

Caractérisation des flots d'Anosov en dimension 3 par leurs feuilletages faibles

Thierry Barbot

Laboratoire de Topologie URA 755 du CNRS

Université de Bourgogne, B.P. 138

21004 Dijon, France

Abstract. We consider Anosov flows on closed 3-manifolds. We show that if such a flow admits a weak foliation whose lifting in the universal covering is a product foliation, then it's characterized up to topological equivalence by its weak stable foliation up to topological conjugacy. As a corollary we obtain that, up to topological equivalence and finite coverings, suspensions and geodesic flows are the unique Anosov flows on closed 3-manifolds whose weak stable foliations are transversely projective.

1 Introduction

Soit X un champ de vecteur de classe C^r ($r \geq 1$) sur une variété fermée M . Soit Φ^t le flot engendré par X . Rappelons que Φ^t est dit d'Anosov s'il existe une décomposition continue du fibré tangent TM à M en trois sous fibrés supplémentaires E^{ss} , E^{uu} et TX telle que:

- Le fibré TX est le champ de droites engendré par X
- Chacun des sous fibrés E^{ss} , E^{uu} et TX est invariant par la différentielle $D\Phi^t$ du flot
- Pour toute métrique riemannienne $\| \cdot \|$ sur M , il existe deux constantes positives C et λ telles que:

$$\| D\Phi^t |_{E^{ss}} \| \leq C e^{-\lambda t} \quad \forall t > 0$$

$$\| D\Phi^t |_{E^{uu}} \| \leq C e^{\lambda t} \quad \forall t < 0$$

Les fibrés E^{ss} et E^{uu} sont appelés respectivement stables et instables forts.

Une propriété fondamentale des flots d'Anosov est leur *stabilité structurelle* (cf [1]): tout flot C^1 -proche d'un flot d'Anosov Φ^t est un flot d'Anosov topologiquement équivalent à Φ^t . Rappelons ici que deux flots sont dits topologiquement équivalents s'il existe un homéomorphisme entre leurs variétés ambiantes envoyant les orbites de l'un sur les orbites de l'autre, tout en préservant l'orientation de ces orbites. Les flots d'Anosov apparaissent donc comme des objets d'étude privilégiés lorsqu'on se pose le problème de la classification des flots à équivalence topologique près.

Nous nous intéressons surtout dans cet article aux flots d'Anosov sur les variétés de dimension 3. Dans la troisième partie, nous mettons en évidence le phénomène suivant: on peut associer à tout flot d'Anosov de dimension 3 une action du groupe fondamental de la variété ambiante sur le plan \mathbb{R}^2 de sorte que cette action est bien définie à conjugaison topologique près, et que deux flots d'Anosov sont topologiquement équivalents si et seulement si les actions associées sont topologiquement conjuguées modulo un isomorphisme entre les groupes fondamentaux (cf. théorème 3.4). Cette action se définit de la manière suivante: on relève le flot d'Anosov Φ^t dans le revêtement universel \widetilde{M} de M en un flot $\widetilde{\Phi}^t$. Il s'avère que le quotient Q^Φ de \widetilde{M} par la relation "être sur la même orbite de $\widetilde{\Phi}^t$ " est homéomorphe à

\mathbb{R}^2 (cf. théorème 3.2). L'action du groupe fondamental sur \widetilde{M} par automorphismes de revêtement passe au quotient en l'action sur $Q^\Phi \simeq \mathbb{R}^2$ recherchée. Ce résultat n'est pas véritablement nouveau. Il s'agit d'une simple généralisation de certains arguments de [12] et de [13]. Signalons aussi que ce théorème s'applique plus généralement au cas des flots d'Anosov de codimension un en dimension quelconque.

L'étude des flots d'Anosov à équivalence topologique près est donc ramenée à celle de certaines actions de groupe sur le plan, ce qui nous fait gagner une dimension. Il n'en reste pas moins que la classification de ces flots demeure un problème ardu et apparemment loin d'être résolu. Il suffit pour s'en convaincre de passer en revue les divers exemples déjà connus et de remarquer leur grande diversité (voir [1], [2], [10], [19], [16], [4], [8]).

Certains de ces flots, les flots d'Anosov algébriques, se distinguent des autres par le fait qu'ils vérifient des propriétés géométriques remarquables. Il s'agit, à revêtements finis près, des suspensions d'automorphismes linéaires hyperboliques du tore, et des flots géodésiques des surfaces à courbure -1 (cf [28]). Les propriétés géométriques de ces flots sont fortement liées à la nature de leurs feuilletages faibles. Il est déjà connu par exemple que si un des feuilletages faibles admet une structure affine transverse, le flot est alors topologiquement équivalent à la suspension d'un difféomorphisme hyperbolique du tore (cf. [23]). Nous étendrons dans cet article ce résultat de la manière suivante:

Théorème A *Un flot d'Anosov sur une variété de dimension trois est topologiquement équivalent à un flot algébrique si et seulement si un de ses feuilletages faibles est transversalement projectif.*

De ce théorème et du résultat principal de [14] il découle que tout flot d'Anosov de dimension 3 dont l'un des feuilletages faibles est de classe C^2 est topologiquement équivalent à un flot algébrique¹.

Le théorème A s'ajoute à la longue liste des résultats liant, dans leurs énoncés ou dans leurs preuves, le flot lui-même à certaines caractéristiques de ses feuilletages faibles (voir [29], [23], [12], [14], ...). Le théorème suivant, qui m'a été communiqué par M. Brunella, montre que ce principe général n'est pas dû au hasard:

Théorème B' *Deux flots d'Anosov topologiquement transitifs sur des variétés de dimension 3 sont topologiquement équivalents si et seulement si leurs feuilletages faibles stables sont topologiquement conjugués .*

Le théorème B' est un corollaire immédiat de [11] et de [6]². Nous ne développerons pas sa preuve ici. Nous montrerons cependant à la troisième partie la version affaiblie suivante:

Théorème B *Deux flots d'Anosov produits sur des variétés de dimension 3 sont topologiquement équivalents si et seulement si leurs feuilletages faibles stables sont topologiquement conjugués.*

L'hypothèse *produit* est beaucoup plus forte que l'hypothèse de transitivité topologique (cf. théorème 2.5). Elle signifie le fait suivant: si \widetilde{F}^s et \widetilde{F}^u sont les relevés des feuilletages faibles de Φ^t dans \widetilde{M} , le flot est dit produit si les quotients Q^s et Q^u de \widetilde{M} par les relations "être dans la même feuille de \widetilde{F}^s (respectivement de \widetilde{F}^u)" sont Hausdorff et homéomorphes à \mathbb{R} . Il suffit en fait que ce soit vérifié par l'un d'entre eux, l'autre le vérifiant alors automatiquement (cf. théorème 4.1). L'intérêt essentiel du théorème B réside surtout en sa preuve, entièrement différente de celle du théorème B'. Il nous sera par exemple possible d'en déduire aisément le théorème A (voir la cinquième partie). Il sera de plus possible d'en extraire les corollaires suivants:

Théorème C *Soit (M, Φ^t) un flot d'Anosov produit sur une variété de dimension 3. On le suppose non topologiquement équivalent à une suspension. Alors:*

1. *La variété M est orientable*
2. *Si l'un des feuilletages faibles est transversalement orienté, le flot Φ^t est topologiquement équivalent à son inverse Φ^{-t}*

¹La condition de différentiabilité peut être affaiblie. On peut même choisir l'homéomorphisme réalisant l'équivalence topologique de sorte qu'il vérifie une certaine condition de régularité vis-à-vis du feuilletage. Voir [14] pour plus de précision.

²Comme me l'a fait remarquer M. Brunella lui-même, ce théorème est avant tout un corollaire de [11]. En effet, la preuve de [6] se simplifie considérablement dans ce cas de figure.

3. Il n'existe pas de surface plongée dans M transverse à Φ^t .

Corollaire *L'exemple de Bonatti-Langevin n'est pas produit.*

En effet, l'exemple de Bonatti-Langevin admet un tore plongé transverse sans pourtant admettre de section globale (cf. [4]). Signalons ici que M. Brunella connaît une méthode pour construire une infinité de flots d'Anosov topologiquement transitifs vérifiant cette propriété ([7]). Ajoutons aussi que ces flots sont à ma connaissance les seuls exemples de flots d'Anosov explicitement définis non produits bien que topologiquement transitifs.

L'idée générale amenant à ces résultats est la suivante: étant donné un flot d'Anosov (M, Φ^t) produit, on considère l'application de Q^Φ dans le produit $Q^s \times Q^u$ qui à une orbite de Φ^t associe les feuilles des feuilletages faibles relevés qui la contiennent. Cette application est un homéomorphisme sur son image, équivariante pour les actions du groupe fondamental (l'action sur $Q^s \times Q^u$ considérée ici est bien sûr le produit des actions naturelles sur chaque facteur). Lorsque Φ^t n'est pas topologiquement équivalent à une suspension, l'image de cette application est comprise entre les graphes de deux homéomorphismes. Ces homéomorphismes réalisent³ chacun une conjugaison topologique entre les actions du groupe fondamental sur Q^s et Q^u . Il apparaît ainsi qu'on peut coder à partir de l'action du groupe fondamental sur Q^s celle sur Q^Φ , et donc aussi le flot d'Anosov à équivalence topologique près. Tel est le schéma de la preuve du théorème B. Si un des feuilletages faibles, disons le faible stable, est transversalement projectif, l'action du groupe fondamental sur Q^s doit préserver une structure projective. Le point délicat de la preuve du théorème A consiste à montrer que le flot est alors nécessairement produit. Sachant que l'action sur la droite Q^s est projective, on dispose de suffisamment d'éléments pour caractériser cette action à conjugaison topologique près, ce qui, grâce au théorème B, achève la preuve du théorème A.

Cet article a été rédigé au cours d'un séjour à l'IMPA que je tiens à remercier pour son hospitalité. La plupart des résultats présentés ici sont extraits de [3], travail effectué au laboratoire de mathématiques pures et appliquées de l'Ecole Normale Supérieure de Lyon, et que j'ai mené sous la direction de E. Ghys. Qu'il me soit permis ici de lui exprimer ma gratitude pour l'aide et le soutien constant dont il m'a fait bénéficier à cette occasion.

2 Préliminaires

Dans cet article, nous nous intéressons surtout aux flots d'Anosov en dimension 3. Cependant, les résultats que nous présentons lors de ces préliminaires ont pour cadre naturel celui plus général des flots d'Anosov de codimension un, i.e., dont l'un des fibrés forts de la décomposition d'Anosov est de dimension un. Dans toute la suite, Φ^t désignera donc un flot d'Anosov de codimension un sur une variété M de dimension n ($n \geq 3$).

