

Flots d'Anosov sur les variétés graphées au sens de Waldhausen

Thierry Barbot

Université de Bourgogne

Laboratoire de Topologie, UMR 5584

B.P. 138, 21004 Dijon, France

Abstract. This paper is devoted to the study of a wide class of Anosov flows on graph manifolds. We establish a general result about embeddings of Seifert manifolds in 3-dimensional manifolds admitting a product Anosov flow, generalizing a previous result of E. Ghys. We show that up to isotopy the restriction of the one-dimensional foliation defined by the flow to the image of this embedding is topologically conjugate to a piece of a geodesic flow outside a finite number of periodic orbits. We show more: the conjugacy can be chosen such that it respects the restrictions of the weak foliations. We next give a topological characterization of the examples of Handel-Thurston. Essentially, they are the unique Anosov flows on graph manifolds such that no periodic orbit is freely homotopic to the fiber of some embedded Seifert manifold in the graph manifold. Eventually, we exhibit the first known examples of graph manifolds which are not Seifert spaces nor torus bundles over the circle, whose fundamental groups are of exponential growth and admitting no Anosov flow.

1 Introduction

Soient \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u deux feuilletages de classe C^1 , de codimension un, transverses l'un par rapport à l'autre sur une variété fermée M de dimension 3. Dans tout ce travail, il n'est pas toujours nécessaire de supposer que M soit orientable, mais dans tous les énoncés à suivre (sauf le premier), il découlera à chaque fois des hypothèses que la variété considérée est orientable. Le triplet $(M, \mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u)$ est appelé *bifeuilletage d'Anosov* si le feuilletage intersection $\Phi = \mathcal{F}^s \cap \mathcal{F}^u$ est paramétrisable en un flot d'Anosov dont \mathcal{F}^s est le feuilletage faible stable et \mathcal{F}^u le feuilletage faible instable (cf. [1]). Les exemples classiques de tels bifeuilletages sont donnés par les suspensions de difféomorphismes linéaires hyperboliques du tore et les flots géodésiques des surfaces riemanniennes à courbure négative constante. Nous appelons le deuxième type d'exemples *bifeuilletages géodésiques*. Les variétés ambiantes de ces bifeuilletages sont dans le premier cas des fibrés en tores sur le cercle, et dans le second cas des fibrés en cercles sur des surfaces fermées. Il est remarquable que pour ce type de topologie la variété ambiante caractérise le flot d'Anosov à équivalence topologique près. Plus précisément:

Théorème *Tout flot d'Anosov sur une 3-variété dont le groupe fondamental est résoluble est topologiquement équivalent à une suspension.*

Théorème *Tout flot d'Anosov sur une 3-variété dont le groupe fondamental est à centre non trivial est, à revêtements finis près, topologiquement équivalent au flot géodésique d'une surface riemannienne à courbure constante négative.*

Le premier théorème résulte de [30] (voir aussi [27]). Le deuxième est une légère extension du théorème principal de [18]. Nous en donnerons une preuve complète au paragraphe 4.2.

On peut espérer au vu de ces deux résultats que de manière plus générale tout bifeuilletage d'Anosov en dimension 3 est fortement déterminé à conjugaison topologique près par la nature topologique de la

¹ *Mots-clés:* flot d'Anosov - décomposition torique - flot géodésique - groupe de convergence - structure transverse

² *Classification AMS:* 58F15 - 57N10 - 57S05

variété ambiante. Il est vrai qu'un résultat aussi général semble relever de l'utopie lorsqu'on passe en revue la liste éclectique des exemples de flots d'Anosov connus en dimension 3 ([15, 23, 19, 16, 8]). Nous nous proposons cependant dans cet article d'avancer dans cette direction.

Rappelons le principe de décomposition torique en dimension 3 (cf [33]):

Toute 3-variété compacte, orientable, irréductible et Haken se découpe le long de tores incompressibles en des sous-variétés qui sont soit atoroïdales, soit des fibrés de Seifert. De plus, une telle décomposition, si elle est minimale, est unique à isotopie près.

