  $f^-(x) < f^+(x)$ . Comme  $(1 - \frac{1}{n})f^+(x) - \frac{1}{n}$  converge vers  $f^+(x)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , pour  $n$  assez grand,  $g_n(x)$  est  $(1 - \frac{1}{n})f^+(x) - \frac{1}{n}$ . Or,  $g_n(x') \geq (1 - \frac{1}{n})f^+(x') - \frac{1}{n}$ . On obtient alors une contradiction entre le fait que l'application  $x \rightarrow (1 - \frac{1}{n})f^+(x) - \frac{1}{n}$  est contractante et l'égalité  $g_n(x) - g_n(x') = d_0(x, x')$ . ■

**2.5. Interprétation dans le modèle de Klein.** — Dans tout ce qui précède, nous nous sommes placés dans le modèle conforme universel  $\widetilde{\text{Ein}}_n$  pour établir les propriétés causales. Mais s'il est bien vrai que ce modèle est le plus adapté pour démontrer ces résultats, il est utile de les décrire dans le modèle de Klein  $\mathbb{EIN}_n$ .

*2.5.1. Premières remarques.* — Tout d'abord, on remarque que les résultats ci-dessus portent sur l'univers d'Einstein universel  $\widetilde{\text{Ein}}_n$ ; pour les interpréter dans  $\mathbb{EIN}_n$  il faut donc d'abord savoir projeter dans  $\text{Ein}_n \approx \mathbb{EIN}_n$ .

**Définition 2.5.1.** — On note  $\Pi : \widetilde{\text{Ein}}_n \rightarrow \text{Ein}_n$  l'application qui à  $(\theta, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$  associe  $([\theta], x) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}$  où  $[\theta]$  est la classe de  $\theta$  modulo  $2\pi$ .

Dans  $\mathbb{EIN}_n \subset \mathbb{S}^{n+1}$  il y a la notion importante de points *antipodaux* :

**Définition 2.5.2.** — L'*antipodie* de  $\mathbb{EIN}_n$  (resp.  $\mathbb{S}^n$ ) est l'application qui envoie un point  $[p]$  sur son opposé  $[-p]$ .

**Lemme 2.5.3.** — Dans les coordonnées  $([\theta], x)$  de  $\text{Ein}_n \approx \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}$ , l'*antipodie* de  $\text{Ein}_n$  est l'application qui envoie  $([\theta], x)$  sur  $([\theta + \pi], -x)$ . ■

*2.5.2. Cartes affines dans le modèle conforme.* — Si on choisit  $p_0 = (1, 0, \dots, 0)$ , comme  $[p_0^\perp] \cap \mathbb{EIN}_n$  s'exprime dans le modèle conforme  $\text{Ein}_n$  par  $\{\theta = 0 \bmod \pi\}$ , on obtient :

**Lemme 2.5.4.** — Pour tout  $\theta_0$ , le lieu des points  $([\theta], x)$  avec  $\theta_0 < \theta < \theta_0 + \pi$  est une carte affine de  $\mathbb{EIN}_n \approx \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}$ . ■

Il est donc naturel de d'appeler carte affine dans  $\widetilde{\text{Ein}}_n$  tout ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$  de la forme  $]\theta_0, \theta_0 + \pi[$ . De manière plus générale, on appelle *carte affine dans  $\widetilde{\text{Ein}}_n$*  tout ouvert de  $\widetilde{\text{Ein}}_n$  tel que la restriction de  $\Pi$  à l'ouvert soit injective et admet pour image une carte affine de  $\text{Ein}_n$ .

**Exercice 2.5.5.** — Montrer que les cartes affines de  $\widetilde{\text{Ein}}_n \approx \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$  sont les ouverts de la forme  $\partial\mathcal{A}(x_0) = \{(t, x) \mid t < d_0(x, x_0)\}$  où  $x_0$  est un élément de  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

*2.5.3. Géodésiques lumières.* — Les géodésiques lumières dans  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}$ , pour la métrique lorentzienne  $-d\theta^2 + ds_0^2$  sont les courbes périodiques  $\theta \rightarrow (\theta, x(\theta))$ , où  $\theta \rightarrow x(\theta)$  est une géodésique de  $\mathbb{S}^{n-1}$ , i.e. un grand cercle, ou encore, un cercle projectif (cf § 2.2.2).

**Lemme 2.5.6.** — Les géodésiques lumières de  $\text{Ein}_n \approx \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}$  sont les intersections entre  $\text{Ein}_n \approx \mathbb{EIN}_n$  et les  $[P]$ , où  $P$  est un 2-plan totalement isotrope de  $\mathbb{R}^{2,n}$ .

