# Mise en position optimale de tores par rapport à un flot d'Anosov

THIERRY BARBOT

*Abstract.* Let $\Phi^t$ be an Anosov flow on a (non atoroidal) 3-manifold $M$. We say that an incompressible torus $T$ embedded in $M$ admits an optimal position with respect to $\Phi^t$ if it is isotopic to a torus transverse to $\Phi^t$ outside a finite number of periodic orbits contained in $T$ (there's an additional condition we don't mention here). The first remark is that such an optimal position is quasi unique, i.e., we prove that if two tori in optimal position are homotopics in $M$, then they are homotopics along the flow. Then we give some sufficient condition for a torus admiting an optimal position. Eventually, we show that if a finite collection of disjoint tori is such that each torus admits an optimal position, then these optimal positions can be chosen disjoints one from each other.

## 1 Introduction

Soit $\Phi^t$ un flot d'Anosov sur une variété fermée $M$ orientée de dimension 3. Sauf indication contraire, nous supposerons toujours que $M$ est orientée et qu'elle n'admet pas de plongement incompressible de la bouteille de Klein. Nous supposerons également que les divers feuilletages forts et faibles associés au flot d'Anosov sont orientés (pour toutes ces notions, voir [1]).

Notre projet à long terme est d'étudier ces flots en utilisant un programme analogue à celui de [18], i.e., découper un flot d'Anosov en parties élémentaires le long de tores incompressibles en bonne position par rapport au flot. Nous ne nous intéressons dans cet article qu'au problème de la mise en bonne position des tores de découpage. Nous devons pour ce faire convenir de ce qu'est un tore en bonne position. La première idée qui vient à l'esprit est convenir qu'un tore est en bonne position dès qu'il est transverse au flot. Cette idée est d'autant plus naturelle que nous montrerons ici:

**Théorème A** *Deux tores plongés dans $M$ de manière incompressible et transverses à $\Phi^t$ sont homotopes si et seulement si ils sont homotopes le long des orbites de $\Phi^t$ .*

Précisons le sens de cet énoncé: deux tores $T$ et $T'$ sont dits homotopes le long des orbites de $\Phi^t$ s'il existe une application continue $u : T \to \mathrm{R}$ telle que l'application $x \mapsto \Phi^{u(x)}(x)$ envoie homéomorphiquement $T$ sur $T'$. Nous nous posons donc la question:

**Question:** *A quelle condition $T$ peut-il être isotopé en un tore transverse à $\Phi^t$ ?*

Une première réponse possible est donnée par le critère de Schwartzman (cf. [16]) selon lequel il suffit que le nombre d'intersection homologique de $T$ avec chaque orbite périodique de $\Phi^t$ soit strictement positif. Ce cas de figure à l'inconvénient majeur d'être très particulier: il ne se présente que lorsque $\Phi^t$ est (topologiquement équivalent à) la suspension d'un difféomorphisme linéaire hyperbolique du tore. Dans ce cas, il s'avère même que tout tore plongé est isotope à un tore transverse. Nous nous proposons d'établir ici un autre type de résultat de nature complètement différente:

**Théorème B** *On suppose l'existence de deux lacets fermés $c_1$ et $c_2$ dans $T$ tels que:*

- *$c_1$ et $c_2$ ne sont pas homologues dans $T$,*
- *chaque $c_i$ $(i = 1, 2)$ est librement homotope dans $M$ à une orbite périodique de $\Phi^t$ .*

*Alors, $T$ est isotope à un tore transverse à $\Phi^t$ .*

Nous montrerons en fait un peu mieux. Comme le nouveau tore $T'$ isotope à $T$ est transverse à $\Phi^t$ , il l'est également avec chacun des deux feuilletages faibles. Ceux-ci induisent donc sur $T'$ deux feuilletages transverses l'un par rapport à l'autre. Il découlera de la preuve du théorème B que ces deux feuilletages sont de type morse-smale, sans composante de Reeb, admettent chacun un nombre pair de feuilles fermées, que les feuilles fermées de l'un sont homologues à $c_1$ et que celles de l'autre sont homologues à $c_2$ (étant entendu que ces homologies sont au signe près). Une bonne illustration de ce cas de figure est donnée par l'exemple de Bonatti-Langevin (cf. [4]).

Il ne serait guère intéressant de se limiter au seul cas des tores transverses. En effet, nombre de flots d'Anosov sur des variétés non-atoroïdales n'admettent pas de tore transverse. Tel est le cas par exemple des revêtements finis des flots géodésiques des surfaces riemanniennes à courbure négative, et, de manière plus générale, de tous les flots d'Anosov produits sans section globale (voir [3]). Dans le cas des flots géodésiques et de leurs revêtements finis, il est facile de voir que tout tore incompressible est isotope à un tore tangent à un nombre fini d'orbites périodiques, et transverse au flot en dehors de ces orbites périodiques. Un tel tore s'obtient par recollements "d'anneaux de Birkhoff élémentaires" (pour plus de précision, le lecteur peut se reporter à la discussion préliminaire de [12]).

Figure 1: Anneau de Birkhoff élémentaire

Nous appelons *anneau de Birkhoff* tout anneau plongé dans $M$, d'intérieur transverse à $\Phi^t$ , et dont le bord consiste en deux orbites périodiques de $\Phi^t$ . Il s'agit du prototype le plus simple de section de Birkhoff locale au sens de [10] ou de [7]. Un tel anneau est toujours transverse aux deux feuilletages faibles du flot. Ceci le munit naturellement de deux feuilletages de dimension un, transverses l'un par rapport à l'autre à l'intérieur de l'anneau, et tangents au bord. Lorsque ces deux feuilletages sont sans composante de Reeb et ont pour seules feuilles fermées celles qui constituent le bord, l'anneau de Birkhoff est dit *élémentaire* (voir figure 1). Cette terminologie est justifiée par le fait que, à homotopie près le long des orbites de $\Phi^t$, tout anneau de Birkhoff s'obtient en perturbant légèrement une union finie d'anneaux de Birkhoff élémentaires (voir corollaire 5.6).