En vertu de la densité des champs de vecteurs infiniment différentiables parmi ceux de classe C^1 , et de la stabilité structurelle des flots d'Anosov, nous pouvons toujours nous ramener au cas où Φ^t est de classe C^∞ .

Nous notons Φ le feuilletage de dimension un engendré par Φ^t . Soient \mathcal{F}^{ss} , \mathcal{F}^{uu} , \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u les feuilletages stables forts, instables forts, stables faibles et instables faibles, respectivement (pour toutes ces notions, voir [1]). Comme Φ^t est de codimension un, un de ses feuilletages faibles est de codimension un. Quitte à inverser le flot, nous supposons toujours qu'il s'agit de \mathcal{F}^s , le feuilletage faible stable. Sous ces conditions \mathcal{F}^s est de classe C^1 (cf [20]). Dans le cas où M est de dimension 3, \mathcal{F}^u est donc lui aussi de classe C^1 . Pour ne pas surcharger les énoncés, nous supposons dans ces préliminaires les divers feuilletages $\Phi, \mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u$, etc.. orientés et transversalement orientés, ce qui est toujours vrai à un revêtement double ou quadruple⁴ près. Nous résumons dans l'énoncé à suivre quelques propriétés bien connues de ces feuilletages (cf. [24], [29]).

³Ceci n'est pas très exact, et est faux si les feuilletages faibles ne sont pas transversalement orientés. Mais il s'agit bien de l'idée sous-jacente dans le cas général.

⁴Il découle du théorème C que dans le cas "produit" en dimension 3 un revêtement double suffit.

Théorème 2.1 *Tout flot d'Anosov Φ^t dont le feuilletage fort stable est de codimension un vérifie les propriétés suivantes:*

1. *Aucune orbite périodique de Φ^t n'est homotopiquement triviale.*
2. *Chaque feuille de \mathcal{F}^{uu} (resp. \mathcal{F}^{ss}) est l'image d'une immersion injective de la droite réelle \mathbb{R} (resp. de \mathbb{R}^{n-2}).*
3. *Une feuille de \mathcal{F}^s (resp. \mathcal{F}^u) est un plan \mathbb{R}^{n-1} (resp. \mathbb{R}^2) ou un cylindre $\mathbb{R}^{n-2} \times S^1$ (resp. $\mathbb{R} \times S^1$) selon qu'elle contient ou non une orbite périodique de Φ^t .*
4. *Une feuille cylindrique de \mathcal{F}^s ou de \mathcal{F}^u contient une et une seule orbite périodique. Son holonomie est cyclique et est de type contractant ou dilatant.* ■

Notons \widetilde{M} le revêtement universel de M . Les divers feuilletages relevés dans \widetilde{M} sont notés $\widetilde{\Phi}$, $\widetilde{\mathcal{F}}^{ss}$, $\widetilde{\mathcal{F}}^{uu}$, $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ et $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ selon des conventions d'écriture évidentes. Nous notons $\widetilde{\Phi}^t$ le relevé de Φ^t dans \widetilde{M} .

D'après le point (1) du théorème 2.1, les feuilles de $\widetilde{\Phi}$ sont des droites. Il en découle que les feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ et de $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ sont des plans (respectivement de dimension $n-1$ et 2). D'après [22] et [26] il s'en suit que \widetilde{M} est difféomorphe à \mathbb{R}^n et que $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ est défini par une fibration π^s de \widetilde{M} sur une variété de dimension un, orientée, simplement connexe, mais en général non-séparée. Cette variété est appelée *espace des feuilles stable*. Elle est notée Q^s .

Remarquons que ceci implique que \mathcal{F}^s n'admet pas de transversale fermée. D'où:

Proposition 2.2 *Chaque feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^{uu}$ rencontre chaque feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ en au plus un point.* ■

Dans le cas où M est de dimension 3, le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ est lui-aussi défini par une fibration $\pi^u : \widetilde{M} \rightarrow Q^u$. L'espace Q^u ainsi défini vérifient les mêmes propriétés que Q^s . Nous l'appelons *espace des feuilles instable*.

Lorsque Q^s est séparé, c'est-à-dire difféomorphe à \mathbb{R} , nous dirons que le flot est *produit*. D'après [22] ceci équivaut à la définition suivante:

Définition 2.3 *Un flot d'Anosov est dit produit si le feuilletage faible stable relevé $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ est conjugué au feuilletage produit de \mathbb{R}^n par plans horizontaux $\mathbb{R}^{n-1} \times \{*\}$.*

Nous verrons au théorème 4.1 que si M est de dimension 3, l'espace Q^s est séparé si et seulement si Q^u l'est.

Soit Γ le groupe fondamental de M . Son action sur \widetilde{M} par automorphismes de revêtement préserve le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}^s$. Elle passe donc en une action sur le quotient Q^s .

Proposition 2.4 *L'action de Γ sur Q^s est effective. L'action d'un élément de Γ différent de l'identité au voisinage de l'un de ses points fixes est soit contractante, soit dilatante. De plus, le sous-groupe d'isotropie pour cette action de tout élément de Q^s est soit trivial, soit cyclique. Enfin, l'union des points fixes d'éléments de Γ est dense dans Q^s .*

Preuve Les trois premières affirmations découlent du théorème 2.1. La dernière provient du fait que le saturé par \mathcal{F}^s de l'adhérence de l'union des orbites périodiques de Φ^t est M tout entier (cf. [25], l'adhérence de l'union des orbites périodiques n'est autre que l'ensemble des points non-errants.) ■

Rappelons qu'un flot est dit *topologiquement transitif* s'il admet une orbite dense. Dans le cas des flots d'Anosov, ceci équivaut à chacune des conditions suivantes (voir [24]):

- toute feuille de \mathcal{F}^s ou de \mathcal{F}^u est dense,
- l'union des orbites périodiques du flot est dense dans M .

Théorème 2.5 *Tout flot d'Anosov produit est topologiquement transitif. En particulier, lorsque le flot d'Anosov est produit, l'action du groupe fondamental sur chaque espace des feuilles est minimale.*

Preuve de 2.5 Supposons le flot (M, Φ^t) produit sans être topologiquement transitif. Il existe en particulier une orbite de Γ dans $Q^s \simeq \mathbb{R}$ dont l'adhérence μ n'est pas tout Q^s . Soit I une composante connexe du complémentaire de μ . Soit a une extrémité de I . D'après 2.4, il existe dans I une infinité de points à isotropie non-triviale. Or, tout élément de Γ fixant un élément de I préserve I , donc, quitte à prendre son double s'il ne préserve pas l'orientation, il fixe a . Soit γ un générateur du groupe d'isotropie de a : toutes les "feuilles cylindriques" appartenant à I sont donc des points fixes de γ . Or, d'après 2.4, l'ensemble des points fixes de γ est un fermé discret. Il ne saurait donc être dense dans I . Contradiction. ■

Corollaire 2.6 *Les exemples de Franks et Williams ne sont pas produits (cf. [10])* ■

Nous allons achever ses préliminaires par un résultat dû à V.V. Solodov qui a trait au comportement d'un des feuilletages faibles par rapport à l'autre (cf. [27]). Lorsque le flot d'Anosov est produit, le feuilletage faible relevé $\tilde{\mathcal{F}}^s$ admet une transversale complète. Par ailleurs, toute feuille de $\tilde{\mathcal{F}}^{uu}$ est transverse à $\tilde{\mathcal{F}}^s$. Est-il possible que ses feuilles soient toutes des transversales complètes?

Théorème 2.7 *Soit (M, Φ^t) un flot d'Anosov de codimension un. On suppose que chaque feuille de $\tilde{\mathcal{F}}^{uu}$ rencontre chaque feuille de $\tilde{\mathcal{F}}^s$. Alors, (M, Φ^t) est topologiquement équivalent à une suspension.*

Il est clair qu'un flot vérifiant les hypothèses de 2.7 est produit. Comme une feuille d'un des feuilletages relevés contient au plus une orbite au-dessus d'une orbite périodique de Φ^t , tout élément de Γ admet au plus un point fixe dans $Q^s \simeq \mathbb{R}$. Par ailleurs, il est déjà connu que si Γ est résoluble alors (M, Φ^t) est topologiquement équivalent à une suspension (cf. [23]). La preuve de 2.7 se ramène donc à celle de:

Théorème 2.8 *Soit Γ un groupe d'homéomorphismes de \mathbb{R} . On suppose que chaque élément de Γ différent de l'identité admet au plus un point fixe et que s'il en admet un, celui-ci est alors de type hyperbolique, i.e., contractant ou dilatant. Alors, Γ est métabélien.*

Rappelons qu'un groupe est dit métabélien si son groupe dérivé est abélien. Un tel groupe est donc en particulier résoluble. Nous donnons à suivre une preuve de 2.8 puisqu'à notre connaissance il n'en existe aucune version écrite autre que [3].

Preuve de 2.8 Quitte à se restreindre à un sous-groupe d'indice 2, nous pouvons supposer que Γ préserve une orientation de \mathbb{R} . Nous définissons sur Γ l'ordre suivant: l'élément γ_1 est inférieur à γ_2 - noté $\gamma_1 \preceq \gamma_2$ - s'il existe un élément x_0 de \mathbb{R} au-delà duquel $\gamma_1 - \gamma_2$ ne prend que des valeurs négatives:

$$\forall x \geq x_0 \quad \gamma_1(x) \leq \gamma_2(x)$$

Cet ordre se décrit aisément à l'aide des graphes de γ_1 et de γ_2 . L'hypothèse sur Γ signifie lorsque γ_1 et γ_2 sont différents que ces graphes sont transverses et se coupent au plus une fois.