**Preuve** Exercice. ■

**Corollaire 2.5.7.** — Le lieu des points de  $\mathbb{EIN}_n$  qui peuvent être reliés par une géodésique lumière à un point fixé  $[p]$  est donc l'intersection entre  $\mathbb{EIN}_n \subset \mathbb{S}^{n+1}$  et l'orthogonal  $[p^\perp]$ . ■

2.5.4. *Futur, passé.* — Nous avons déjà observé que le futur de tout point est Ein tout entier. Par contre, il reste intéressant de savoir si deux points de Ein<sub>n</sub> peuvent être relevés dans Ein<sub>n</sub> en des points causalement reliés l'un à l'autre ?

**Lemme 2.5.8.** — *Soient [p], [q] deux points de EIN<sub>n</sub>. Il existe deux éléments  $\tilde{p}$  et  $\tilde{q}$  de Ein<sub>n</sub> tels que  $\tilde{p} \notin J^+(\tilde{q})$  et  $\tilde{q} \notin J^+(\tilde{p})$  et  $\Pi(\tilde{p}) = [p]$ ,  $\Pi(\tilde{q}) = [q]$  si et seulement si, pour tout représentants p, q de [p], [q] dans  $\mathbb{R}^{2,n}$  le produit scalaire  $\langle p|q \rangle$  est strictement négatif.*

**Preuve** On ne perd rien à supposer  $p = (1, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , et que, vu dans le domaine conforme  $\mathbb{S}^{n-1}$ , le point  $\tilde{p}$  soit  $(0, N_0)$  - en particulier, que sa coordonnée  $\theta$  soit nulle. Soit  $W$  l'ouvert  $] -\pi, \pi[ \times \mathbb{S}^{n-1}$ . La restriction de  $\Pi$  à  $W$  est injective et son image est Ein<sub>n</sub> tout entier. L'intersection entre  $W$  et l'union des géodésiques lumières issues de  $\tilde{p}$  est l'ensemble des  $(\theta, x)$  dans  $W$  tels que  $\theta = d_0(x, N_0)$ . Son complémentaire dans  $W$  admet trois composantes connexes : l'une est  $V(\tilde{p}) = \{(\theta, x) / |\theta| < d_0(x, N_0)\}$ . Les deux autres sont  $V^-(\tilde{p}) = \{(\theta, x) / -\pi < \theta < -d_0(x, N_0)\}$  et  $V^+(\tilde{p}) = \{(\theta, x) / \pi \geq \theta > d_0(x, N_0)\}$ . Mais comme  $\{\theta = -\pi\}$  et  $\{\theta = \pi\}$  ont la même image par  $\Pi$ , l'union de  $\Pi(V^+(\tilde{p}))$  et de  $\Pi(V^-(\tilde{p}))$  est un ouvert connexe de Ein<sub>n</sub>, que l'on dénote par  $W(\tilde{p})$ . Il s'en suit que  $W(\tilde{p})$  et  $\Pi(V(\tilde{p}))$  sont exactement les deux composantes connexes du complémentaire dans Ein<sub>n</sub> de l'union des géodésiques lumière issues de  $\Pi(\tilde{p})$ .

Or, d'après le corollaire 2.5.7, cette union correspond dans  $\mathbb{EIN}_n \approx \text{Ein}_n$  à  $[p^\perp]$ . On en déduit que l'identification entre Ein<sub>n</sub> et  $\mathbb{EIN}_n$  envoie  $W(\tilde{p})$  et  $\Pi(V(\tilde{p}))$  sur  $\{[q] / \langle p|q \rangle < 0\}$  et  $\{[q] / \langle p|q \rangle > 0\}$ , mais pas forcément dans cet ordre. Ceci montre d'ores et déjà que ces deux ouverts sont connexes. En fait, comme  $\Pi(V(\tilde{p}))$  contient  $\Pi(\{\theta = 0\} - \tilde{p})$ , qui est contenu dans une sphère de type espace, son image est  $\{[q] / \langle q|p \rangle < 0\}$ .

Pour conclure, il suffit d'observer que, d'après le corollaire 2.4.4,  $V(\tilde{p})$  est le complémentaire dans Ein<sub>n</sub> de  $J^+(\tilde{p}) \cup J^-(\tilde{p})$ , et pour tout  $(\theta, x)$  dans  $V^+(\tilde{p}) \cup V^-(\tilde{p})$ , tous les  $(\theta + k\pi, (-1)^k x)$  pour  $k$  entier sont soit dans le futur, soit dans le passé de  $\tilde{p}$ . ■

**Exercice 2.5.9.** — Montrer que la condition  $\langle p|q \rangle < 0$  du lemme équivaut à ce que [p] et [q] soient extrémités dans  $\mathbb{S}^{n+1}$  d'un segment projectif contenu dans  $\mathbb{ADS}_{n+1}$  et de type espace.