Nous appelons *tore quasi-transverse* tout tore plongé dans $M$ décomposable en une union finie d'anneaux de Birkhoff élémentaires et tel que le flot $\Phi^t$ soit alternativement rentrant et sortant sur ces anneaux (De manière plus précise, ceci signifie que si $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont deux anneaux de Birkhoff contenus dans $T$ et adjacents, et que $T$ est muni d'une orientation transverse, alors l'orientation de $\Phi^t$ ne peut coïncider simultanément sur $\mathcal{A}_1$ et sur $\mathcal{A}_2$ avec cette orientation transverse). Un tel tore est transverse à $\Phi^t$ en dehors d'un nombre fini (pair) d'orbites périodiques, et il est transverse aux deux feuilletages faibles. Comme les anneaux de Birkhoff qui le constituent sont élémentaires, les seules feuilles fermées des traces des feuilletages faibles sont les orbites périodiques, et ces traces n'admettent pas de composante de Reeb. Nous avons là encore:

**Théorème A'** *Deux tores plongés dans $M$ de manière incompressible et quasi-transverses à $\Phi^t$ sont homotopes si et seulement si ils sont homotopes le long des orbites de $\Phi^t$ .*

L'abondance de tores quasi-transverses est illustrée par le théorème suivant:

**Théorème C'** *Si $\Phi^t$ est produit et non topologiquement équivalent à une suspension, alors tout tore plongé de manière incompressible dans $M$ est isotope à un tore quasi-transverse. De plus, ce tore quasi-transverse est unique à homotopie le long des orbites de $\Phi^t$ près.*

Rappelons que l'hypothèse produit signifie que les relèvements dans le revêtement universel de $M$ des feuilletages faibles sont conjugués l'un comme l'autre au feuilletage produit de $\mathrm{R}^3$ par plans horizontaux $\mathrm{R}^2 \times \{*\}$ (cf. [3]). Elle ne constitue pas le point crucial du théorème C'. Celui-ci doit être compris comme un corollaire d'un résultat plus général dont le principe consiste à déceler la présence de tores quasi-transverses à partir d'indices à rechercher dans "l'espace transverse au flot".

Cet "espace transverse" est plus précisément l'espace des orbites tel qu'il est défini dans [3]. Rappelons en brièvement la définition: soit $\widetilde{\Phi}^t$ le relevé de $\Phi^t$ dans le revêtement universel $\widetilde{M}$ de $M$. Le quotient de $\widetilde{M}$ par la relation d'équivalence"être sur la même orbite de $\widetilde{\Phi}^t$ " est noté $Q^\Phi$ et appelé *espace des orbites.* L'application passage au quotient est notée $\pi^\Phi : \widetilde{M} \to Q^\Phi$. D'après [3], $Q^\Phi$ est homéomorphe à $\mathrm{R}^2$, et $\pi^\Phi$ est une fibration (localement) triviale. L'action par automorphismes de revêtement du groupe fondamental $\Gamma$ de $M$ sur $\widetilde{M}$ passe au quotient en une action sur $Q^\Phi$ pour laquelle $\pi^\Phi$ est équivariante. Les relevés dans $\widetilde{M}$ des feuilletages faibles se projettent par $\pi^\Phi$ en deux feuilletages par droites $\mathcal{G}^s$ et $\mathcal{G}^u$. Le théorème 3.4 de [3] énonce que la donnée à équivalence topologique près de $(M, \Phi^t)$ équivaut à celle de l'action de $\Gamma$ sur $Q^\Phi$ à équivariance topologique près.

Si $S$ est une surface plongée dans $M$, nous appelons *trace transverse* de $S$ toute $\pi^\Phi$-projection dans $Q^\Phi$ de n'importe quel relevé dans $\widetilde{M}$ de $S$. La trace transverse est unique à l'action de $\Gamma$ près. En guise d'exemple, la trace transverse d'un tore plongé transverse au flot est un ouvert de $Q^\Phi$ homéomorphe à $\mathrm{R}^2$ et invariant par un sous-groupe libre abélien de rang deux de $\Gamma$: celui provenant du groupe fondamental du tore[1]. Le fait essentiel sur lequel repose cet article est qu'il est possible de caractériser les traces transverses des anneaux de Birkhoff élémentaires: il s'agit des *losanges simples.*

La notion de losange a été introduite par S. Fenley ([8]). Elle se définit de la manière suivante: soient $\theta_1$ et $\theta_2$ deux éléments de $Q^\Phi$ fixés par le même élément $\gamma$ de $\Gamma$ (ils correspondent aux orbites périodiques bordant l'anneau). Soient $u_i$ une des deux composantes connexes de $\mathcal{G}^u(\theta_i) \setminus \theta_i$ et $s_i$ une des deux composantes connexes de $\mathcal{G}^s(\theta_i) \setminus \theta_i (i = 1, 2)$. On suppose que toute feuille de $\mathcal{G}^u$ rencontrant $s_1$ rencontre $s_2$, et que toute feuille de $\mathcal{G}^s$ rencontrant $u_1$ rencontre $u_2$. Alors, l'intersection entre le saturé par $\mathcal{G}^u$ de $s_1$ et le saturé par $\mathcal{G}^s$ de $u_1$ coïncide avec celle entre le saturé par $\mathcal{G}^u$ de $s_2$ et le saturé par $\mathcal{G}^s$ de $u_2$. Cette intersection, à laquelle on ajoute $\theta_1$ et $\theta_2$, est appelée *$\gamma$-losange de sommets $\theta_1$ et $\theta_2$.*

Figure 2: Losange

Les losanges trace transverse d'anneaux de Birkhoff élémentaires ne sont pas quelconques: le fait que l'anneau soit plongé se traduit par le fait que le losange est *simple* au sens où l'intersection du losange avec la $\Gamma$-orbite de ses sommets se réduit à ces sommets. Le résultat essentiel de ce travail est le suivant:

**Théorème D** *Tout losange simple de $Q^\Phi$ est la trace transverse d'un anneau de Birkhoff élémentaire.*

Dans cette introduction, il est supposé que $M$ ne contient pas de plongement de la bouteille de Klein. Si on supprime cette hypothèse, le théorème D devient (cf. proposition 6.2):

**Théorème D'** *Un losange simple de $Q^\Phi$ est soit la trace transverse d'un anneau de Birkhoff élémentaire,*

[1]D'après [6] tout tore transverse à $\Phi^t$ est incompressible.