Il est aisé de vérifier que (Γ, \preceq) est un groupe totalement ordonné. Si γ_1 n'est pas inférieur à γ_2 , il existe un réel x_0 tel que:

$$\forall x > x_0 \quad \gamma_1(x) > \gamma_2(x)$$

Notons Γ^+ l'ensemble des éléments de Γ strictement supérieurs à l'identité, et Γ_0^+ l'ensemble des éléments de Γ^+ ayant un point fixe: les éléments de Γ_0^+ sont ceux de Γ ayant un point fixe répulsif, et ceux de Γ^+ sont ceux appartenant à Γ_0^+ ou vérifiant:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \gamma x > x$$

Lemme 2.9 *Le groupe ordonné (Γ, \preceq) est 'quasi-archimédien', i.e.: pour tout élément γ de Γ^+ , chaque élément γ_0 de Γ_0^+ admet un itéré γ_0^n ($n \geq 0$) supérieur à γ .*

Preuve Notons x_0 le point fixe de γ_0 . Soient x_1 et x_2 deux réels encadrant x_0 . Comme x_0 est un point fixe répulsif de γ_0 , ce dernier admet un itéré γ_0^n pour lequel:

$$\gamma_0^n x_1 < \gamma x_1 \quad \gamma_0^n x_2 > \gamma x_2$$

Les graphes de γ et de γ_0 se coupent donc entre x_1 et x_2 , et donc pas sur $]x_2, +\infty[$:

$$\gamma_1 \preceq \gamma_0^n$$

■

Fixons un élément γ_0 de Γ_0^+ . Nous définissons l'application χ de Γ dans \mathbb{R} de la manière suivante:

Pour tout élément γ de Γ^+ et pour tout entier n positif, soit $\chi_\gamma(n)$ le plus petit entier k tel que:

$$\gamma^n \preceq \gamma_0^k$$

Alors:

$$\gamma_0^{\chi_\gamma(n)-1} \prec \gamma^n \preceq \gamma_0^{\chi_\gamma(n)}$$

On vérifie aisément que χ_γ est sous-additive. La suite $\frac{\chi_\gamma(n)}{n}$ est donc convergente. Sa limite est notée $\chi(\gamma)$. On pose $\chi(id) = 0$, et si γ n'appartient pas à $\Gamma^+ \cup \{id\}$, $\chi(\gamma)$ est défini comme étant $-\chi(\gamma^{-1})$. Dans tous les cas de figure, nous avons:

$$\gamma_0^{\chi_\gamma(n)-1} \prec \gamma^n \prec \gamma_0^{\chi_\gamma(n)+1}$$

Les propriétés suivantes de χ sont immédiatement vérifiées:

- (1) $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \chi(\gamma^n) = n\chi(\gamma)$
- (2) $\gamma_1 \preceq \gamma_2 \Rightarrow \chi(\gamma_1) \leq \chi(\gamma_2)$
- (3) $\chi(\gamma_0) = 1$

Lemme 2.10 *L'application χ est un morphisme.*

Preuve Soient u et v deux éléments de Γ . Pour tout entier positif n :

$$(uv)^n = (uvu^{-1})(u^2vu^{-2}) \dots (u^n vu^{-n})u^n$$

Supposons v inférieur à uvu^{-1} (l'autre cas s'y ramène). Pour toute paire d'entiers m et n vérifiant $0 < m < n$ nous avons alors $v \preceq u^m v u^{-m} \preceq u^n v u^{-n}$. D'où:

$$v^n u^n \preceq (uv)^n \preceq (u^n v u^{-n})^n u^n = u^n v^n$$

Alors:

$$\begin{aligned} \gamma_0^{\chi_v(n)-1+\chi_u(n)-1} &\preceq \gamma_0^{\chi_{uv}(n)} \preceq \gamma_0^{\chi_v(n)+1+\chi_u(n)+1} \\ \chi_v(n) + \chi_u(n) - 2 &\leq \chi_{uv}(n) \leq \chi_v(n) + \chi_u(n) + 2 \\ \chi(u) + \chi(v) &\leq \chi(uv) \leq \chi(u) + \chi(v) \end{aligned}$$

Il s'en suit que le premier groupe dérivé $[\Gamma, \Gamma]$ de Γ est inclus dans le noyau de χ . Or, un élément de Γ non trivial admettant un point fixe ne peut appartenir à ce noyau. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que d'après 2.9 un tel élément admet une puissance positive supérieure à γ_0 . Le groupe dérivé agit donc librement sur R . Il est bien connu que ceci entraîne qu'il est abélien. ■

3 L'espace des orbites

Nous nous plaçons encore dans cette section dans le cadre général des flots d'Anosov de codimension un en dimension quelconque. Soit (M^n, Φ^t) un tel flot ($n \geq 3$). Notre but est de montrer qu'un tel flot est caractérisé à équivalence topologique près par une certaine action du groupe fondamental de la variété ambiante sur R^{n-1} .

Nous appelons *espace des orbites* le quotient de \widetilde{M} par la relation d'équivalence "être sur la même feuille du feuilletage relevé $\widetilde{\Phi}$ ". Nous le notons Q^Φ . Soit $\pi^\Phi : \widetilde{M} \rightarrow Q^\Phi$ l'application passage au quotient.

Théorème 3.1 *L'espace des orbites Q^Φ muni de la topologie quotient est séparé.*

Le théorème 3.1 a aussi été démontré de manière indépendante par S. Fenley lorsque M est de dimension 3 (cf [8]).

Preuve Soient $\widetilde{\Phi}_1$ et $\widetilde{\Phi}_2$ deux orbites de $\widetilde{\Phi}^t$ non séparées, i.e., telles que tout voisinage saturé par $\widetilde{\Phi}$ de l'une rencontre tout voisinage saturé par $\widetilde{\Phi}$ de l'autre. Nous allons montrer que $\widetilde{\Phi}_1$ et $\widetilde{\Phi}_2$ appartiennent à la même feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$.

Supposons que ce ne soit pas le cas. Appelons F_1 et F_2 les feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ contenant respectivement $\widetilde{\Phi}_1$ et $\widetilde{\Phi}_2$. Considérons les saturés par $\widetilde{\mathcal{F}}^{uu}$ de F_1 et de F_2 . Ce sont deux voisinages de $\widetilde{\Phi}_1$ et de $\widetilde{\Phi}_2$ saturés par $\widetilde{\Phi}$. Ils ne sont donc pas disjoints, ce qui signifie qu'il existe une feuille τ^u de $\widetilde{\mathcal{F}}^{uu}$ rencontrant à la fois F_1 et F_2 . Soient I_1 et I_2 deux ouverts disjoints de τ^u contenant respectivement l'intersection de τ^u avec F_1 et celle de τ^u avec F_2 . En considérant les saturés par $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ de I_1 et de I_2 on voit qu'il existe une feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ coupant I_1 et I_2 , ce qui contredit 2.2.

Les orbites $\widetilde{\Phi}_1$ et $\widetilde{\Phi}_2$ appartiennent donc à la même feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$. Si dans le raisonnement précédent on échange les rôles de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ et de $\widetilde{\mathcal{F}}^u$, on montre de la même manière que $\widetilde{\Phi}_1$ et $\widetilde{\Phi}_2$ appartiennent à la même feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^u$. D'après 2.2 il en découle que $\widetilde{\Phi}_1$ et $\widetilde{\Phi}_2$ sont égales. ■

Le théorème 3.1 admet pour corollaire:

Théorème 3.2 *L'espace des orbites est naturellement muni d'une structure de variété lisse difféomorphe à R^{n-1} . La projection $\pi^\Phi : \widetilde{M} \rightarrow Q^\Phi$ est une fibration (localement) triviale.*

Preuve Rappelons encore une fois que chaque feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^{uu}$ rencontre chaque feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ en au plus un point (cf. 2.2). Grâce au théorème des voisinages produits (cf. par exemple [25]), on en déduit le fait suivant:

Pour tout élément \tilde{x} de \widetilde{M} il existe une transversale τ à $\widetilde{\Phi}$ passant par \tilde{x} telle que toute feuille de $\widetilde{\Phi}$ rencontre τ en au plus un point.

On peut d'ailleurs également déduire ce fait de la non-existence d'orbites périodiques de $\widetilde{\Phi}^t$ et du "shadow lemma" (cf. par exemple [5]). Il existe donc une collection $(\tau_i)_{i \in I}$ de transversales à $\widetilde{\Phi}$ telle que:

- chaque feuille de $\widetilde{\Phi}$ rencontre une des transversales τ_i ,

- chaque transversale τ_i rencontre chaque feuille de $\tilde{\Phi}$ en au plus un point.

Il est clair que $((\tau_i, \pi|_{\tau_i}))_{i \in I}$ définit sur Q^Φ une structure de variété lisse: les changements de cartes de cette structure correspondent à l'holonomie de $\tilde{\Phi}$ entre deux transversales τ_i et τ_j .

Il est tout aussi aisé d'en déduire que $\pi^\Phi : \tilde{M} \rightarrow Q^\Phi$ est une fibration localement triviale. Le quotient Q^Φ est donc une variété de dimension $n - 1$, séparée et simplement connexe, comme le montre la suite exacte d'homotopie de π^Φ . Le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}^s$ passe au quotient en un feuilletage par plans de codimension un sur Q^Φ qui est donc difféomorphe à \mathbb{R}^{n-1} (cf. [22]). ■

La topologie de Q^Φ est donc particulièrement simple. Nous disposons également de deux données supplémentaires sur Q^Φ :

- une action du groupe fondamental Γ obtenue par passage au quotient de celle sur \tilde{M} ,
- deux feuilletages supplémentaires $\pi_*^\Phi(\tilde{\mathcal{F}}^s)$ et $\pi_*^\Phi(\tilde{\mathcal{F}}^u)$.

Définition 3.3 *Les feuilletages $\pi_*^\Phi(\tilde{\mathcal{F}}^s)$ et $\pi_*^\Phi(\tilde{\mathcal{F}}^u)$ de l'espace des orbites sont notés respectivement \mathcal{G}^s et \mathcal{G}^u .*

Théorème 3.4 *Deux flots d'Anosov de codimension un sont topologiquement équivalents, ou l'un est topologiquement équivalent à l'inverse de l'autre, si et seulement si il existe un homéomorphisme entre leurs espaces des orbites équivariants pour les actions des groupes fondamentaux.*

Rappelons la définition d'un homéomorphisme équivariant: Si Γ et Γ' sont deux groupes agissant respectivement sur deux espaces topologiques Q et Q' , un homéomorphisme h entre Q et Q' est dit équivariant pour ces actions s'il existe un isomorphisme σ entre Γ et Γ' tel que:

$$\forall x \in Q \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad h(\gamma.x) = \sigma(\gamma).h(x)$$

Preuve de 3.4 Une des implications est évidente. La seule difficulté consiste à montrer le sens suivant: si (M, Φ^t) et (N, Ψ^t) sont deux flots d'Anosov de codimension un tels qu'il existe un homéomorphisme h entre les espaces des orbites Q^Φ et Q^Ψ équivariants pour les actions des groupes fondamentaux respectifs Γ et Γ' , alors Φ^t et $\Psi^{\pm t}$ sont topologiquement équivalents.

La preuve que nous allons donner ici n'a rien d'original. Elle consiste à remarquer que la méthode employée dans [13] s'applique dans le cadre plus général où nous nous sommes placés.