2.5.5. *Fermés achronaux dans Ein<sub>n</sub>.* —

**Lemme 2.5.10.** — *Soit  $\Lambda = G(\bar{f})$  un fermé achronal sans bord de Ein<sub>n</sub>. Alors, la projection de  $\Lambda$  dans Ein<sub>n</sub>  $\subset \mathbb{S}^n$  est injective. De plus, l'image de cette projection est contenue dans une carte affine de Ein<sub>n</sub>, sauf si  $\Lambda$  est totalement dégénérée (cf. définition 2.4.2 et proposition 2.4.12).*

**Preuve** Le diamètre de  $\mathbb{S}^{n-1}$  est  $\pi$ , donc la variation totale de  $\bar{f}$  est au plus  $\pi$ . Or, l'application  $\Pi : \text{Ein}_n \rightarrow \text{Ein}_n$  est celle qui identifie  $(x, \theta)$  à  $(x', \theta')$  si et seulement si  $x = x'$  et  $\theta - \theta'$  est un multiple entier de  $2\pi$  : la restriction de  $\Pi$  à  $\Lambda$  est donc bien injective.

De plus : soit  $\theta^- = \text{Min } \bar{f} = \bar{f}(x^-)$  et  $\theta^+ = \text{Max } \bar{f} = \bar{f}(x^+)$ . Après translation en la coordonnée  $\theta$  on peut supposer  $\theta^- = 0$ . Si  $\theta^+ = \pi$ , alors  $d_0(y^-, y^+) \geq \bar{f}(x^+) - \bar{f}(x^-) = \pi$  ce qui implique que  $y^+$  et  $y^-$  sont deux points antipodaux. Alors, pour tout  $x$  on a  $\bar{f}(x) = d_0(x, y^-) = \pi - d_0(x, y^+)$ , ce qui signifie que  $\Lambda$  est totalement dégénéré. Comme nous l'avons exclu par hypothèse, ceci montre  $\theta^+ < \pi$  : donc,  $\Lambda$  est contenu dans un ouvert de la forme  $] - \epsilon, \pi - \epsilon[$ , i.e. une carte affine de  $\text{Ein}_n$ . ■

Être contenu dans une carte affine de  $\mathbb{EIN}_n$  signifie en particulier être contenu dans une carte affine de  $\mathbb{S}^{n+1}$ .

**Proposition 2.5.11.** — *Soit  $\bar{\Lambda}$  un fermé de  $\mathbb{EIN}_n$  qui ne contient pas de points antipodaux. Alors,  $\bar{\Lambda}$  est la projection d'un fermé achronal de  $\widetilde{\text{Ein}}_n$  si et seulement si son enveloppe convexe dans  $\mathbb{S}^{n+1}$  est un fermé convexe saillant contenu dans  $[Q_{2,n} \leq 0]$ , c'est-à-dire  $\text{AdS}_{n+1} \cup \mathbb{EIN}_n$ .*

**Preuve** Supposons que  $\bar{\Lambda}$  soit la projection d'un fermé achronal  $\Lambda$ . D'après la proposition 2.4.7 on peut, quitte à agrandir  $\Lambda$ , supposer que c'est un fermé achronal sans bord. D'après le lemme 2.5.10 il est contenu dans une carte affine. On conclut grâce au lemme 2.5.8 et l'exercice 2.5.9 que l'enveloppe convexe de  $\bar{\Lambda}$  est bien définie et contenue dans  $[Q_{2,n} \leq 0]$ .

Réciproquement, supposons que  $\text{Conv}(\bar{\Lambda})$  est saillant et contenu dans  $[Q_{2,n} \leq 0]$ . Il est contenu dans une carte affine : il existe donc un relevé  $\Lambda$  contenu dans un ouvert de la forme  $\{\theta_0 < \theta < \theta_0 + \pi\}$  - et ce relevé est unique une fois fixé  $\theta_0$ . Le fait que ce fermé soit achronal est un corollaire du lemme 2.5.8 et de l'exercice 2.5.9. ■

**2.6. Développements de Cauchy.** — La définition 1.5.2 s'applique au mot près dans le contexte de  $\widetilde{\text{AdS}}_{n+1}$ , permettant de définir la notion de développement de Cauchy  $D(A)$  pour tout fermé achronal sans bord  $A$  de  $\widetilde{\text{AdS}}_{n+1}$ . Le but principal de ce § est de montrer :

**Théorème 2.6.1.** — *Soit  $\bar{\Lambda}$  l'image par  $\Pi$  d'un fermé achronal sans bord  $\Lambda$  de  $\widetilde{\text{Ein}}_n$  non totalement dégénéré. Alors, l'intérieur du domaine de développement de  $\Lambda$  dans  $\widetilde{\text{AdS}}_{n+1}$  est contenu dans une carte affine, et sa projection dans  $\text{AdS}_{n+1} \approx \text{AdS}_{n+1}$  est l'intérieur du convexe dual à  $\text{Conv}(\bar{\Lambda})$ .*

Pour la définition de convexe dual, voir l'appendice, et notamment la remarque 3.0.16.