*soit la trace transverse d'une bouteille de Klein plongée transverse à $\Phi^t$ en dehors d'une orbite périodique.*

Une fois les traces transverses des anneaux de Birkhoff caractérisées, il devient aisé de caractériser les traces transverses des tores quasi-transverses: il s'agit des *chapelets de losanges simples.*

Un chapelet de $\gamma$-losanges fini est une suite $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n$ de $\gamma$-losanges telle que:

- on peut numéroter $\theta_i$ et $\theta'_i$ les sommets de chaque losange $\mathcal{L}_i$ de telle sorte que pour chaque indice $i$ entre 1 et $n-1$ les sommets $\theta'_i$ et $\theta_{i+1}$ sont confondus,
- pour chaque indice $i$ entre 1 et $n-1$ les adhérences de $\mathcal{L}_i$ et de $\mathcal{L}_{i+1}$ ne se rencontrent qu'en $\theta_{i+1} = \theta'_i$.

Figure 3: Chapelet de losanges

Un chapelet de $\gamma$-losanges infini est une union croissante de chapelets finis de $\gamma$-losanges. Un chapelet de losanges est toujours suposé infini par défaut. Il est dit *simple* si tous les losanges qui le constituent sont simples, et que pour chacun de ses sommets $\theta_i$ l'intersection entre le chapelet et la $\Gamma$-orbite de $\theta_i$ se réduit à certains $\theta_j$. Avec ces définitions nous sommes en mesure de donner la version originale du théorème C':

**Théorème C** *Soit $\Phi^t$ un flot d'Anosov sur une 3-variété $M$ orientée et n'admettant pas de plongement incompressible de la bouteille de Klein. On suppose que les deux feuilletages faibles de $\Phi^t$ sont transversalements orientés. Soit $f : T \hookrightarrow M$ un plongement incompressible du tore dans $M$. Soit $H$ l'image du morphisme injectif $f_* : \pi_1(T) \to \pi_1(M) = \Gamma$: c'est un sous-groupe de $\Gamma$ bien défini à conjugaison près dans $\Gamma$. On suppose enfin que $H$ préserve un chapelet de losanges. Alors ce chapelet de losanges est la trace transverse d'un tore $T'$ plongé isotope à $f(T)$ et quasi-transverse à $\Phi^t$ . De plus, tout tore quasi-transverse homotope à $f(T)$ est homotope à $T'$ le long des orbites de $\Phi^t$ .*

Grâce aux théorèmes A, A', B et C notre projet d'étude des flots d'Anosov par découpage le long de tores en position optimale est en bonne voie. Il reste un problème important à traiter: celui de la mise en position optimale simultanée de plusieurs tores. Nous montrerons:

**Théorème E** *Soit $(T_1, \ldots, T_n)$ une collection finie de tores plongés dans $M$ de manière incompressible. On les suppose deux-à-deux disjoints et non-homotopes. On suppose de plus que chaque tore $T_i$ est isotope dans $M$ à un tore plongé $T'_i$ transverse ou quasi-transverse à $\Phi^t$ . Alors, les $T'_i$ peuvent être choisis deux-à-deux disjoints.*

Avant de clore cette introduction, signalons quelques résultats intermédiaires qui, bien que non directement liés au problème de la mise en position optimale des tores plongés, ont leur propre intérêt. Ils s'appliquent à tout flot d'Anosov de dimension trois pour peu que les feuilletages faibles soient transversalement orientés.

**Théorème F** *Toute orbite périodique représente un élément $\gamma$ de $\Gamma$ d'ordre infini et indivisible (i.e: les seuls éléments de $\Gamma$ admettant $\gamma$ pour puissance sont $\gamma$ et $\gamma^{-1}$).*

**Théorème G** *Si $\gamma$ est un élément de $\Gamma$ admettant un losange non-simple, alors aucun $\gamma$-losange n'est* *simple. De plus, l'union des $\gamma$-losanges est alors un chapelet de losanges (fini,infini ou biinfini) et le centralisateur de $\gamma$ dans $\Gamma$ est un groupe libre abélien de rang au plus deux.*

Signalons également qu'il apparait fort probable que les théorèmes B et C peuvent être étendus de la manière suivante:

**Conjecture** *Tout tore plongé incompressible dans $M$ est isotope à un tore plongé transverse à $\Phi^t$ en dehors d'un nombre fini d'orbites périodiques.*

Les méthodes employées dans cet article montre en effet qu'un tel plongement est toujours homotope à une *immersion* du tore vérifiant des conditions analogues. Malheureusement, un argument essentiel utilisé dans la preuve du théorème D pour modifier cette immersion en un plongement ne s'applique pas dans ce cadre général (voir remarque 7.8).

Cet article s'organise comme suit: au paragraphe suivant, nous introduisons quelques notations et discutons quelques résultats préliminaires. Aux paragraphes 3 et 4, nous étudions la notion de losanges et de chapelets de losanges. Nous y démontrons les théorèmes F et G. Aux paragraphes 5 et 6, nous montrons que les losanges simples sont exactement les traces transverses des anneaux de Birkhoff élémentaires. Au paragraphe 7, nous montrons l'analogue pour les chapelets de losanges simples et les tores quasi-transverses. Nous y montrons les théorèmes C et C'. Le paragraphe 8 est consacré à la preuve du théorème B. Les théorèmes A et A' sont traités au paragraphe 9. Enfin, nous consacrons le paragraphe 10 à la preuve du théorème E.

Ce texte a été rédigé à l'occasion d'un séjour à l'IMPA de Rio de Janeiro que je tiens à remercier pour son hospitalité. Le théorème E de [2], travail effectué au Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées de l'Ecole Normale Supérieure de Lyon, est un prototype du théorème B du présent article.

# 2 Préliminaires

## 2.1 Notations

$\Phi^t$ désigne un flot d'Anosov sur une variété $M$ fermée orientée de dimension 3. Il sera toujours supposé, sauf aux remarques 6.2 et 7.14, que $M$ ne contient aucun plongement incompressible de la bouteille de Klein. Les feuilletages faibles stables et instables de $\Phi^t$ sont notés $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ . Rappelons que nous les supposons transversalement orientés. Ceci recouvre bien sûr le cas général à un revêtement double ou quadruple près. Le feuilletage de dimension un engendré par $\Phi^t$ est noté $\Phi$. Le groupe fondamental de $M$ est noté $\Gamma$ (nous ne nous soucions pas du choix du point base). Le revêtement universel de $M$ est noté $\widetilde{M}$ .

Nous rappelons dans ce qui suit quelques propriétés plus ou moins connues. Pour toute justification, nous renvoyons le lecteur à [2] ou [3].