La remarque essentielle est la suivante: Comme les revêtements d'holonomie de ses feuilles sont contractiles, le feuilletage (M, Φ) (respectivement (N, Ψ)) est un classifiant de son pseudogroupe d'holonomie transverse. Par ailleurs, l'action de Γ sur Q^Φ (respectivement de Γ' sur Q^Ψ) est un représentant de ce pseudogroupe d'holonomie transverse (pour toutes ces notions, voir [18]). L'existence de h signifie que (Q^Φ, Γ) et (Q^Ψ, Γ') sont équivalents en tant que pseudogroupes. Par unicité de l'espace classifiant (cf. [18]), il existe donc une application continue f entre M et N telle que:

1. f est une équivalence d'homotopie (elle est donc surjective),
2. f envoie chaque feuille de Φ sur une feuille de Ψ ,
3. f est "transversalement bijective", i.e., elle envoie deux feuilles différentes de Φ sur deux feuilles différentes de Ψ .

Cette application f vérifie toutes les conditions voulues pour être une équivalence topologique entre Φ^t et Ψ^t , sauf l'injectivité. Remarquons aussi que d'après (3) le défaut d'injectivité de f , s'il existe, est concentré sur les feuilles de Φ . En d'autres termes, f est bijective si et seulement si chacune de ses

restrictions à une feuille de Φ l'est. Ce défaut d'injectivité peut être supprimé grâce à un procédé de diffusion que nous allons développer ici.

Soit $u : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}$ l'application continue définie⁵ par l'équation:

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \forall x \in M \quad f(\Phi^t x) = \Psi^{u(t,x)}(f(x))$$

On vérifie aisément que c'est un cocycle, i.e., que u vérifie pour tout élément x de M les relations:

$$\begin{aligned} \forall s, t \in \mathbb{R} \quad u(t+s, x) &= u(t, \Phi^s x) + u(s, x) \\ \forall t \in \mathbb{R} \quad u(0, x) &= 0 \end{aligned}$$

L'essentiel des difficultés techniques est contenu dans le lemme suivant, que nous montrerons ultérieurement:

Lemme 3.5 *Il existe un réel T tel que pour tout élément x de M le réel $u(T, x)$ est non-nul.*

En effet, si le lemme 3.5 est vrai, on peut appliquer directement la méthode de [12]. Rappelons brièvement cette méthode. Soit T le réel positif donné par le lemme. On pose:

$$\forall x \in M \quad u_T(x) = \frac{1}{T} \int_0^T u(s, x) ds$$

On définit alors l'application $f_T : M \rightarrow N$ suivante:

$$f_T(x) = \Psi^{u_T(x)}(f(x))$$

Cette application vérifie les mêmes hypothèses que f . En outre:

$$f_T(\Phi^t x) = \Psi^{v_T(t,x)}(f(x))$$

où v_T est définie par:

$$v_T(t, x) = \frac{1}{T} \int_t^{T+t} u(s, x) ds$$

La dérivée de v_T par rapport au temps t est:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} v_T(t, x) &= \frac{1}{T} [u(T+t, x) - u(t, x)] \\ &= \frac{1}{T} u(T, \Phi^t x) \end{aligned}$$

Vu notre choix de T , cette dérivée ne s'annule jamais. Ceci montre que f_T est injective le long des orbites de Φ^t et conclut.

Preuve de 3.5 Pour traiter ce lemme particulièrement technique, nous allons introduire quelques notations. Soient $E^{ss}(\Phi^t)$ et $E^{uu}(\Phi^t)$ les fibrés forts stables et instables de Φ^t . Soient C, a, b, A, B des constantes positives telles que:

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall v \in E^{ss}(\Phi^t) \quad \frac{1}{C} e^{-at} \|v\| &\leq \|D\Phi^t(v)\| \leq C e^{-At} \|v\| \\ \forall v \in E^{uu}(\Phi^t) \quad \frac{1}{C} e^{bt} \|v\| &\leq \|D\Phi^t(v)\| \leq C e^{Bt} \|v\| \end{aligned}$$

Quitte à modifier la métrique sur M , nous pouvons supposer $C = 1$ (cf. [20]). Soient $E^{ss}(\Psi^t)$ et $E^{uu}(\Psi^t)$ les fibrés forts associés à Ψ^t . On définit comme pour Φ^t des constantes a', b', A', B' telles que:

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall v \in E^{ss}(\Psi^t) \quad e^{-a't} \|v\| &\leq \|D\Psi^t(v)\| \leq e^{-A't} \|v\| \\ \forall v \in E^{uu}(\Psi^t) \quad e^{b't} \|v\| &\leq \|D\Psi^t(v)\| \leq e^{B't} \|v\| \end{aligned}$$

⁵ L'existence d'orbites périodiques pour Φ^t peut laisser penser qu'une telle application u n'existe pas. Pour se convaincre de son existence, il suffit de considérer le problème analogue dans les revêtements universels \tilde{M} et \tilde{N} pour les flots relevés et un relevé de f . On obtient ainsi une application \tilde{u} qui passe naturellement au quotient pour définir l'application u recherchée.

La distance entre deux éléments x et x' de M (respectivement y et y' de N) sera notée $|x - x'|$ (respectivement $|y - y'|$). Nous appelons comme auparavant \mathcal{F}^{ss} , \mathcal{F}^{uu} , etc... les feuilletages associés à Φ^t . Ceux associés à Ψ^t sont notés W^{ss} , W^{uu} , W^s , W^u . Si x est un élément de M et ϵ un réel positif, nous appelons $\mathcal{F}_\epsilon^{ss}(x)$ la boule de rayon ϵ de centre x dans la feuille de \mathcal{F}^{ss} contenant x munie de la métrique induite. On étend de manière évidente cette notation aux autres feuilletages \mathcal{F}^{uu} , \mathcal{F}^s , \mathcal{F}^u , W^{ss} , ...

Nous aurons également besoin de l'application suivante du théorème des voisinages produits (cf. [24]): Il existe un réel η_0 et une fonction $\delta : [0, \eta_0] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que:

- le réel $\delta(\eta)$ tend vers 0 lorsque η tend vers 0,
- pour tout couple d'éléments y et y' de N à distance $\eta < \eta_0$ l'un de l'autre, les plaques $W_{\delta(\eta)}^{uu}(y)$ et $W_{\delta(\eta)}^s(y')$ (respectivement $W_{\delta(\eta)}^{ss}(y)$ et $W_{\delta(\eta)}^u(y')$) sont d'intersection non vide réduite à un singleton.

Nous définissons aussi une application $\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que:

$$\forall x, x' \in M \quad |x - x'| \leq \alpha(\epsilon) \Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq \epsilon$$

On choisit α croissante et convergeant vers 0 avec ϵ .

Nous convenons enfin des notations suivantes: pour tout élément x de M et pour tout réel t , nous notons $t.x$ l'image de x par Φ^t , et $t(x)$ l'image par f de $t.x$. Si y est un élément de N et t un réel, nous notons $t.y$ l'image par Ψ^t de y . Par définition même de u nous avons:

$$t(x) = u(t, x).f(x)$$

Soit \mathcal{E} le sous-ensemble connexe de $M \times M$ constitué des couples (x, x') tels que x' appartient à $\mathcal{F}_{\alpha(\eta_0)}^{ss}(x)$. Lorsque t est positif, Φ^t contracte \mathcal{F}^{ss} . Son action diagonale sur $M \times M$ envoie donc \mathcal{E} dans lui-même. On peut donc définir deux éléments u_t et s_t de N de la manière suivante:

$$\begin{aligned} u_t &= W_{\delta(\eta_0)}^{uu}(t(x)) \cap W_{\delta(\eta_0)}^s(t(x')) \\ s_t &= W_{\delta(\eta_0)}^{ss}(t(x)) \cap W_{\delta(\eta_0)}^u(t(x')) \end{aligned}$$

Remarquons que:

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0 \quad |u_t - t(x)| &\leq \delta(|t(x) - t(x')|) \\ \forall t \geq 0 \quad |s_t - t(x)| &\leq \delta(|t(x) - t(x')|) \end{aligned}$$

Remarquons aussi que:

$$\forall t \geq 0 \quad s_t = u(t, x).s_0 \quad u_t = u(t, x).u_0$$

En effet, il est facile de voir que, à x et x' fixés, le fermé de \mathbb{R}^+ constitué des temps t pour lesquels ces égalités ont lieu est ouvert. Comme il est non vide (il contient 0), c'est \mathbb{R}^+ tout entier.

On en déduit:

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0 \quad e^{+b'u(t, x)} |u_0 - f(x)| &\leq \delta(|t(x) - t(x')|) \\ \forall t \geq 0 \quad e^{-a'u(t, x)} |s_0 - f(x)| &\leq \delta(|t(x) - t(x')|) \end{aligned}$$

Or, le terme de droite commun à ces deux inégalités tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. Comme s_0 et u_0 ne peuvent être simultanément égaux à $t(x)$ (du moins, si x et x' sont différents: ceci provient de la bijectivité transverse de f), il s'en suit:

- soit $s_0 = f(x)$ et $u(t, x)$ tend vers $-\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$,
- soit $u_0 = f(x)$ et $u(t, x)$ tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$.

Soit E^+ l'ensemble des éléments x de M pour lesquels $u(t, x)$ tend vers $+\infty$, et E^- celui des éléments x pour lesquels $u(t, x)$ tend vers $-\infty$. Les sous-ensembles E^+ et E^- forment une partition de M . Soit ν une constante strictement positive suffisamment petite pour que, pour tout élément x de E^+ , il existe un élément x' de M tel que:

- le couple (x, x') appartient à \mathcal{E} ,
- la distance $|s_0 - f(x)|$ est supérieure à ν .

Alors:

$$(*) \quad \forall t \geq 0 \quad u(t, x) \geq \frac{1}{a'} \log \nu - \frac{1}{a'} \log(\delta(|t(x') - t(x)|))$$

Or, il existe un réel positif T tel que pour tout temps t supérieur à T le terme de droite dans l'inégalité $(*)$ est supérieur à 1, et ceci de manière indépendante de x . Donc:

$$\forall t \geq T \quad \forall x \in E^+ \quad u(t, x) \geq 1$$

Un raisonnement analogue montre qu'on peut choisir T de telle sorte qu'on ait aussi:

$$\forall t \geq T \quad \forall x \in E^- \quad u(t, x) \leq -1$$

Ceci montre comme voulu que $u(T, x)$ n'est jamais nul. ■

4 Recomposition de l'espace des orbites à partir des espaces des feuilles

Dans cette section, (M, Φ^t) désigne un flot d'Anosov produit sur une variété de dimension 3. Rappelons que l'hypothèse produit signifie que Q^s est séparé, i.e., difféomorphe à \mathbb{R} .

Théorème 4.1 *Pour tout flot d'Anosov produit sur une variété de dimension 3, l'espace des feuilles instable est lui aussi séparé.*

Preuve Nous supposons que la variété et les divers feuilletages sont tous orientés.