2.6.1. *Le développement de Cauchy comme domaine de développement du bord.* —

**Proposition 2.6.2.** — *L'intérieur  $\mathcal{D}(A)$  du développement de Cauchy de  $A$  est le domaine de développement  $\mathcal{I}(\partial A)$  (voir définition 2.4.10).*

**Preuve** Notons comme d'habitude  $f_0 : \mathcal{H}^n \rightarrow \mathbb{R}$  l'application dont  $A$  est le graphe, et  $\bar{f}_0 : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  son extension au bord.

Soit  $(t_0, x_0)$  un élément hors de  $\mathcal{I}(\partial A)$ , par exemple tel que  $t_0 \geq f^+(x_0)$  (le cas  $t_0 \leq f^-(x_0)$  se traite de manière analogue). Nous allons montrer que si  $t_0 > f^+(x_0)$  alors  $(t_0, x_0)$  n'appartient pas au développement de Cauchy, ceci montrera que dans

le cas de l'inégalité large  $(t_0, x_0)$  n'appartient pas à l'intérieur du développement de Cauchy puisque qu'un tel  $(t_0, x_0)$  est accumulé par des  $(t, x)$  tels que  $t > f^+(x)$ .

Il existe un élément  $y$  de  $\mathbb{S}^{n-1}$  tel que :

$$t_0 > \bar{f}_0(y) + d_0(x_0, y)$$

Soit  $x : [0, l] \rightarrow \mathcal{H}^n$  la géodésique reliant  $x_0$  à  $y$ , où  $l = d_0(x_0, y)$ . Alors  $s \mapsto (t_0 - s, x(s))$  est un rayon géodésique lumière inextensible qui évite  $A = G(f_0)$ , ce qui montre comme voulu que  $(t_0, x_0)$  n'est pas dans le développement de Cauchy de  $A$ .

Inversement, supposons  $(t_0, x_0)$  dans  $\mathcal{I}(\partial A)$ . On a donc  $f^-(x_0) < t_0 < f^+(x_0)$ . Considérons le cas  $t_0 \leq f_0(x_0)$  (le cas  $t_0 \geq f_0(x_0)$  est analogue). Soit  $t \mapsto (t, x(t))$  un rayon causal futur issu de  $(t_0, x_0)$ , paramétré par un intervalle  $[t_0, T[$ . Il s'étend continûment en  $T$  avec  $y = x(T)$  dans  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Supposons par l'absurde qu'il évite  $A = G(f_0)$  : pour tout  $t$  on a  $t < f_0(x(t))$ . Donc, à la limite :

$$T \leq \bar{f}_0(y)$$

Or, comme  $f^-(x_0) < t_0$ , on a  $\bar{f}_0(y) - d_0(x_0, y) < t_0$ . Donc :

$$T < t_0 + d_0(x_0, y)$$

Ceci est absurde car  $t \mapsto x(t)$  est 1-Lipschitz. ■

**2.7. Preuve du théorème 2.6.1.** — Notons  $C^*$  le convexe dual à  $\text{Conv}(\bar{\Lambda})$ , i.e. le lieu des points  $[p]$  de  $\mathbb{S}^{n+1}$  tels que  $\langle p|q \rangle \leq 0$  pour tout  $[q]$  dans  $\bar{\Lambda}$ .

*2.7.1. Étape 1 :  $C^*$  contient  $\text{Conv}(\bar{\Lambda})$ .* — Comme  $\bar{\Lambda}$  est achronal, pour tout  $([p], [q])$  dans  $\bar{\Lambda}$  on a  $\langle p|q \rangle \leq 0$ . Donc  $C^*$  contient  $\bar{\Lambda}$ , et donc aussi son enveloppe convexe puisque  $C^*$  est convexe.