Ce théorème de décomposition se combine agréablement avec l'étude faite dans [4]. Par exemple, dans le cas où le flot d'Anosov Φ^t est produit¹ et n'est pas topologiquement équivalent à la suspension d'un difféomorphisme hyperbolique du tore, les tores le long desquels on découpe la variété peuvent être choisis quasi-transverses à Φ^t , i.e. transverses à Φ^t en dehors d'un nombre fini d'orbites périodiques. De plus, le choix de tores de découpage de ce type est unique à isotopie près le long des orbites de Φ^t (cf. théorèmes C et E de [4]). Signalons que dans [4] ces résultats ne sont établis que dans le cas où \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u sont transversalement orientés, mais peuvent être étendus aux cas que nous considérerons ici.

Il apparaît donc naturel d'introduire la notion de *morceau de bifeuilletage d'Anosov*: ce sont les bifeuilletages de variétés à bord obtenus en découpant un bifeuilletage d'Anosov $(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u)$ le long de tores transverses ou quasi-transverses à $\Phi = \mathcal{F}^s \cap \mathcal{F}^u$. De manière plus précise, un morceau de bifeuilletage d'Anosov est la donnée d'un bifeuilletage (G^s, G^u) sur une variété compacte à bord S , d'un bifeuilletage d'Anosov $(M, \mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u)$ et d'une immersion i de S dans M envoyant chaque feuille de G^s dans une feuille de \mathcal{F}^s , chaque feuille de G^u dans une feuille de \mathcal{F}^u , dont la restriction à l'intérieur de S est un plongement, et dont la restriction à chaque composante du bord ∂S est un plongement. De manière abusive, nous ne ferons pas mention le plus souvent de l'immersion i , et nous dirons que (G^s, G^u) s'obtient par restriction à S de $(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u)$. Là encore, nous supposons toujours que G^s et G^u sont transversalement orientés. Si le flot Φ^t est produit le bifeuilletage est dit *produit*. Toujours d'après [4], un morceau d'un bifeuilletage d'Anosov est bien défini à isotopie près le long des orbites de Φ^t , même si celui-ci n'est pas produit. Lorsque le bifeuilletage initial $(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u)$ est un bifeuilletage géodésique, nous convenons d'appeler *morceau de bifeuilletage géodésique* le morceau obtenu. Notons que comme tout flot géodésique est produit les tores bordant un morceau de bifeuilletage géodésique sont toujours quasi-transverses à Φ^t . Nous appelons *partie tangente du morceau de bifeuilletage* l'union des orbites périodiques tangentes au bord du morceau. Le premier résultat principal de cet article est le suivant:

Théorème A *Soit $(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u)$ un bifeuilletage d'Anosov produit sur une 3-variété Haken M sans bord. Soit S un morceau de la décomposition torique de M . On suppose que M ne fibre pas en tores sur le cercle, que S est un fibré de Seifert principal, et qu'aucun tore composante de bord de S ne borde un voisinage tubulaire d'une bouteille de Klein plongée dans M . Alors, après isotopie éventuelle de S dans M , la restriction de $(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u)$ est un morceau de bifeuilletage d'Anosov qui, privé de sa partie tangente est topologiquement conjugué à un revêtement fini d'un morceau de bifeuilletage géodésique privé de sa partie tangente.*

Rappelons qu'un fibré de Seifert principal est une 3-variété admettant une action localement libre de $SO(2)$. Notons aussi que d'après le théorème C de [3] une 3-variété admettant un flot d'Anosov produit qui n'est pas une suspension est nécessairement orientable.

Un exemple de Franks et Williams ([15]) montre que l'hypothèse produit est nécessaire. On peut aussi confronter le théorème A avec l'exemple de Bonatti-Langevin ([8]) bien que dans cet exemple le morceau fibré de Seifert n'est pas principal. Mettons aussi en avant le fait qu'il n'est pas clair que la conjugaison topologique dont il est question au théorème A puisse en général s'étendre aux parties tangentes.

L'exemple le plus simple illustrant le théorème A est bien sûr celui des bifeuilletages géodésiques. Il existe aussi d'autres exemples, moins triviaux: il s'agit des exemples de Handel-Thurston (cf [23]). Leur construction a été généralisée par S. Goodman et D. Fried ([19],[16]). Ces exemples peuvent être décrits comme certains recollements de flots géodésiques. Leurs variétés ambiantes sont ce que F. Waldhausen

¹Un flot d'Anosov est dit produit si ses feuilletages faibles se relèvent dans le revêtement universel en des feuilletages conjugués chacun au feuilletage produit de \mathbb{R}^3 par plans horizontaux $\mathbb{R}^2 \times \{*\}$.

appelle des *variétés graphées principales “suffisamment compliquées”*, i.e, des 3-variétés Haken dont les morceaux sont tous des fibrés de Seifert principaux. Nous appelons *exemple de Handel-Thurston généralisé* tout flot d’Anosov obtenu en recollant des morceaux de flots géodésiques. Il n’est pas clair si ces flots sont tous des flots de Handel-Thurston au sens de [23]. Nous discutons ces notions avec plus de précisions aux paragraphes 2.1 et 2.2.