Les relevés dans $\widetilde{M}$ de $\Phi^t$ , $\Phi$, $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ sont notés respectivement $\widetilde{\Phi}^t$ , $\widetilde{\Phi}$ , $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ et $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ . D'après [3], l'espace quotient $\widetilde{M}/\widetilde{\Phi}$ de $\widetilde{M}$ par la relation "être sur la même feuille de $\widetilde{\Phi}$ " est Hausdorff et homéomorphe à $\mathbb{R}^2$. Il est noté $Q^\Phi$. Les orientations de $M$ et de $\Phi^t$ induisent une orientation de $Q^\Phi$. La projection $\pi^\Phi : \widetilde{M} \to Q^\Phi$ est une fibration (localement) triviale. Elle envoie $\widetilde{\mathcal{F}^s}$ et $\widetilde{\mathcal{F}^u}$ en deux feuilletages $\mathcal{G}^s$ et $\mathcal{G}^u$ de $Q^\Phi$ par droites fermées. Les orientations transverses de $\mathcal{F}^s$ et de $\mathcal{F}^u$ induisent des orientations de $\mathcal{G}^s$ et de $\mathcal{G}^u$ ainsi que des orientations transverses de ces feuilletages. Pour tout élément $x$ de $Q^\Phi$ la feuille de $\mathcal{G}^s$ le contenant est notée $s(x)$, et celle de $\mathcal{G}^u$ le contenant est notée $u(x)$. Le complémentaire de $x$ dans $s(x)$ est constitué de deux demi-droites. L'orientation de $\mathcal{G}^s$ induit un ordre sur $s(x)$: la composante connexe de $s(x) \setminus \{x\}$ contenant les éléments supérieurs à $x$ est notée $s^+(x)$. L'autre est notée $s^-(x)$. On définit de manière analogue $u^+(x)$ et $u^-(x)$.

Chaque feuille de $\mathcal{G}^s$ rencontre chaque feuille de $\mathcal{G}^u$ en au plus un point. Elle sépare $Q^\Phi$ en deux composantes connexes. Pour tout élément $x$ de $Q^\Phi$, la composante connexe de $Q^\Phi \setminus s(x)$ contenant $u^+(x)$ est notée $S_+(x)$. Celle contenant $u^-(x)$ est notée $S_-(x)$. On définit de manière analogue $U_+(x)$ et $U_-(x)$

(composantes connexes de $Q^\Phi \setminus u(x)$). D'après le théorème des voisinages produits, $\mathcal{G}^s$ et $\mathcal{G}^u$ vérifient une propriété de trivialisation locale simultanée, i.e.: pour tout élément $x_0$ de $Q^\Phi$, il existe deux intervalles ouverts $s_0$ et $u_0$ voisinages de $x_0$ dans respectivement $s(x_0)$ et $u(x_0)$ tels que l'application de $u_0 \times s_0$ qui à $(y, z)$ associe l'intersection entre $s(y)$ et $u(z)$ est bien définie et un homéomorphisme local. Nous appelons rectangle de Markov l'image d'une telle application.

L'action de $\Gamma$ sur $\widetilde{M}$ par automorphismes de revêtement passe au quotient sur $Q^\Phi$. Cette action préserve les feuilletages $\mathcal{G}^s$ et $\mathcal{G}^u$.

**Proposition 2.1** *Un élément de $Q^\Phi$ est une feuille de $\widetilde{\Phi}$ au-dessus d'une orbite périodique de $\Phi^t$ si et seulement si son stabilisateur dans $\Gamma$ est non trivial. Son stabilisateur est alors cyclique.* ∎

Nous appelons périodique un tel élément de $Q^\Phi$ à $\Gamma$-stabilisateur non trivial.

**Proposition 2.2** *Chaque feuille de $\mathcal{G}^s$ (respectivement de $\mathcal{G}^u$) contient au plus un élément périodique de $Q^\Phi$. Si elle en contient un, son stabilisateur dans $\Gamma$ est exactement le stabilisateur de cet élément périodique: il est donc cyclique. Sinon, son stabilisateur est trivial.* ∎

Une feuille de $\mathcal{G}^s$ contenant un élément périodique est dite cylindrique. Si un élément $\gamma$ de $\Gamma$ fixe un élément $x_0$ de $Q^\Phi$, la restriction à $s(x_0)$ de son action est soit une contraction, soit une dilatation dont $x_0$ est l'unique point fixe. Il en est de même pour la restriction de son action sur $u(x_0)$. De plus, si $\gamma$ contracte $s(x_0)$, il dilate $u(x_0)$. Ces restrictions sont donc linéarisables. On en déduit donc que l'action de $\gamma$ est linéarisable au voisinage de $x_0$: il suffit de considérer un rectangle de Markov contenant $x_0$ (cf. figure 4).

Figure 4: Linéarisation de $\gamma$ au vosinage d'un point fixe

En particulier, l'ensemble des points fixes de $\gamma$ est un fermé discret de $Q^\Phi$.

Nous associons à chaque élément $x$ de $Q^\Phi$ les quatres ouverts suivants (l'expression $Sat_{\mathcal{G}^s}(u^+(x))$ désigne le saturé par $\mathcal{G}^s$ de $u^+(x)$):

$$\begin{array}{rcccc}
\mathcal{L}^{++}(x) & = & Sat_{\mathcal{G}^s}(u^+(x)) & \cap & Sat_{\mathcal{G}^u}(s^+(x)) \\
\mathcal{L}^{+-}(x) & = & Sat_{\mathcal{G}^s}(u^+(x)) & \cap & Sat_{\mathcal{G}^u}(s^-(x)) \\
\mathcal{L}^{-+}(x) & = & Sat_{\mathcal{G}^s}(u^-(x)) & \cap & Sat_{\mathcal{G}^u}(s^+(x)) \\
\mathcal{L}^{--}(x) & = & Sat_{\mathcal{G}^s}(u^-(x)) & \cap & Sat_{\mathcal{G}^u}(s^-(x))
\end{array}$$

## 2.2 Quelques remarques à propos des espaces des feuilles

Les feuilletages $\mathcal{G}^s$ et $\mathcal{G}^u$ sont des feuilletages de $Q^\Phi \simeq \mathrm{R}^2$ par droites fermées. Il est bien connu (voir par exemple [13]) que les quotients de $Q^\Phi$ par les relations "être sur la même feuille de $\mathcal{G}^s$ (respectivement de $\mathcal{G}^u$) sont des 1-variétés fermées simplement connexes mais en général non-Hausdorff. Nous les notons respectivement $Q^s$ et $Q^u$. Nous notons $p^s : Q^\Phi \to Q^s$ et $p^s : Q^\Phi \to Q^u$ les applications de passage au quotient. Si deux éléments $s$ et $s'$ de $Q^s$ ne sont pas séparés par la topologie de $Q^s$ nous convenons d'écrire $s \approx s'$. Deux tels éléments sont appelés *points de branchements.*