*2.7.2. Étape 2 :  $C^*$  est contenu dans  $\text{ADS}_{n+1} \cup \text{EIN}_n$ .* — Supposons que  $C^*$  contienne un point  $[p_0]$  hors de  $\text{ADS}_{n+1} \cup \text{EIN}_n$ . On peut supposer sans perte de généralité que dans les coordonnées  $(a, b, x_1, \dots, x_n)$  de  $\mathbb{R}^{2,n}$  le point  $p_0$  soit de coordonnées  $(0, 0, \dots, 0, 1)$ . Alors  $\text{Conv}(\bar{\Lambda})$  est contenu dans le demi-espace  $\{x_n \leq 0\}$ . Or, la préimage par  $\Pi$  de l'intersection entre ce demi-espace et  $\text{ADS}_{n+1}$  est un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathcal{H}^n$  formé de points  $(t, x)$  tel que  $d_0(x, y_0) < \pi/2$  où  $y_0$  est un point de  $\mathbb{S}^{n-1} = \partial\mathcal{H}^n$ . Ceci est absurde puisque cet ouvert doit contenir  $\Lambda$  et donc  $(\bar{f}_0(x), x)$  pour tout  $x$  de  $\mathcal{H}^n$ , y compris ceux pour lesquels  $d_0(x, y_0) > \pi/2$ .

*2.7.3. Étape 3 :  $C^*$  est d'intérieur non-vide.* — Supposons *a contrario* que le convexe  $C^*$  est d'intérieur vide : il est alors contenu dans un sous-espace projectif  $[p_0^\perp]$ . De plus,  $[p_0]$  appartient à  $(C^*)^* = \text{Conv}(\bar{\Lambda})^{**} = \text{Conv}(\bar{\Lambda})$ . D'après l'étape 1,  $p_0$  est orthogonal à lui-même, donc de norme nulle :  $[p_0]$  appartient à  $\text{EIN}_n$ . C'est l'image par  $\Pi$  d'un élément  $(t_0, x_0)$  de  $\widetilde{\text{Ein}}_n$ .

Comme  $\bar{\Lambda} \subset C^*$  est contenu dans  $[p_0^\perp]$  chacun de ses éléments est relié à  $[p_0]$  par une géodésique lumière de  $\text{EIN}_n$  (cf. § 2.5.3). Ceci signifie que pour tout  $(t, x)$  dans  $\Lambda$  il existe un entier  $k$  et  $\epsilon = \pm 1$  tels que  $t - t_0 = \epsilon d_0(x, x_0) + 2k\pi$ . Comme  $t = \bar{f}_0(x)$  dépend continûment de  $x$ , l'entier  $k$  est localement constant sur  $\Lambda$ , donc constant. En

remplaçant  $t_0$  par  $t_0 - 2k\pi$  on peut supposer  $k = 0$ . De plus,  $\epsilon$  est lui aussi constant sur le connexe  $\mathbb{S}^{n-1} - \{x_0\}$ . On en déduit que  $\bar{f}_0(x) = \epsilon d_0(x, x_0)$ , i.e. que  $\Lambda$  est totalement dégénéré. Contradiction.

*2.7.4. Étape 4 : l'intérieur de  $C^*$  est contenu dans  $\Pi(\mathcal{I}(\Lambda))$ .* — Soit  $[p_0]$  un élément à l'intérieur de  $C^*$ . Sans perte de généralité on peut supposer  $p_0 = (1, 0, \dots, 0)$ . Alors,  $\text{Conv}(\bar{\Lambda})$  est contenu dans la carte affine  $\mathcal{A}(p_0)$ . Il existe donc une carte affine  $\{-\pi/2 < \theta < \pi/2\}$  contenant  $\Lambda$  (cf. § 2.5.2) centrée au point  $(0, N_0)$  dont l'image par  $\Pi$  est  $[p_0]$ . Or  $f^+(N_0)$  est l'infimum pour  $y \in \mathbb{S}^{n-1}$  de  $\bar{f}_0(y) + d_0(N_0, y) = \bar{f}_0(y) + \pi/2$ . Comme  $\bar{f}_0$  atteint son minimum sur  $\mathbb{S}^{n-1}$  et ne prend que des valeurs  $> -\pi/2$  on a  $f^+(N_0) > 0$ . De manière analogue,  $f^-(N_0) < 0$ . Donc  $(0, N_0)$  appartient à  $\mathcal{I}(\Lambda)$ , ce qui montre comme voulu que  $[p_0]$ , son image par  $\Pi$ , appartient à  $\Pi(\mathcal{I}(\Lambda))$ .