Rappelons que l'espace des orbites Q^Φ est naturellement muni de deux feuilletages par droites transverses \mathcal{G}^s et \mathcal{G}^u . Les espaces des feuilles de ces feuilletages ne sont autres que Q^s et Q^u . Nous appelons $p^s : Q^\Phi \rightarrow Q^s \simeq \mathbb{R}$ et $p^u : Q^\Phi \rightarrow Q^u$ les submersions définissant \mathcal{G}^s et \mathcal{G}^u .

A tout élément x de Q^Φ nous associons l'image par p^s de la feuille de \mathcal{G}^u le contenant: il s'agit d'un intervalle $]\alpha(x), \beta(x)[$ de $Q^s \simeq \mathbb{R}$. Les quantités $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sont des réels ou $\pm\infty$. Il est immédiat de voir que l'application α est semi-continue supérieurement et que β est semi-continue inférieurement. De plus, elles commutent avec les actions de Γ .

Lemme 4.2 *L'application α ou bien ne prend que des valeurs finies, ou bien vaut toujours $-\infty$.*

Preuve L'ensemble des orbites sur lesquelles α prend la valeur $-\infty$ est Γ -invariant et saturé par \mathcal{G}^u . Le flot étant transitif (cf. théorème 2.5), il suffit de montrer que cet ensemble est ouvert.

Soit x un élément de cet ensemble: nous appelons respectivement τ^s et F les feuilles de \mathcal{G}^s et de \mathcal{G}^u passant par x . Comme l'orbite de F par Γ est dense dans Q^Φ , il existe deux éléments y et z de τ^s encadrant x et appartenant chacun à un itéré de F . Ces deux orbites sont elles aussi des antécédents de $-\infty$ pour α , ce qui signifie que pour chacune la feuille de \mathcal{G}^u la contenant coupe toutes les feuilles de \mathcal{G}^s inférieures à τ^s . Il s'en suit que α ne peut prendre que la valeur $-\infty$ sur tout l'intervalle $[y, z]$ de τ^s . Ceci conclut. ■

Le cas de β est bien sûr analogue: ou bien il ne prend que des valeurs finies, ou bien il prend partout la valeur $+\infty$.

Lemme 4.3 *Si α ne prend que des valeurs infinies, il en est de même pour β .*

Preuve Supposons que α vale partout $-\infty$ et que β au contraire soit partout fini. Considérons une orbite x de Q^Φ qui soit point fixe d'un élément γ de Γ . Alors, la feuille $\beta(x)$ est elle aussi fixée par γ . Il en découle qu'elle doit contenir elle aussi une orbite x' fixée par γ . Ceci est absurde: les feuilles $G^s(x)$ et $G^u(x')$ devraient se rencontrer, ce qui impliquerait que chacune contient deux orbites fixées par γ . ■

Si α et β ne prennent que des valeurs infinies, il résulte du théorème 2.7 que le flot est topologiquement équivalent à la suspension d'un difféomorphisme du tore. Le théorème est vérifié dans ce cas de figure. Nous supposons donc que α et β ne prennent que des valeurs finies.

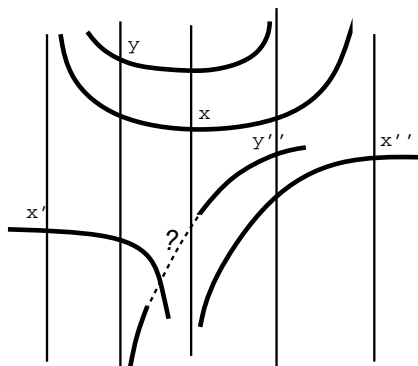
Une feuille $G^u(x)$ déconnecte ou non les deux feuilles $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ de G^s . Si elle déconnecte, l'orbite x est dite de *type D*. Elle est dite de *type C* sinon. Nous allons montrer que seul le type **D** est possible.

Pour chaque orbite x de type **C**, la composante connexe de $Q^\Phi \setminus G^u(x)$ ne contenant ni $\alpha(x)$ ni $\beta(x)$ est notée \mathcal{D}_x . Il est clair que tous les éléments de \mathcal{D}_x sont eux aussi de type **C**. Les orbites périodiques étant denses, l'ouvert \mathcal{D}_x contient un point fixe d'un élément γ de Γ . Nous pouvons donc nous ramener au cas où x est ce point fixe. Alors, les feuilles $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ de G^s sont elles aussi fixées par γ . Elles contiennent chacune un point fixe de γ : celui de $\alpha(x)$ est noté x' , celui de $\beta(x)$ est noté x'' .

La feuille $G^u(x')$ ne peut rencontrer $\beta(x)$. De même, $G^u(x'')$ ne peut rencontrer $\alpha(x)$. Comme $G^s(x)$ est l'unique feuille de G^s comprise entre $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ qui soit fixée par γ , il s'en suit qu'elle est à la fois $\alpha(x'')$ et $\beta(x')$.

Par densité des feuilles cylindriques, il existe dans \mathcal{D}_x une feuille de G^u rencontrant $G^s(x)$ et fixée par un élément γ' de Γ . Cette feuille ne rencontre ni $\alpha(x)$, ni $\beta(x)$, ni $G^u(x)$. Elle est donc entièrement contenue dans \mathcal{D}_x . Soit y l'orbite fixée par γ' contenue dans cette feuille fixe: elle appartient à \mathcal{D}_x . Comme elle ne peut être fixée par γ , la feuille $G^s(y)$ est disjointe de $G^s(x)$. Elle rencontre donc soit $G^u(x')$, soit $G^u(x'')$. Ces deux cas étant analogues, nous nous plaçons dans le premier.

Ce que nous avons montré pour x s'applique à y . En particulier, la feuille $G^s(y)$ est le " α " d'un y'' . Ceci mène à une contradiction: les feuilles $G^u(y'')$ et $G^u(x')$ devraient se rencontrer tout en étant différentes.



Toutes les orbites sont donc de type **D**. Il est aisé d'en déduire que Q^u est séparé. ■

Les deux applications α et β introduites lors de la preuve de 4.1 sont constantes le long des feuilles de G^u . Elles induisent donc deux applications α_u et β_u de Q^u vers Q^s . On peut définir de manière analogue deux applications α_s et β_s de Q^s vers Q^u . Ces applications "conjuguent" les actions de Γ sur Q^s et Q^u . Il est intéressant de connaître leur nature topologique.

Lemme 4.4 *Lorsque (M, Φ^t) n'est pas topologiquement équivalent à une suspension, les applications $\alpha_s, \alpha_u, \beta_s$ et β_u sont des homéomorphismes.*

Preuve Nous ne nous intéressons qu'aux applications α_s et β_s . Le cas de α_u et β_u se traite de la même manière. Rappelons que, comme le flot n'est pas topologiquement équivalent à une suspension, les

applications α_s et β_s ne prennent que des valeurs finies. Il suffit d'établir le lemme pour α_s , le cas de β_s étant analogue.

Soit φ l'application de Q^Φ dans $Q^s \times Q^u$ qui a une orbite associée ses feuilles stables et instables. D'après 2.2, φ est injective. Il s'agit donc d'un homéomorphisme sur son image Ω . Cet ouvert Ω est l'ensemble des couples (x, y) tels que $\alpha_s(x) < y < \beta_s(x)$. L'intersection de l'ouvert Ω par une horizontale $Q^s \times \{y\}$ est identifiée via φ à la feuille y de G^u . Elle est donc connexe. Ceci signifie que si $x < x' < x''$ sont trois éléments de Q^s on ne peut avoir $\alpha_s(x)$ et $\alpha_s(x'')$ tous les deux inférieurs à $\alpha_s(x')$. Donc, si α_s n'est pas monotone, c'est qu'il existe un triplet $x < x' < x''$ vérifiant:

$$\alpha_s(x') < \alpha_s(x) \quad \alpha_s(x') < \alpha_s(x'')$$

Il en découle que α_s est décroissante sur $] -\infty, x[$ et croissante sur $]x'', +\infty[$. Soit y_0 la borne supérieure des éléments y pour lesquels α_s est décroissante sur l'intervalle $] -\infty, y[$. Il est clair que y_0 devrait être un point fixe commun à tous les éléments de Γ , ce qui est manifestement une absurdité.

L'application α_s est donc monotone. Si Q^s et Q^u sont convenablement orientés, elle est croissante. Nous affirmons qu'elle est continue. En effet: si α_s admet un saut de discontinuité, il existerait dans Q^u un intervalle I disjoint de l'image de α_s . Ceci contredit l'invariance de l'image de α_s pour l'action de Γ et la minimalité de cette action. En particulier, l'image de α_s est un intervalle ouvert de Q^u . Une extrémité de cet intervalle serait un point fixe commun à tous les éléments de Γ . Il n'en existe donc pas, ce qui montre la surjectivité de α_s . Enfin, l'ensemble des points de Q^s au voisinage desquels α_s est constante est un ouvert préservé par l'action de Γ . Toujours par minimalité de cette dernière, si cet ouvert était non vide il serait Q^s tout entier. Ceci signifierait que α_s est constante, ce qui contredit sa surjectivité. α_s est donc injective. ■

Remarque 4.5 Il est facile de voir que si les orientations ont été choisies de sorte que α_s - et donc également β_s - soit croissante, l'inverse de α_s n'est autre que β_u et celui de β_s est α_u .

Nous en arrivons à la preuve du théorème B énoncé lors de l'introduction. Nous allons le démontrer sous la forme suivante:

Théorème 4.6 *Deux flots d'Anosov produits sur des variétés de dimension 3 sont topologiquement équivalents si et seulement si il existe un homéomorphisme entre leurs espaces des feuilles stables équivariant pour les actions des groupes fondamentaux.*

Preuve Soient (M_1, Φ_1^i) et (M_2, Φ_2^i) deux tels flots d'Anosov produits. Appelons (Q_1^s, Γ_1) et (Q_2^s, Γ_2) leurs espaces des feuilles stables munis des actions des groupes fondamentaux respectifs. Il s'agit de montrer que si il existe un homéomorphisme h entre Q_1^s et Q_2^s et un isomorphisme σ entre Γ_1 et Γ_2 tels que:

$$\forall x \in Q_1^s \quad \forall \gamma \in \Gamma_1 \quad h(\gamma x) = \sigma(\gamma)h(x)$$

alors (M_1, Φ_1^i) et (M_2, Φ_2^i) sont topologiquement équivalents .