L'action de $\Gamma$ sur $Q^\Phi$ passe bien sûr aux quotients. Comme $\mathcal{G}^s$ et $\mathcal{G}^u$ sont transversalement orientés, $Q^s$ et $Q^u$ sont orientés. Pour chaque élément $s = s(x)$ de $Q^s$ nous notons $s_+$ et $s_-$ les ouverts de $Q^s$ images par $p^s$ des ouverts $S_+(x)$ et $S_-(x)$ de $Q^\Phi$. Ce sont les composantes connexes de $Q^s \setminus \{s\}$. On note de manière analogue $u_+$ et $u_-$ les composantes connexes du complémentaire d'un élément $u$ de $Q^u$.

Pour tout couple d'éléments $(s, s')$ de $Q^s$ nous notons $]s, s'[$ l'ensemble des éléments de $Q^s$ qui déconnectent $s$ de $s'$. Si il existe une immersion de R dans $Q^s$ dont l'image contient $s$ et $s'$, alors $]s, s'[$ est contenu dans l'image de cette immersion. De manière plus précise, $]s, s'[$ est l'intervalle ouvert $]s, s'[$ délimité par $s$ et $s'$ dans l'image de cette immersion. Cependant, si tel n'est pas le cas, alors $]s, s'[$ n'est pas un ouvert de $Q^s$. Nous notons $[s, s']$ l'union de $]s, s'[$ et de $\{s, s'\}$. Nous laissons au lecteur le soin de montrer (voir aussi [2]):

**Lemme 2.3** *Pour toute paire d'éléments $(s, s')$ de $Q^s$ l'ensemble $[s, s']$ est une union finie d'intervalles $[s_i, s'_i]$ $(i = 0, \dots, n)$ où:*

$$s_0 = s \ , \ s'_n = s'$$

$$s'_i \approx s_{i+1}$$

∎

Soit $\Omega$ un ouvert connexe de $Q$. Tout élément $x$ de sa frontière sépare $Q$ en deux composantes connexes dont l'une contient $\Omega$. Le complémentaire dans $Q$ de cette composante est notée $x^c$. Nous laissons une nouvelle fois au lecteur le soin de montrer:

**Proposition 2.4** *Lorsque $x$ parcourt $\partial\Omega$, les ensembles $x^c$ sont deux-à-deux disjoints. Ce sont exactement les composantes connexes de $Q \setminus \Omega$.* ∎

Soit $\gamma$ un élément de $\Gamma$ admettant un point fixe dans $Q^s$. Nous notons $\Lambda^s_\gamma$ l'union des images par $p^s$ des feuilles de $\mathcal{G}^u$ globalement préservées par $\gamma$.

**Lemme 2.5** *$\Lambda^s_\gamma$ est un ouvert connexe de $Q^s$ préservé par tous les éléments de $\Gamma$ commutant avec $\gamma$. Tout point de branchement dans $\Lambda^s_\gamma$ est un point fixe de $\gamma$.*

**Preuve** Il est évident que $\Lambda^s_\gamma$ est ouvert et préservé par tous les éléments de $\Gamma$ commutant avec $\gamma$. Soient $s$ et $s'$ deux points fixes de $\gamma$. Alors $[s, s'] = [s_0 = s, s'_0] \cup \ldots \cup [s_n, s'_n = s']$ est $\gamma$-invariant. Il s'en suit que chaque $s_i$ et chaque $s'_i$ est un point fixe de $\gamma$. La restriction de $\gamma$ à chaque intervalle $[s_i, s'_i]$ est facile à étudier: il y admet un nombre fini de points fixes alternativement attractifs et répulsifs. On en déduit aisément que $\Lambda^s_\gamma$ contient les intervalles $[s_i, s'_i]$, et donc également $[s, s']$. La connexité de $\Lambda^s_\gamma$ en découle.

Soient enfin deux éléments $s_1$ et $s_2$ de $\Lambda^s_\gamma$ non séparés par la topologie. Soient $\theta_1$ et $\theta_2$ deux points fixes de $\gamma$ dans $Q^\Phi$ tels que $p^s(u(\theta_i))$ contient $s_i$ $(i = 1, 2)$ ($p^s(\theta_i)$ peut être égal à $s_i$).

Notons que $\theta_1$ et $\theta_2$ sont différents puisque deux éléments différents de $p^s(u(\theta_1))$ sont toujours séparés. Donc:

$$[p^s(\theta_1), p^s(\theta_2)] = [p^s(\theta_1), s_1] \cup [s_2, p^s(\theta_2)]$$

Comme $[p^s(\theta_1), p^s(\theta_2)]$ est $\gamma$-invariant, $s_1$ et $s_2$ sont points fixes de $\gamma$. ∎

On en déduit le corollaire:

**Lemme 2.6** *Soit $\gamma$ un élément de $\Gamma$ admettant au moins un point fixe dans $Q^s$. Soit $s$ un élément de $Q^s$ vérifiant:*

$$\gamma(s_+) \subset s_+$$

*Alors, il existe un point fixe $\theta$ de $\gamma$ dans $Q^\Phi$ dont la feuille instable $u(\theta)$ rencontre $s$.*

**Preuve** Il s'agit de montrer que tout élément $s$ vérifiant les hypothèses de 2.6 appartient à $\Lambda^s_\gamma$. Nous raisonnons par l'absurde: il existe un élément $s_0$ de $\partial\Lambda^s_\gamma$ tel que $s_0^c$ contient un élément $s$ vérifiant les hypothèses de 2.6 (cf. 2.4). Alors $s_0^c$ contient soit $s_+$, soit $s_-$. Remarquons que $\gamma(s_+) \subset s_+$ implique $\gamma^{-1}(s_-) \subset s_-$. Donc, quitte à inverser $\gamma$, on peut éventuellement inverser l'orientation de $Q^s$ et supposer que $s_0^c$ contient en fait $s_+$. Alors, $(\gamma s_0)^c = \gamma(s_0^c)$ contient $\gamma(s_+)$. Il rencontre donc $s_+ \subset s_0^c$. Il s'en suit que $\gamma(s_0)$ et $s_0$ sont confondus. Ceci est absurde car $\partial\Lambda^s_\gamma$ ne contient pas de point fixe de $\gamma$. ∎