*2.7.5. Étape 5 : tout point de  $\widetilde{\text{AdS}}_{n+1}$  relié par une géodésique lumière de  $\widetilde{\text{AdS}}_{n+1}$  à un point de  $\Lambda$  n'appartient pas à  $\mathcal{I}(\Lambda)$ .* — En effet, si  $(t, x)$  dans  $\widetilde{\text{AdS}}_{n+1}$  est relié par un rayon géodésique lumière à un point  $(\bar{f}_0(y), y)$  de  $\Lambda$ , alors  $\pm d_0(x, y) = \bar{f}_0(y) - t$ , ce qui implique soit  $t \leq f^-(x)$ , soit  $t \geq f^+(x)$ .

*2.7.6. Étape 6 : l'image par  $\Pi$  de  $\mathcal{I}(\Lambda)$  évite le bord de  $C^*$ .* — Comme  $\bar{\Lambda}$  est compact, pour tout  $[p]$  de  $\text{AdS}_{n+1}$  dans le bord de  $C^*$  il existe un élément  $[q]$  de  $\bar{\Lambda}$  tel que  $\langle p|q \rangle = 0$ . D'après § 2.5.3 il existe un rayon géodésique lumière  $r$  issu de  $[p]$  avec extrémité  $[q]$ .

Supposons par l'absurde  $[p] = \Pi(t, x)$  avec  $(t, x)$  dans  $\mathcal{I}(\Lambda)$ . Le rayon  $r$  se relève dans  $\widetilde{\text{AdS}}_{n+1}$  en un rayon lumière issu de  $(t, x)$  dont l'extrémité  $(s, y)$  se projette sur  $[q]$ . Donc,  $s = \bar{f}_0(y) + 2k\pi$  où  $k$  est un entier. Or, comme  $(s, y)$  est extrémité d'un rayon lumière issu de  $(t, x)$  on a  $s = t \pm d_0(x, y)$ . Par ailleurs, comme  $(t, x)$  appartient à  $\mathcal{I}(\Lambda)$  on a :

$$\bar{f}_0(y) - d_0(x, y) \leq f^-(x) < t < f^+(x) \leq \bar{f}_0(y) + d_0(x, y)$$

Donc  $2|k|\pi = |\bar{f}_0(y) - s| \leq |\bar{f}_0(y) - t| + |t - s| \leq d_0(x, y) + d_0(x, y) < 2\pi$ . On en déduit  $k = 0$  : l'extrémité  $(s, y)$  appartient à  $\Lambda$ , ce qui contredit l'étape 5.

*2.7.7. Étape 7 : fin de la preuve.* —  $\Pi(\mathcal{I}(\Lambda))$  est un ouvert connexe qui d'après l'étape 4 contient l'intérieur de  $C^*$ . D'après l'étape 6, l'intérieur de  $C^*$  est un fermé de  $\Pi(\mathcal{I}(\Lambda))$ . Donc,  $\Pi(\mathcal{I}(\Lambda))$  est égal à l'intérieur de  $C^*$ . Pour conclure, nous devons juste montrer que  $\Pi(\mathcal{I}(\Lambda))$  est contenu dans une carte affine : or, par définition même, l'intérieur de  $C^*$  est contenu dans  $\mathcal{A}(p_0)$  pour tout  $[p_0]$  dans  $\text{Conv}(\bar{\Lambda})$ . ■

### 3. Appendice : convexes de $\mathbb{S}^{n+1}$

Le but de cet appendice est de préciser la notion de convexité dans l'espace projectif - ou plutôt, dans son revêtement double.

$E$  désigne un espace vectoriel de dimension finie, et  $S(E)$  la sphère des rayons de  $E$ , i.e. le quotient de  $E - \{0\}$  par la relation d'équivalence qui identifie  $v$  et  $\lambda v$  si  $\lambda > 0$ . Le contenu de cette annexe est utilisé dans le reste du cours pour  $E = \mathbb{R}^{2,n}$  -  $S(E)$  sera donc ce qui est noté  $\mathbb{S}^{n+1}$ .

**Définition 3.0.1.** — Un convexe de  $S(E)$  est la projection radiale d'un cône convexe de  $E$ .

D'après cette définition, l'union de deux points opposés, bien que non connexe, est convexe ! En effet, ceci correspond au cas où le cône est une droite.

**Définition 3.0.2.** — Soient  $[x], [y]$  deux éléments non opposés de  $S(E)$ . Le segment  $[[x], [y]]$  est la projection radiale de l'enveloppe convexe de  $[x] \cup [y]$  dans  $E$ .

**Remarque 3.0.3.** — L'expression  $[[x], [y]]$  est particulièrement inélégante. Dorénavant, nous écrivons  $x$  les éléments de  $S(E)$  tout en nous permettant de noter également  $x$  un représentant de  $x$ .