Nous ne traitons pas le cas bien connu où (M_1, Φ_1^i) et (M_2, Φ_2^i) sont tous les deux topologiquement équivalents à des suspensions (voir par exemple [15]). Le cas où l'un des deux seulement est topologiquement équivalent à une suspension s'en déduit aisément. En effet, d'après [23], les suspensions sont caractérisées parmi les flots d'Anosov par le fait que leurs feuilletages faibles sont transversalement affines. Ainsi, si (M_1, Φ_1^i) est une suspension, l'homéomorphisme h envoie la structure affine de Q_1^s sur une structure affine sur Q_2^s préservée par l'action de Γ_2 . Le flot (M_2, Φ_2^i) est donc lui-aussi topologiquement équivalent à une suspension.

Nous supposons donc désormais que ni Φ_1^i , ni Φ_2^i , n'est topologiquement équivalent à une suspension. Nous notons Q_i^Φ ($i = 1, 2$) les espaces des orbites respectifs. Via l'application φ définie lors de la preuve du lemme 4.4 on peut identifier chacun d'entre eux à des ouverts U_1 et U_2 de respectivement $Q_1^s \times Q_1^u$ et $Q_2^s \times Q_2^u$ compris entre les graphes de deux homéomorphismes, respectivement α_s^1, β_s^1 et α_s^2, β_s^2 .

Posons $\tau_s^i = (\alpha_s^i)^{-1} \circ \beta_s^i$ ($i = 1, 2$). Il s'agit d'un homéomorphisme de Q_s^i . Soit C_i l'ensemble des éléments de Q_s^i à Γ_i -isotropie non-triviale. Pour tout élément x de C_i soit γ un élément de son groupe d'isotropie préservant l'orientation de Q_s^i . Alors, comme toute feuille de G^s et de G^u contient au plus un point fixe de γ , il est facile de voir que $\tau_s^i(x)$ est caractérisé par la propriété suivante: $\tau_s^i(x)$ est l'unique point fixe de γ supérieur à x tel que l'intervalle $]x, \tau_s^i(x)[$ contient un et un seul point fixe de γ . Si on choisit comme orientation de Q_s^2 l'orientation image par h de celle de Q_s^1 , on en déduit l'égalité:

$$\forall x \in C_1 \quad h(\tau_s^1(x)) = \tau_s^2(h(x))$$

Comme C_1 est dense dans Q_s^1 (cf. proposition 2.4), il s'en suit:

$$h \circ \tau_s^1 = \tau_s^2 \circ h \quad (1)$$

Soit F l'homéomorphisme défini par:

$$F : Q_1^s \times Q_1^u \rightarrow Q_2^s \times Q_2^u \\ (x, y) \mapsto (h(x), \alpha_s^2 \circ h \circ (\alpha_s^1)^{-1}(y))$$

Un calcul élémentaire utilisant (1) montre que F envoie $U_1 \simeq Q_1^\Phi$ sur $U_2 \simeq Q_2^\Phi$.

Pour tout élément γ de Γ_1 préservant l'orientation de Q_1^s nous avons:

$$\alpha_s^1 \circ \gamma = \gamma \circ \alpha_s^1 \quad (2)$$

Ceci n'est plus vrai lorsque γ renverse l'orientation de Q^s puisqu'alors:

$$\alpha_s^1 \circ \gamma = \gamma \circ \beta_s^1 \quad (3)$$

Les éléments de Γ_2 vérifient des égalités analogues vis-à-vis de α_s^2 et β_s^2 . Si γ est un élément de Γ_1 renversant l'orientation de Q_1^s , $\sigma(\gamma)$ renverse lui-aussi l'orientation de Q_2^s , et d'après (2) nous avons alors:

$$\forall y \in Q_1^u \quad \alpha_s^2 \circ h \circ (\alpha_s^1)^{-1}(\gamma y) = \sigma(\gamma) \alpha_s^2 \circ h \circ (\alpha_s^1)^{-1}(y)$$

De même, si γ renverse l'orientation, il en est de même pour $\sigma(\gamma)$, et:

$$\begin{aligned} \alpha_s^2 \circ h \circ (\alpha_s^1)^{-1}(\gamma y) &= \alpha_s^2 \circ h(\gamma(\beta_s^1)^{-1}(y)) \\ &= \alpha_s^2(\sigma(\gamma)h \circ (\beta_s^1)^{-1}(y)) \\ &= \sigma(\gamma)\beta_s^2 \circ h \circ (\beta_s^1)^{-1}(y) \\ &= \sigma(\gamma)\alpha_s^2 \circ h \circ (\alpha_s^1)^{-1}(y) \end{aligned}$$

La dernière égalité ci-dessus provient de (1). D'après ce qui précède, F est un homéomorphisme entre Q_1^Φ et Q_2^Φ tel que:

$$\forall x \in Q_1^\Phi \forall \gamma \in \Gamma_1 \quad F(\gamma x) = \sigma(\gamma)F(x)$$

D'après le théorème 3.4, il s'en suit que Φ_1^t est topologiquement équivalent à Φ_2^t ou à l'inverse Φ_2^{-t} . L'équivalence topologique ainsi construite préserve les feuilletages faibles stables. Ceci montre qu'elle envoie en fait Φ_1 sur Φ_2 tout en préservant leurs orientations. \blacksquare

Nous nous appliquons maintenant à montrer point par point le théorème C. Dans tout ce qui suit, (M, Φ^t) désigne un flot d'Anosov produit sur une variété de dimension 3 non topologiquement équivalent à une suspension.

Proposition 4.7 *La variété M est orientable.*

Preuve Comme les orbites de Φ^t sont naturellement orientées, il s'agit de montrer que l'action de Γ sur Q^Φ préserve une orientation. Vu notre identification entre Q^Φ et l'ouvert Ω de $Q^s \times Q^u$, ceci revient à montrer qu'un élément γ de Γ renverse l'orientation de Q^s si et seulement si il renverse celle de Q^u . Ceci est trivial puisque l'un comme l'autre équivaut à:

$$\gamma \circ \alpha_s = \beta_s \circ \gamma$$

\blacksquare

Proposition 4.8 *Si un des feuilletages faibles de (M, Φ^t) est transversalement orienté, alors (M, Φ^t) est topologiquement équivalent à son inverse. De plus, l'équivalence topologique peut être choisie homotope à l'identité.*

Preuve D'après 4.7, les deux feuilletages faibles sont transversalement orientés. Donc:

$$\forall \gamma \in \Gamma \quad \alpha_s \circ \gamma = \gamma \circ \alpha_s$$

L'homéomorphisme α_s est donc une conjugaison topologique entre (Q^s, Γ) et (Q^u, Γ) . Nous sommes donc sous les hypothèses de 4.6 dans le cas particulier où l'isomorphisme $\sigma : \Gamma \rightarrow \Gamma$ est l'identité. ■

Proposition 4.9 *Il n'existe pas de surface plongée dans M transverse au flot Φ^t .*

Preuve Quitte à considérer un revêtement double, on peut supposer que les feuilletages faibles sont transversalement orientés. Il existe donc d'après 4.8 une équivalence topologique h entre Φ^t et Φ^{-t} homotope à l'identité.

Nous raisonnons par l'absurde. Soit S une surface plongée dans M transverse au flot. Elle définit un élément ω de $H^1(M, \mathbb{R})$ qui ne prend que des valeurs positives sur l'ensemble des périodes de Φ^t , i.e., l'ensemble des éléments de $H_1(M, \mathbb{R})$ représentés par les orbites périodiques orientées de Φ^t . D'après 2.5, il existe une orbite périodique θ de Φ^t rencontrant S . L'élément $[\theta]$ de $H_1(M, \mathbb{R})$ qu'elle représente vérifie:

$$\omega([\theta]) > 0$$

Or, $h(\theta)$ est une orbite périodique orientée de Φ^{-t} . Donc:

$$0 \geq \omega([h(\theta)]) = \omega(h_*[\theta]) = \omega([\theta])$$

Contradiction. ■

5 Flots d'Anosov dont l'un des feuilletages faibles est transversalement projectif

Rappelons l'énoncé du théorème A:

Théorème 5.1 *Un flot d'Anosov sur une variété de dimension 3 est topologiquement équivalent à un flot algébrique si et seulement si un de ses feuilletages faibles est transversalement projectif.*

Pour la définition de flot d'Anosov algébrique, nous renvoyons le lecteur à [28].

Rappelons brièvement la définition d'une structure projective transverse à un feuilletage (M, \mathcal{F}) : il s'agit de la donnée d'un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de M et de submersions f_i de U_i dans la droite projective réelle P^1 telles que:

- la restriction de \mathcal{F} à U_i est le feuilletage défini par f_i ,
- les restrictions de f_i et f_j à l'ouvert $U_i \cap U_j$ diffèrent par une transformation projective au but.

Remarquons en particulier que cette définition implique que \mathcal{F} est transversalement orienté. Lorsque toutes les submersions locales f_i sont de classe C^r ($r \geq 0$) la structure transverse est dite de classe C^r . Lorsque la régularité de la structure n'est pas précisée, comme par exemple dans l'énoncé du théorème 5.1, elle est supposée seulement continue.

De manière analogue, si les submersions f_i sont à valeurs dans \mathbb{R} et que les changements de carte sont des restrictions de transformations affines, le feuilletage est dit transversalement affine.

Notons comme toujours \widetilde{M} le revêtement universel de M et \widetilde{P}^1 celui de P^1 . Soit $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ le revêtement universel de $PSL(2, \mathbb{R})$, groupe des transformations projectives de P^1 . Il s'agit d'un groupe qui agit naturellement sur \widetilde{P}^1 . Fixons une fois pour toute une orientation de \widetilde{P}^1 . Le centre de $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$, qui est cyclique, admet un unique générateur δ tel que pour tout élément x de \widetilde{P}^1 , $\delta(x)$ est supérieur à x . Remarquons que δ engendre aussi le groupe des automorphismes de revêtement de $\widetilde{P}^1 \rightarrow P^1$.

Il est bien connu que la donnée d'un feuilletage transversalement projectif équivaut à la donnée d'une submersion $\mathcal{D} : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{\mathcal{P}}^\infty$ et d'un morphisme $H : \Gamma \rightarrow \widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ vérifiant:

$$\forall x \in \widetilde{M} \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad \mathcal{D}(\gamma x) = H(\gamma)\mathcal{D}(x)$$

Le lien entre le feuilletage \mathcal{F} et le couple (\mathcal{D}, H) est le suivant: \mathcal{F} est la projection dans M du feuilletage de \widetilde{M} défini par \mathcal{D} . \mathcal{D} est appelé *application développante* de la structure. Elle est de même classe de différentiabilité que la structure transverse. H est appelé représentation d'holonomie associée à la structure.

Des exemples particulièrement simples de feuilletages transversalement projectifs sont fournis par les suspensions de difféomorphismes linéaires hyperboliques du tore. Il s'agit d'un cas particulier: les feuilletages faibles de ces flots d'Anosov sont transversalement affines. Rappelons à l'occasion que d'après [23] ces flots sont les uniques flots d'Anosov en dimension 3 admettant cette propriété.