**Proposition 2.7** *Soit $\gamma_0$ un élément de $\Gamma$, et $C \simeq \mathbb{Z}$ le sous-groupe de $\Gamma$ qu'il engendre. Soit $x$ un élément de $Q^\Phi$ dont la $C$-orbite n'est pas fermée. Alors, la frontière de $C.x$ est un singleton, l'élément $\bar{x}$ de ce singleton est un point fixe de $\gamma_0$, et $x$ appartient à une des feuilles $s(\bar{x})$ ou $u(\bar{x})$.*

**Preuve** Soit $\bar{x}$ un élément de la frontière de $C.x$. Soit $(p_n)$ une suite d'entiers différents tels que $\gamma_0^{p_n}x$ converge vers $\bar{x}$. Quitte à extraire une sous-suite et inverser $\gamma_0$ on peut supposer cette suite strictement croissante. Quitte à extraire une nouvelle fois une sous suite et à modifier les orientations transverses, on peut supposer que tous les $\gamma_0^{p_n}x$ appartiennent à $\mathcal{L}^{++}(\bar{x})$. Alors, toutes les feuilles $\gamma_0^{p_n}s(x)$ rencontrent $u(\bar{x})$. D'après 2.6, si $\gamma_0$ admet un point fixe, alors $s(x)$ appartient à chaque $\Lambda^s_{\gamma_0^{p_n}}$, i.e., à $\Lambda^s_{\gamma_0}$. D'où:

$$s(\bar{x}) = \lim_{n\to+\infty} \gamma_0^n s(x)$$

Si $\gamma_0$ n'admet pas de point fixe, il en est de même pour toutes ses puissances. Soit $I$ l'intervalle fermé $[\gamma_0^{p_1}s(x), \gamma_0^{p_2}s(x)]$ de $Q^s$. Soit $k$ l'entier $p_2 - p_1$. Alors, l'union des intervalles $\gamma_0^{kn}I$ lorsque $n$ décrit $\mathbb{Z}$ est un intervalle ouvert $I_0$ de $Q^s$ préservé par $\gamma_0^k$. Soit $J$ un autre intervalle ouvert $\gamma_0^k$ invariant: d'après le lemme 2.4, s'ils sont disjoints, il existe un élément $y$ de $\partial J$ tel que $y^c$ contient $I_0$. Ce point $y$ devrait être fixé par $\gamma_0^k$, ce qui est absurde. Donc, $J' = J \cap I_0$ est non-vide. Comme $Q^s$ est simplement connexe, $J'$ est connexe. Comme les restrictions à $J$ et $I_0$ de $\gamma_0^k$ sont des translations sans points fixes nous avons $J = J' = I_0$. Donc, $I_0$ est l'unique intervalle de $Q^s$ $\gamma_0^k$-invariant. On en déduit qu'il est également préservé par $\gamma_0$. D'où:

$$s(\bar{x}) = \lim_{n\to+\infty} \gamma_0^n s(x)$$

En appliquant le même raisonnement dans $Q^u$, on obtient:

$$u(\bar{x}) = \lim_{n\to+\infty} \gamma_0^n u(x)$$

En considérant un rectangle de Markov au voisinage de $\bar{x}$ on voit que:

$$\bar{x} = \lim_{n\to+\infty} \gamma_0^n x$$

Comme $Q^\Phi$ est Hausdorff, ceci montre que $\bar{x}$ est point fixe de $\gamma_0$. La dynamique locale de $\gamma_0$ étant hyperbolique, il est clair que $x$ appartient à $u(\bar{x})$ ou $s(\bar{x})$. Enfin, comme une feuille de $\mathcal{G}^s$ fixée par $\gamma_0$ ne contient qu'une seule orbite périodique, la frontière de $C.x$ est exactement le singleton $\{\bar{x}\}$. ∎

# 3 Etude des losanges et quelques applications

Le but essentiel de ce paragraphe est de montrer que l'ensemble des points fixes d'un élément $\gamma$ de $\Gamma$ s'organise comme l'ensemble des sommets de $\gamma$-losanges. Son contenu est très largement inspiré de [8].

**Définition 3.1** *Soit $\gamma$ un élément de $\Gamma$.Un ouvert $\mathcal{L}$ de $Q^\Phi$ est appelé:*

- *$\gamma$-losange ouvert direct s'il existe deux points fixes $x$ et $y$ de $\gamma$ tels que:*

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{++}(x) = \mathcal{L}^{--}(y)$$

- *$\gamma$-losange ouvert indirect s'il existe deux points fixes $x$ et $y$ de $\gamma$ tels que:*

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{+-}(x) = \mathcal{L}^{-+}(y)$$

*Dans les deux cas, les points fixes $x$ et $y$ - qui sont uniques - sont appelés sommets du losange ouvert.*

Un $\gamma$-losange ouvert est globalement préservé par $\gamma$.

**Définition 3.2** *Un losange (direct ou indirect) est l'union d'un losange ouvert et de ses sommets.*

Le lecteur peut se reporter à la figure 2 de l'introduction.

**Lemme 3.3** *L'intérieur d'un losange de sommets $x$ et $y$ est le losange ouvert de sommets $x$ et $y$. S'il est direct, sa frontière est l'union de $\{x, y\}$, $s^+(x)$, $u^+(x)$, $s^-(y)$ et $u^-(y)$. S'il est indirect, sa frontière est l'union de $\{x, y\}$, $s^-(x)$, $u^+(x)$, $s^+(y)$ et $u^-(y)$.* ∎

L'adhérence du losange de sommets $x$ et $y$ est appelé *losange fermé de sommets $x$ et $y$.*

**Lemme 3.4** *Si un élément $\gamma$ de $\Gamma$ fixe un sommet d'un losange, il préserve globalement ce losange. En particulier, il fixe l'autre sommet. Son action à l'intérieur du losange est topologiquement conjuguée à celle de $(x, y) \to (\frac{1}{2}x, 2y)$ sur $\{x > 0, y > 0\} \subset R^2$.*