**Lemme 3.0.4.** — Un sous-ensemble  $\Omega$  de  $S(E)$  est convexe si et seulement si pour toute paire  $(x, y)$  de points non-opposés de  $\Omega$  le segment  $[x, y]$  est contenu dans  $\Omega$ .

**Preuve** Évident. ■

On en déduit que le seul cas où un convexe  $\Omega$  n'est pas connexe est celui où il est l'union de deux points opposés.

**Définition 3.0.5.** — Une carte affine de  $S(E)$  est un sous-ensemble de la forme  $\{x/\alpha(x) > 0\}$  où  $\alpha$  est une forme linéaire non-nulle sur  $E$ .

Remarquons qu'une carte affine ne peut pas contenir deux points opposés. On peut aussi penser une carte affine comme un hémisphère de la "sphère"  $S(E)$ .

**Proposition 3.0.6.** — Un convexe  $\Omega$  de  $S(E)$  est soit  $S(E)$  tout entier, soit contenu dans l'adhérence d'une carte affine de  $S(E)$ .

**Preuve** Corollaire (de la version en dimension finie) du théorème de Hahn-Banach. ■

**Définition 3.0.7.** — Soit  $\Omega$  un convexe fermé de  $S(E)$ , projection radial d'un cône convexe  $J$  de  $E$ . Le cône dual  $J^*$  est l'ensemble des formes linéaires  $\alpha \in E^* - \{0\}$  tel que  $\alpha$  ne prend que des valeurs négatives ou nulles sur  $J$ . Le convexe dual  $\Omega^*$  est la projection radiale de  $J^*$ .

**Lemme 3.0.8.** — L'intérieur de  $\Omega^*$  est la projection de l'intérieur de  $J^*$ , qui est lui-même l'ensemble des formes linéaires  $\alpha \in E^* - \{0\}$  ne prenant que des valeurs strictement négatives sur  $J$ .

**Preuve** Si  $\alpha \in J^* - \{0\}$  s'annule sur un élément non-nul de  $J$ , il n'appartient pas à l'intérieur de  $\Omega^*$ . Une des implications est donc claire. Inversement, soit  $\alpha$  un élément de  $J^* - \{0\}$  qui ne prend que des valeurs strictement négatives sur  $J - \{0\}$ . La "semelle"  $S = J \cap \{\alpha = 1\}$  se projette dans  $S(E)$  sur  $\Omega$  tout entier. Comme  $\Omega$  est fermé dans  $S(E)$  il est compact : il en est de même pour  $S$ . Le lieu des  $\eta \in E^*$  pour lesquels  $|\eta(x)| < 1$  pour tout  $x$  dans  $S$  est donc un ouvert non-vidé ; l'ensemble des  $\alpha + \eta$  est un voisinage ouvert de  $\alpha$  dans  $J^*$ . ■

Toujours d'après Hahn-Banach :

**Proposition 3.0.9.** — Pour tout convexe fermé  $\Omega$  de  $S(E)$  on a  $\Omega = \Omega^{**}$  i.e.  $J$  est le lieu des points de  $E - \{0\}$  sur lesquels tous les  $\alpha$  appartenant à  $J^*$  ne prennent que des valeurs négatives ou nulles. ■

Le cas où l'adhérence du convexe est contenue dans une carte affine mérite attention :

**Proposition 3.0.10.** — Soit  $\Omega$  un convexe fermé de  $S(E)$ , projection radial d'un cône convexe  $J$  de  $E$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $\Omega$  est contenu dans une carte affine,
2.  $\Omega$  ne contient pas de points opposés,
3. Il existe un hyperplan affine  $H = \{\alpha = 1\}$  tel que l'intersection  $J \cap H$  est un compact qui rencontre tous les rayons de  $J$ ,
4. Il n'existe pas de droite affine de  $E$  entièrement contenue dans  $J$ ,
5. Le convexe dual  $\Omega^*$  est d'intérieur non-vide.

Si (une des) ses conditions est satisfaite,  $J$  et  $\Omega$  sont dits saillants. ■

**Preuve** Les implications (3)  $\Rightarrow$  (1)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (4) sont évidentes. Le lemme 3.0.8 montre aussi (3)  $\Leftrightarrow$  (5). Supposons que l'intérieur de  $\Omega^*$  est vide. Alors,  $J^*$  est contenu dans un hyperplan de  $E^*$ . Cet hyperplan est le lieu d'annulation dans  $E^*$  d'un élément non nul  $x$  de  $E$ . Tous les  $\lambda x$  ( $\lambda \neq 0$ ) s'annulent sur  $J^*$  : ils appartiennent donc à  $J$ . On en déduit (2)  $\Rightarrow$  (5). Pour conclure, il suffit de montrer (4)  $\Rightarrow$  (2), mais celle-ci est claire car si  $J$  contient deux points opposés  $x$  et  $-x$  la droite linéaire engendrée par  $x$  est contenue dans  $J$ . ■

**Remarque 3.0.11.** — D'après les propositions 3.0.9 et 3.0.10 le dual d'un convexe saillant  $\Omega$  est saillant si et seulement si  $\Omega$  est d'intérieur non-vide.