Une autre famille d'exemples est donnée par les feuilletages faibles des *flots géodésiques généralisés*. Il s'agit des flots d'Anosov algébriques ne différant des flots géodésiques usuels qu'à des revêtements finis près. Ces flots sont définis de la manière suivante: soit Γ un sous-groupe discret cocompact de $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$. L'algèbre de Lie $sl(2, \mathbb{R})$ de $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ s'identifie à l'ensemble des matrices d'ordre 2 de trace nulle. Soit X, Y, Z les éléments suivants de $sl(2, \mathbb{R})$:

$$X = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \quad H^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad H^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit g^t le sous-groupe à un paramètre de $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ engendré par X . Il agit par translations à droite sur le quotient $\Gamma \backslash \widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$. Nous notons Φ_Γ^t le flot ainsi obtenu. Il est bien connu que Φ_Γ^t est un flot d'Anosov dont les fibrés forts stables et instables sont les champs de droite engendré respectivement par H^+ et H^- . Soit \mathcal{A} le sous-groupe de $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ défini par la sous-algèbre de $sl(2, \mathbb{R})$ engendrée par X et H^+ . Il est isomorphe au groupe des transformations affines directes de \mathbb{R} . D'après ce qui précède, le feuilletage faible stable relevé $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ est le feuilletage de $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ dont les feuilles sont les classes à droites modulo \mathcal{A} . L'espace des feuilles de Φ_Γ^t s'identifie donc au quotient à droite $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})/\mathcal{A}$. L'action du groupe fondamental sur l'espace des feuilles correspond à l'action de Γ sur $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})/\mathcal{A}$ par passage au quotient de l'action par translations à gauche. Or, comme $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ agit (à gauche) sur \widetilde{P}^1 transitivement, et que \mathcal{A} est le groupe d'isotropie pour cette action d'un certain élément de \widetilde{P}^1 , le quotient $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})/\mathcal{A}$ s'identifie à \widetilde{P}^1 , et l'action de Γ correspond à son action projective naturelle sur \widetilde{P}^1 . En d'autres termes, le couple (Q^s, Γ) correspondant à Φ_Γ^t s'identifie au couple $(\widetilde{P}^1, \Gamma)$, où Γ agit projectivement sur \widetilde{P}^1 en tant que sous-groupe de $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$.

Preuve de 5.1 D'après [28], un flot d'Anosov algébrique est soit la suspension d'un difféomorphisme linéaire hyperbolique du tore, soit un des flots Φ_Γ^t décrits précédemment. Nous venons de voir que les feuilletages faibles stables de ces flots d'Anosov sont transversalement projectifs. Il est évident que cette propriété est préservée par équivalence topologique. Une des implications de 5.1 est donc claire.

Soit inversement (M, Φ^t) un flot d'Anosov dont l'un des feuilletages faibles est transversalement projectif. Quitte à inverser le flot, on peut supposer qu'il s'agit du faible stable. Appelons \mathcal{D} et H l'application développante et la représentation d'holonomie associées à la structure projective transverse à \mathcal{F}^s . L'application \mathcal{D} est par définition même constante le long des feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$. Elle passe donc au quotient en un homéomorphisme local entre Q^s et \widetilde{P}^1 . Nous notons $\widetilde{\mathcal{D}}$ cette application. La composition de \mathcal{D} et du revêtement $\widetilde{P}^1 \rightarrow P^1$ est notée \mathcal{D}' .

Lemme 5.2 *Pour tout élément x de \widetilde{M} , la restriction à $\widetilde{\mathcal{F}}^{uu}(x)$ de \mathcal{D}' est un difféomorphisme sur son image. Son image est le complémentaire dans P^1 d'un singleton.*

Ce lemme peut être énoncé sous la forme suivante: la structure projective transverse munit chaque feuille de \mathcal{F}^{uu} d'une structure de droite affine complète.

Preuve Rappelons que δ désigne un des générateurs du centre de $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$. L'image par \mathcal{D} d'une feuille $\widetilde{\mathcal{F}}^{uu}(x)$ est un intervalle de \widetilde{P}^1 de la forme $]\nu(x), \xi(x)[$. Les applications ν et ξ ainsi définies sont $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ -invariantes et sont semi-continues, l'une supérieurement, l'autre inférieurement.

Si une feuille $\widetilde{\mathcal{F}}^{uu}(x)$ est fixée par un élément γ de Γ , l'intervalle $]\nu(x), \xi(x)[$ est préservé par l'action de $H(\gamma)$ sur \widetilde{P}^1 . De plus, la restriction à cet intervalle de $H(\gamma)$ est une contraction ou une dilatation. Il en découle:

$$\xi(x) = \delta(\nu(x)) \quad (1)$$

Par densité des feuilles cylindriques et par semi-continuité de ν et de ξ nous en déduisons:

$$\forall x \in \widetilde{M} \quad \xi(x) \leq \delta(\nu(x))$$

Nous avons ainsi montré la première partie du lemme: la restriction à $\widetilde{\mathcal{F}}^{uu}(x)$ de \mathcal{D}' est injectif. Le complémentaire dans P^1 de son image est noté I_x . Notre but est de montrer que I_x est un singleton.

Pour la suite, il nous sera commode d'identifier la droite projective réelle P^1 au bord $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ du demi-plan hyperbolique de Poincaré.

Choisissons un paramétrage continu quelconque de \mathcal{F}^{uu} . Il se relève en un paramétrage Γ -invariant u^τ de $\widetilde{\mathcal{F}}^{uu}$. Pour tout élément x de \widetilde{M} , soit γ_x l'unique élément de $PSL(2, \mathbb{R})$ envoyant $\mathcal{D}'(x)$ sur ∞ , $\mathcal{D}'(u^1(x))$ sur -1 , et $\mathcal{D}'(u^{-1}(x))$ sur 1 . Alors, γ_x envoie I_x sur un intervalle fermé J_x de $]-1, +1[$ dont nous notons $l(x)$ la longueur (c'est-à-dire, la différence dans \mathbb{R} de ses extrémités).

Le fait suivant découle aisément de la compacité de M et de la continuité de \mathcal{D} et de u^τ :

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall \tau \in]-\epsilon, +\epsilon[\quad \forall x \in \widetilde{M} \quad |\gamma_x(\mathcal{D}'(u^\tau(x)))| \geq 2 \quad (2)$$

Pour chaque réel t , soit g_x^t l'unique élément de $PSL(2, \mathbb{R})$ coïncidant avec $\gamma_{\tilde{\phi}^t x} \circ \tilde{\phi}^t \circ \gamma_x^{-1}$ sur le complémentaire de J_x (Rappelons que $\tilde{\phi}^t$ préserve les structures projectives considérées). Il fixe ∞ , sa restriction à \mathbb{R} est donc une homothétie-translation:

$$z \mapsto a_x^t z + b_x^t$$

Comme g_x^t envoie J_x sur $J_{\tilde{\phi}^t x}$, nous obtenons:

$$l(\tilde{\phi}^t x) = |a_x^t| l(x) \quad (3)$$

De plus, g_x^t envoie -1 et $+1$ sur les images par $\gamma_{\tilde{\phi}^t x}$ de $\tilde{\phi}^t(u^1 x)$ et $\tilde{\phi}^t(u^{-1} x)$. Or, pour les temps t négatifs suffisamment grands en valeur absolue, la restriction à $\widetilde{\mathcal{F}}^{uu}(x)$ de $\tilde{\phi}^t$ est une contraction. Il existe donc un réel T négatif tel que:

$$\forall t \leq T \quad \exists \tau, \tau' \in]-\epsilon, +\epsilon[\quad \begin{aligned} \tilde{\phi}^t(u^1 x) &= u^\tau(\tilde{\phi}^t x) \\ \tilde{\phi}^t(u^{-1} x) &= u^{\tau'}(\tilde{\phi}^t x) \end{aligned}$$

où ϵ est le réel positif intervenant au (2). D'où:

$$\forall t \leq T \quad \begin{aligned} -a_x^t + b_x^t &\leq -2 \\ a_x^t + b_x^t &\geq 2 \end{aligned}$$

Il en découle que $|a_x^T|$ est supérieur à 2. D'après (3), ceci signifie que pour tout élément x de \widetilde{M} il existe un réel T tel que $l(\tilde{\phi}^T x)$ est au moins le double de $l(x)$. Comme tous les $l(x)$ sont inférieurs à 2, ils sont en fait tous nuls. ■

Nous réutiliserons par la suite l'application ν introduite lors de cette preuve. Notons qu'elle est continue puisqu'elle est semi-continue supérieurement et que $\xi = \delta(\nu)$ est semi-continue inférieurement.

Lemme 5.3 *L'espace des feuilles instable Q^u est séparé.*

Preuve Supposons l'existence de deux feuilles $\mathcal{G}^u(x_1)$ et $\mathcal{G}^u(x_2)$ de \mathcal{G}^u distinctes mais non séparées.

Comme \mathcal{D} est invariante le long des orbites du flot, elle passe au quotient en une application définie sur Q^Φ . Cette application sera notée abusivement \mathcal{D} elle aussi.

Comme $\mathcal{G}^u(x_1)$ et $\mathcal{G}^u(x_2)$ sont non séparées, il existe une feuille de \mathcal{G}^u rencontrant $\mathcal{G}^s(x_1)$ et $\mathcal{G}^s(x_2)$ en respectivement z_1 et z_2 . Comme $\mathcal{G}^u(x_1)$ et $\mathcal{G}^u(x_2)$ ne peuvent rencontrer une même feuille de \mathcal{G}^s , z_1 et z_2 sont différents. La restriction de \mathcal{D} à chaque feuille de \mathcal{G}^u étant injective nous obtenons:

$$\mathcal{D}(x_1) = \mathcal{D}(z_1) \neq \mathcal{D}(z_2) = \mathcal{D}(x_2)$$

Quitte à échanger les indices, nous avons:

$$\mathcal{D}(x_1) < \mathcal{D}(x_2)$$

L'image de $\mathcal{G}^u(x_1) \times \mathcal{G}^u(x_2)$ par $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ est un ouvert connexe de $\tilde{P}^1 \times \tilde{P}^1$ privé de la diagonale. Donc, pour tout couple (y_1, y_2) d'éléments de Q^Φ , l'un dans $\mathcal{G}^u(x_1)$, l'autre dans $\mathcal{G}^u(x_2)$, nous avons:

$$\mathcal{D}(y_1) < \mathcal{D}(y_2)$$

D'où:

$$\xi(x_1) = \delta(\nu(x_1)) \leq \nu(x_2)$$

Il existe donc un tel couple (y_1, y_2) tel que:

$$\delta(\mathcal{D}(y_1)) < \mathcal{D}(y_2)$$

Mais $\mathcal{G}^u(x_1)$ et $\mathcal{G}^u(x_2)$ étant non-séparés, on montre comme précédemment qu'il existe une feuille de \mathcal{G}^u dont l'image par \mathcal{D} contient $\mathcal{D}(y_1)$ et $\mathcal{D}(y_2)$. Ceci contredit le lemme 5.2. ■

D'après le théorème 4.1 l'espace des feuilles stables Q^s est lui aussi séparé. L'application $\bar{\mathcal{D}}$ est donc un homéomorphisme sur son image.