**Preuve** Chacun des ouverts $\mathcal{L}^{++}(x)$, $\mathcal{L}^{+-}(x)$, etc. est "intrinsèquement" défini: si $\gamma$ fixe $x$, il fixe les quatres ouverts $\mathcal{L}^{++}(x)$, $\mathcal{L}^{+-}(x)$, etc.. (rappelons que $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ sont transversalements orientés: $\gamma$ préserve donc les ordres sur $s(x)$ et $u(x)$). La linéarisation de la restriction de $\gamma$ au losange s'obtient en linéarisant ses restrictions aux demi-feuilles $s^+(x)$, etc... ∎

D'après la proposition 3.3 de [8], nous avons:

**Proposition 3.5** *Soient $\theta_1$ et $\theta_2$ deux éléments de $Q^\Phi$ distincts et fixés par le même élément $\gamma$ de $\Gamma$. Il existe une suite finie de $\gamma$-losanges $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n$ de sommets $x_i, x'_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ tels que:*

$$\theta_1 = x_1 \qquad \theta_2 = x_n$$

$$x'_i = x_{i+1} \quad (i = 1, \ldots, n-1)$$

∎

Soit $G_\gamma$ le graphe dont les sommets sont les points fixes de $\gamma$ et tel qu'il existe une arête entre deux sommets $x$ et $y$ si et seulement si il existe un $\gamma$-losange de sommets $x$ et $y$. On peut si on le désire étiqueter les arêtes de ce graphes par les épithètes *direct* et *indirect*.

**Proposition 3.6** *$G_\gamma$ est un arbre connexe. Chacun de ses sommets est de valence au plus quatre.*

**Preuve** La connexité découle de la proposition 3.5. La majoration de la valence par quatre est évidente. La simple connexité provient du fait que chaque feuille de $\mathcal{G}^s$ et de $\mathcal{G}^u$ déconnecte $Q^\Phi$. ∎

**Proposition 3.7** *Pour tout élément $\gamma$ de $\Gamma$ non trivial et pour tout entier $n$ non nul, les arbres $G_\gamma$ et $G_{\gamma^n}$ sont confondus. En d'autres termes, tout point fixe de $\gamma^n$ est point fixe de $\gamma$.*

**Preuve** Comme tout point fixe de $\gamma$ est point fixe de $\gamma^n$, $G_{\gamma^n}$ contient $G_\gamma$. Inversement, comme $\gamma$ commute avec $\gamma^n$, il préserve l'ensemble des points fixes de $\gamma^n$, ce qui montre qu'il agit sur l'arbre $G_{\gamma^n}$. Comme $\gamma$ préserve les types $++$, $+-$, $-+$ et $--$ des $\gamma^n$-losanges, s'il fixe un sommet de $G_{\gamma^n}$, il fixe toutes les arêtes adjacentes et donc tout les sommets de $G_{\gamma^n}$. Comme il est de torsion, on en déduit qu'il agit trivialement sur $G_{\gamma^n}$. ∎

**Proposition 3.8** *Même dans le cas où $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ ne sont plus supposés transversalement orientés, si un élément de $\Gamma$ est sans point fixe dans $Q^\Phi$, aucune de ses puissances non triviales n'admet de points fixes dans $Q^\Phi$.*

**Preuve** Nous raisonnons par l'absurde: soit $\gamma$ un élément de $\Gamma$ sans point fixe, mais dont une puissance $\gamma^n$ admet un point fixe. Quitte à remplacer l'entier $n$ par son double, on peut supposer que $\gamma^n$ préserve les orientations transverses de $\mathcal{G}^s$ et de $\mathcal{G}^u$. Alors, $\gamma$ agit librement sur l'arbre $G_{\gamma^n}$. Comme son action sur cet arbre est de torsion, il doit en fixer une arête tout en échangeant les extrémités de cette arête. En d'autres termes, et quitte à modifier les orientations, il existe dans $Q^\Phi$ deux points fixes $\theta_1$ et $\theta_2$ de $\gamma^n$ échangés par $\gamma$ et tels que:

$$\mathcal{L}^{++}(\theta_1) = \mathcal{L}^{--}(\theta_2)$$

Alors, $\gamma$ envoie $u^+(\theta_1)$ sur $u^-(\theta_2)$. Soit $I$ l'intervalle $p^s(u^+(\theta_1)) = p^s(u^-(\theta_2))$. Il est globalement préservé par $\gamma$, et $\gamma$ en renverse l'orientation. On en déduit que $\gamma$ admet un point fixe dans $I$: contradiction. ∎

**Remarque 3.9** Le stabilisateur dans $\Gamma$ d'un sommet de $G_\gamma$ est cyclique. Quitte à remplacer $\gamma$ par une de ses racines, on peut supposer qu'il engendre l'ensemble des éléments de $\Gamma$ qui agissent trivialement sur $G_\gamma$. Soit $Z$ le centralisateur de $\gamma$ dans $\Gamma$. Il est clair que $L = Z_{/<\gamma>}$ agit librement sur $G_\gamma$, ce qui montre qu'il est un groupe libre. On en déduit que $Z$ est somme directe de $< \gamma >$ et d'un groupe libre.

Pour chaque orbite périodique $\theta$ de $\Phi^t$ , soit $\tilde{\theta}$ un de ses relevés dans $\widetilde{M}$ . Soit $[\theta]$ l'unique élément de $\Gamma$ engendrant le semi-groupe des éléments de $\Gamma$ préservant l'orbite orientée $\tilde{\theta}$: il est bien défini à partir de $\theta$ à conjugaison près dans $\Gamma$. Tout lacet représentant $[\theta]$ est librement homotope au lacet orienté $\theta$. Il découle de la proposition 3.7 qu'il est indivisible dans $\Gamma$: telle est la preuve (et le sens) du théorème F énoncé lors de l'introduction. Ce théorème est une légère amélioration du théorème F de [8].

# 4 Chapelets de losanges et caractérisation des losanges non-simples

**Définition 4.1** *Deux losanges sont dits adjacents s'ils sont distincts et qu'ils admettent un sommet en commun. Ce sommet commun est alors unique. Ils sont dits en position directe s'ils sont simultanément directs ou indirects. Sinon, ils sont dits en position indirecte.*

**Définition 4.2** *Une chaîne de losanges est une suite $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n$ de losanges différents vérifiant les hypothèses de la proposition 3.5, i.e., telle que deux losanges successifs $\mathcal{L}_i$ et $\mathcal{L}_{i+1}$ soient adjacents.*

**Définition 4.3** *Un chapelet (fini) de losanges est une chaîne de losanges telle que toute paire de losanges adjacents de cette suite est en position directe.*

Il est clair que cette définition équivaut à celle donnée lors de l'introduction. Les chapelets de $\gamma$-losanges correspondent aux chemins dans l'arbre $G_\gamma$ n'empruntant soit que des arêtes directes, soit que des arêtes indirectes.