Le moyen typique d'obtenir d'un convexe non-saillant est le suivant : soit  $J_1$  un cône convexe saillant dans un espace vectoriel  $E_1$  et soit  $E_2$  un autre espace vectoriel. Dans  $E = E_1 \oplus E_2$  on regarde le cône convexe  $J = J_1 \oplus E_2$  : il est manifestement non saillant. Si  $J_1$  est saillant, l'ensemble des points de  $\Omega$  dont l'opposé appartient à  $\Omega$  est le sous-espace projectif  $S(0 \oplus E_2) \approx S(E_2)$ . Ce moyen est le seul :

**Lemme 3.0.12.** — Tout cône convexe fermé  $J$  est la somme directe  $E_2 \oplus J_1$  d'un sous-espace vectoriel  $E_2$  de  $E$  avec un cône convexe saillant  $J_1$  d'un sous-espace vectoriel  $E_1$ .

**Preuve** Prendre  $E_2$  comme étant le lieu d'annulation de tous les éléments de  $J^*$  (i.e.  $E_2 = (J^*)^\perp$ ) et comme  $E_1$  n'importe quel supplémentaire dans  $E$  de  $E_2$ . ■

L'intersection de deux convexes est toujours convexe (si on convient que l'ensemble vide est convexe). On peut donc définir :

**Définition 3.0.13.** — Soit  $A$  un sous-ensemble de  $S(E)$ . L'enveloppe convexe de  $A$ , notée  $\text{Conv}(A)$ , est le plus petit convexe contenant  $A$ , i.e. l'intersection de tous les convexes contenant  $A$ .

**Remarque 3.0.14.** — Si  $A$  est fermé et contenu dans une carte affine de  $S(E)$ , son enveloppe convexe est fermée (donc compacte) et contenue dans cette même carte affine. Elle est donc saillante. Notez que dans ce cas l’enveloppe convexe coïncide avec la notion usuelle d’enveloppe convexe dans un espace affine.

**Remarque 3.0.15.** — Pour toute partie  $A$  de  $S(E)$  on peut définir l’ensemble  $J^*$  des éléments de  $E^*$  qui ne prennent que des valeurs négatives ou nulles sur les éléments de  $E$  qui se projettent sur des éléments de  $A$ . La projection de  $J^*$  est alors un convexe fermé dont le dual est l’adhérence de  $\text{Conv}(A)$ .

**Remarque 3.0.16.** — Nous utiliserons les rappels de cet appendice dans le cas où  $E$  est l’espace vectoriel  $\mathbb{R}^{2,n}$ , équipé de la forme quadratique  $Q_{2,n}$ . Celle-ci induit un isomorphisme canonique entre  $E$  et son dual  $E^*$  : on peut ainsi considérer le dual d’un cône de  $E$  comme étant un cône dans  $E$ , ainsi que le dual d’un convexe de  $\mathbb{S}^{n+1} \approx S(E)$  comme étant un convexe de  $\mathbb{S}^{n+1}$ .

### Références

- [1] T. Barbot, *Flat globally hyperbolic spacetimes*, Journ. Geom. Phys., **53** (2005), 123–165.
- [2] T. Barbot, *Causal properties of AdS-isometry groups I : Causal actions and limit sets*, arXiv : math.GT/0509552 , Advances in Theoretical and Mathematical Physics, **12** (2008).
- [3] T. Barbot, *Causal properties of AdS-isometry groups II : BTZ multi-black holes*, arXiv : math.GT/0510065.
- [4] J.K. Beem, P.E. Ehrlich, K.L. Easley, *Global Lorentzian geometry*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 2nd ed., **202**, Marcel Dekker, New York, 1996.
- [5] F. Bonsante, *Flat spacetimes with compact hyperbolic Cauchy surface*, Journ. Diff. Geom., **69**(2005), 441–521.
- [6] C. Godbillon, *Éléments de topologie algébrique*, Hermann, Collection Méthodes.
- [7] B. O’Neill, *Semi-riemannian geometry (with applications to Relativity)*, Academic Press, 1983.

---

23 mars 2008

T. BARBOT, \*CNRS, UMPA, École Normale Supérieure de Lyon.  
E-mail : Thierry.Barbot@umpa.ens-lyon.fr