Lemme 5.4 *La représentation d'holonomie H est injective.*

Preuve Comme $\bar{\mathcal{D}}$ est injective un élément du noyau de H agit trivialement sur Q^s . Or l'action de Γ sur Q^s est effective. ■

Lemme 5.5 *Si $\bar{\mathcal{D}}$ n'est pas surjective \mathcal{F}^s est transversalement affine.*

Preuve L'image de $\bar{\mathcal{D}}$ est un intervalle ouvert de \tilde{P}^1 . S'il n'est pas \tilde{P}^1 tout entier il admet une extrémité, disons, une borne inférieure η_0 . Cette borne est alors fixée par tout $H(\Gamma)$. Il en est donc de même pour $\delta(\eta_0)$ qui ne peut donc appartenir à l'image de $\bar{\mathcal{D}}$. Celle-ci est donc contenue dans la droite affine $]\eta_0, \delta(\eta_0)[$ sur laquelle $H(\Gamma)$ agit affinement. ■

Le cas affine est connu: le flot d'Anosov est alors topologiquement équivalent à une suspension. Il ne reste donc qu'à étudier le cas où $\bar{\mathcal{D}}$ est un homéomorphisme, c'est-à-dire, une conjugaison topologique entre (Q^s, Γ) et l'action projective via H de Γ sur \tilde{P}^1 . Il suffit pour conclure de montrer que $H(\Gamma)$ est un sous-groupe discret cocompact de $\tilde{SL}(2, \mathbb{R})$. En effet, si tel est le cas, il découle de 4.6 que Φ^t est topologiquement équivalent au flot algébrique $\Phi_{H(\Gamma)}^t$.

Soit (γ_n) une suite d'éléments de Γ dont les images $H(\gamma_n)$ convergent vers l'identité de $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$. Ceci implique que la suite (γ_n) converge simplement vers l'identité de Q^s . Nous avons vu lors de la preuve de 4.6 comment recomposer l'action de Γ sur Q^Φ à partir de son action sur Q^s . Cette construction montre que les γ_n convergent vers l'identité pour la topologie de la convergence simple sur Q^Φ .

Soit θ le relevé d'une orbite périodique du flot Φ^t . Cette orbite périodique est propre, ce qui signifie qu'il existe dans Q^Φ un voisinage de θ dont l'intersection avec l'orbite de θ par Γ se réduit à θ . Comme la suite des $\gamma_n\theta$ converge vers θ il s'en suit qu'elle doit être stationnaire à partir d'un certain rang. En d'autres termes, les γ_n doivent à partir d'un certain rang appartenir au groupe d'isotropie de θ . Or celui-ci est cyclique, et son générateur est envoyé par H sur un élément hyperbolique de $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$. Son image par H est donc un sous-groupe discret de $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$. Les γ_n valent donc tous l'identité à partir d'un certain rang.

Nous venons de montrer que $H(\Gamma)$ est un sous-groupe discret de $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$. Le quotient à gauche de $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ par $H(\Gamma)$ est donc un $K(\Gamma, 1)$, tout comme M . Ces deux variétés, qui ont même dimension, ont donc la même homologie. Comme M est compacte, il en est de même pour $H(\Gamma)\backslash\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$. Ceci conclut. ■

Nous allons achever notre étude des flots d'Anosov à feuilletage faible stable transversalement projectif dans le cas particulier des flots géodésiques des surfaces riemanniennes fermées à courbure strictement négative. Ceci nous permettra de discuter la régularité de la structure projective transverse. Il est bien connu que ces flots géodésiques sont des flots d'Anosov topologiquement équivalents à des flots d'Anosov algébriques (voir par exemple [12]). Leurs feuilletages faibles, que nous appellerons feuilletages géodésiques, admettent en particulier une structure projective transverse. Cependant, cette structure, qui dans le cas des flots algébriques est lisse et même analytique, n'est en général que seulement continue. C'est ce que montre le théorème suivant:

Théorème 5.6 *Soit (Σ, g) une surface riemannienne fermée à courbure strictement négative. Si un des feuilletages géodésiques associés à g admet une structure projective transverse absolument continue, alors la métrique g est à courbure constante.*

Preuve Appelons Φ^t le flot géodésique de (Σ, g) et supposons comme dans l'énoncé qu'un de ses feuilletages faibles admet une structure projective transverse absolument continue. Soit H la représentation d'holonomie de cette structure transverse. Remarquons que l'application du fibré unitaire tangent à Σ dans lui-même qui à un vecteur tangent associe son inverse est une équivalence topologique différentiable entre le flot géodésique et son inverse. Ceci montre que la structure projective transverse de l'autre feuilletage faible est elle aussi absolument continue, et qu'elle admet la même représentation d'holonomie H . En appliquant les méthodes de 4.6, on parvient alors à identifier *de manière absolument continue* le couple (Q^Φ, Γ) avec l'ouvert U_0 de $\widetilde{P}^1 \times \widetilde{P}^1$ compris entre les graphes de l'identité et de δ , muni de la restriction de l'action diagonale de $H(\Gamma)$. Or, $(U_0, H(\Gamma))$ n'est autre que l'espace des orbites du flot d'Anosov algébrique $\Phi_{H(\Gamma)}^t$ qui est le flot géodésique associé à une métrique riemannienne g_0 sur Σ à courbure constante -1 . Soit μ le "courant" sur Q^Φ provenant de la mesure de Liouville sur le fibré unitaire tangent à Σ associée à g (cf. [21]). D'après ce qui précède, il s'identifie à une mesure borélienne sur U_0 absolument continue à la mesure de Lebesgue, et donc absolument continue au courant μ_0 provenant de la mesure de Liouville associée à g_0 . Comme la mesure de Liouville associée à g_0 est ergodique, et que μ et μ_0 sont $H(\Gamma)$ invariantes, elles sont proportionnelles. D'après le résultat principal de [21] il s'en suit que g et g_0 sont isométriques à une constante multiplicative près. La courbure de g est donc constante. ■

Références

- [1] D.V. Anosov, *Geodesic flows on closed riemannian manifolds with negative curvature*, Proc. Steklov Inst. Math. AMS Translations (1969).

- [2] V.I. Arnold et A. Avez, *Ergodic problems of classical mechanics*, Benjamin, New York (1968), 17-51.
- [3] T. Barbot, *Géométrie transverse des flots d'Anosov*, Thèse (1992).
- [4] C. Bonatti et R. Langevin, *Un exemple de flot d'Anosov transitif transverse à un tore et non conjugué à une suspension*, Prépublication Université de Bourgogne, (1992).
- [5] R. Bowen, *On Axiom A diffeomorphisms*, A.M.S. Providence, **35** (1970).
- [6] M. Brunella, *On the topological equivalence between Anosov flows on three-manifolds*, Comment. Math. Helvetici, **67** (1992), 459-470.
- [7] M. Brunella, communication personnelle.
- [8] S.R. Fenley, *Anosov flows in 3-manifolds*, Ann. of Math., **139** (1994), 79-115.
- [9] J. Franks, *Anosov diffeomorphisms*, Global Analysis, Proc. Symp. Pure Math., AMS, XIV (1970), 61-93.
- [10] J. Franks et R. Williams, *Anomalous Anosov flows*, Global theory of dynamical systems, SLN 819, Springer-Verlag, New York (1980).
- [11] D. Fried, *Transitive Anosov flows and pseudo-anosov maps*, Topology, **22** (1983), 299-304.
- [12] E. Ghys, *Flots d'Anosov sur les 3-variétés fibrées en cercles*, Ergod. Th. & Dynam. Sys., **4** (1984), 67-80.
- [13] E. Ghys, *Déformations de flots d'Anosov et de groupes fuchsien*, Ann. Inst. Fourier, **42**, 1-2 (1992), 209-247.
- [14] E. Ghys, *Rigidité différentiable des groupes Fuchsien*, Prépublication ENS Lyon, (1992).
- [15] E. Ghys et V. Sergiescu, *Stabilité et conjugaison différentiable pour certains feuilletages*, Topology, **19** (1980), 179-197.
- [16] S. Goodman, *Dehn surgery on Anosov flows*, SLN 1007, Springer, New York (1983).
- [17] M. Gromov, *Three remarks on geodesic dynamics and fundamental group*, texte non publié, S.U.N.Y., vers 1977.
- [18] A. Haefliger, *Groupoïdes d'holonomie et classifiants*, Astérisque, **116** (1984), 70-97.
- [19] M. Handel et W. Thurston, *Anosov flows on new 3-manifolds*, Inv. Math., **59** (1980), 95-103.
- [20] M. Hirsch et C. Pugh, *Stable manifolds and hyperbolic sets*, Proc. Symp. Pure Math., Am. Math. Soc., XIV (1970).
- [21] J.P. Otal, *Le spectre marqué des longueurs des surfaces à courbure négative*, Ann. of Math., **131** (1990), 151-162.
- [22] C.F.B Palmeira, *Open manifolds foliated by planes*, Ann. of Math., **107** (1978), 109-131.
- [23] J.F. Plante, *Anosov flows, transversely affine foliations, and a conjecture of Verjovskiy*, J. London Math. Soc. (2), **23** (1981), 359-362.
- [24] J.F. Plante, *Anosov flows*, American Journal of Math., **94** (1972), 729-754.
- [25] C. Pugh et M. Shub, *The Ω -Stability Theorem for flows*, Invent. Math., **11** (1970), 150-158.
- [26] G. Reeb, *Les espaces localement numériques non séparés et leurs application à un problème classique*, Colloque de Topologie de Strasbourg, (1955), proceedings.
- [27] V.V. Solodov, *The universal cover of Anosov flows*, preprint (1991).
- [28] P. Tomter, *Anosov flows on infra-homogeneous spaces*, Global Analysis, Proc. Symp. Pure Math., AMS, XIV (1970), 299-327.
- [29] A. Verjovskiy, *Codimension one Anosov flows*, Bol. Soc. Mat. Mexicana, **19** (1974), 49-77.