On peut évidemment étendre ces notions en celles de chaînes ou de chapelets infinis et même biinfinis en permettant aux indices de parcourir N ou $\mathbb{Z}$. Lorsque cela n'est pas précisé, il doit toujours être compris que pour nous un chapelet de losanges est biinfini.

Nous définissons enfin la notion de *support d'une chaîne de losanges*: soit $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n$ une chaîne de losanges de sommets $x_0, \ldots, x_n$. Pour chaque indice $i$ compris entre 1 et $n-1$ on pose $S_i = \{x_i\}$ si $\mathcal{L}_{i-1}$ et $\mathcal{L}_i$ sont en position directe. Sinon, les adhérences de $\mathcal{L}_{i-1}$ et de $\mathcal{L}_i$ n'ont en commun qu'une semi-feuille $S_i$ de $\mathcal{G}^s$ ou de $\mathcal{G}^u$: le "côté" du losange $\mathcal{L}_i$ qui les sépare.

**Définition 4.4** *Le support de la chaîne est défini comme étant l'union de $\{x_0, x_n\}$, des $S_i$ et des intérieurs des losanges.*

Le support d'un chapelet de losanges est bien sûr l'union des losanges. La définition du support s'étend bien sûr aux chaînes infinies et biinfinies.

Rappelons (voir introduction) la notion de *losange simple:*

**Définition 4.5** *Un losange est dit simple si la $\Gamma$-orbite de son intérieur est disjointe de la $\Gamma$-orbite de ses sommets.*

Nous nous proposons de montrer dans la suite de ce paragraphe le théorème G. Montrer la première partie de ce théorème revient à montrer:

**Proposition 4.6** *Soit $\gamma$ un élément de $\Gamma$ admettant un $\gamma$-losange non-simple. Alors aucun $\gamma$-losange n'est simple, tous les $\gamma$-losanges sont simultanément directs ou indirects, et l'arbre $G_\gamma$ est un sous-arbre de l'arbre linéaire.*

Par *arbre linéaire* nous entendons l'arbre infini dont tous les sommets sont de valence deux. Comme le groupe des automorphismes sans point fixe d'un sous-arbre de l'arbre linéaire est trivial ou cyclique, la dernière partie du théorème G est un corollaire de la proposition et de la remarque 3.9.

**Preuve de 4.6** Soit $\mathcal{L}$ un $\gamma$-losange non-simple. Nous notons $x_0$ et $x_1$ ses sommets: que $\mathcal{L}$ soit non-simple signifie que l'un de ses sommets, disons $x_0$, admet un itéré $\gamma_1.x_0$ à l'intérieur de $\mathcal{L}$. Pour des orientations convenables de $\mathcal{F}^s$ et de $\mathcal{F}^u$ nous avons:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{++}(x_0) = \mathcal{L}^{--}(x_1)$$

**Lemme 4.7** *Aucun des ouverts $\mathcal{L}^{+-}(x_0)$, $\mathcal{L}^{-+}(x_0)$, $\mathcal{L}^{+-}(x_1)$ et $\mathcal{L}^{-+}(x_1)$ n'est un losange.*

**Preuve** Nous allons montrer par l'absurde que $\mathcal{L}^{+-}(x_1)$ n'est pas un losange: les trois autres cas se montrent de la même manière. Nous supposons donc que $\mathcal{L}^{+-}(x_1)$ est un losange. Nous appelons $x'_0$ son second sommet. Par définition même des losanges, $\gamma_1(u^+(x_0)) = u^+(\gamma_1 x_0)$ rencontre $s^+(x'_0)$. Comme $\gamma_1(\mathcal{L}) = \mathcal{L}^{++}(\gamma_\infty \S_\prime)$ est un losange, de sommets $\gamma_1 x_0$ et $\gamma_1 x_1$, on en déduit que $\gamma_1 x_1$ appartient à $S_+(s(x'_0))$. Or, un argument similaire montre que $\gamma_1 x_1$ appartient également à $U_+(u(x_1))$. C'est absurde, car $S_+(s(x'_0))$ et $U_+(u(x_1))$ sont disjoints. ∎

Soit $\mathcal{L}'$ un autre $\gamma$-losange adjacent à $\mathcal{L}$. Le lemme précédent montre que $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ sont en position directe. On peut supposer que $\mathcal{L}'$ est $\mathcal{L}^{++}(x_1)$: l'autre cas est analogue. Si on affine l'argument du lemme 4.7, on voit aisément que $\gamma_1 x_1$ appartient à l'intérieur de $\mathcal{L}'$.

Le losange $\mathcal{L}'$ n'est donc pas simple lui non plus. On conclut grâce à la connexité de $G_\gamma$. ∎

# 5 Traces transverses des anneaux de Birkhoff

**Proposition 5.1** *La trace transverse d'un anneau de Birkhoff est le support d'une chaîne finie de losanges. L'anneau de Birkhoff est élémentaire si et seulement si sa trace transverse est un losange. Ce losange est alors simple.*

**Preuve** Soit $\mathcal{A}$ un anneau de Birkhoff plongé dans $M$: rappelons que cela signifie que son bord est constitué de deux orbites périodiques $\theta_0$ et $\theta_1$ de $\Phi^t$ , et qu'il est transverse en son intérieur à $\Phi^t$ . Son intérieur est donc également transverse aux deux feuilletages faibles $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ . Nous notons respectivement $f^s$ et $f^u$ les traces de ces feuilletages sur $\mathcal{A}$. Ces deux feuilletages admettent $\theta_0$ et $\theta_1$ comme feuilles fermées, et sont transverses en dehors de ces deux feuilles compactes. Par définition même, $\mathcal{A}$ est élémentaire si et seulement si $\theta_0$ et $\theta_1$ sont les seules feuilles fermées de $f^s$ et de $f^u$.

Nous appelons *composante de* $\mathcal{A}$ tout sous-anneau de $\mathcal{A}$ dont chaque composante de bord est une feuille fermée de $f^s$ ou de $f^u$ et dont l'intérieur ne contient pas de feuille compacte ni de $f^s$ ni de $f^u$.