Dans la seconde partie de cette étude, nous utilisons le théorème A pour caractériser les exemples de Handel-Thurston parmi les flots d’Anosov sur les variétés graphées principales.

Théorème B *Soit (M, Φ^t) un flot d’Anosov sur une variété graphée principale “suffisamment compliquée”. Les trois assertions suivantes sont équivalentes:*

1. *aucun morceau de la décomposition torique minimale de M n’admet une fibre régulière librement homotope dans M à une orbite périodique de Φ^t ,*
2. *le flot Φ^t est produit,*
3. *le flot Φ^t est un exemple de Handel-Thurston généralisé.*

La preuve que nous donnerons du théorème B nous permettra même de donner une description du bifeuilletage $(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u)$ associé à un exemple de Handel-Thurston, où \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u sont les feuilletages faibles stables et instables respectivement. Nous montrerons que ce bifeuilletage s’obtient par recollements de morceaux de bifeuilletages géodésiques (pour la définition, voir section 2.2). Ceci est non-trivial: la construction donnée dans [23] ne permet pas de décrire ces feuilletages.

Dans la dernière partie de ce travail, nous exploitons les arguments mis en oeuvre auparavant pour montrer:

Théorème C *Il existe une infinité de VGPC qui ne sont pas des fibrés en tores sur le cercle ni des fibrés de Seifert, dont les groupes fondamentaux sont à croissance exponentielle, mais qui n’admettent pas de flot d’Anosov. De plus, il existe une infinité de VGPC vérifiant les mêmes hypothèses et telles que les seuls flots d’Anosov qu’elles admettent sont des exemples de Handel-Thurston.*

Signalons encore que M. Brunella a construit de nombreux exemples de morceaux de bifeuilletages géodésiques se découpant dans un bifeuilletage d’Anosov qui n’est pas un exemple de Handel-Thurston, ni même produit ([10]).

Le théorème B est essentiellement le théorème D de [2], travail qui a été mené au laboratoire de mathématiques pures et appliquées de l’école normale supérieure de Lyon. La rédaction, ainsi que certaines améliorations, ont été effectuées à l’IMPA (Rio de Janeiro) et au laboratoire de topologie de Dijon. Je tiens à remercier chaleureusement ces deux instituts pour la qualité de leur accueil et des conditions de travail qu’ils m’ont offert. Je tiens aussi à remercier le rapporteur qui aura permis d’améliorer sensiblement cet article.

2 Préliminaires

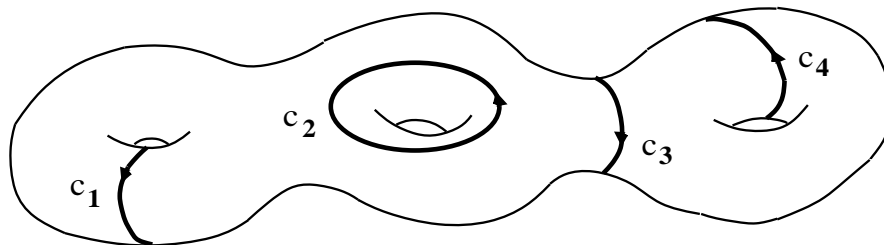
Dans cet article, M désigne une 3-variété fermée supportant un flot d’Anosov Φ^t . Rappelons que sous ces hypothèses, M est irréductible (cf [29]). Nous notons \mathcal{F}^{ss} , \mathcal{F}^{uu} , \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u les feuilletages stables forts, instables forts, stables faibles et instables faibles, respectivement (pour toutes ces notions, voir [1]). Le feuilletage orienté de dimension un engendré par Φ^t est noté Φ . Le groupe fondamental de M est noté Γ (nous négligerons souvent le choix du point base). Ces notations sont du reste celles déjà convenues dans [3] et [4].

2.1 Les exemples de Handel-Thurston

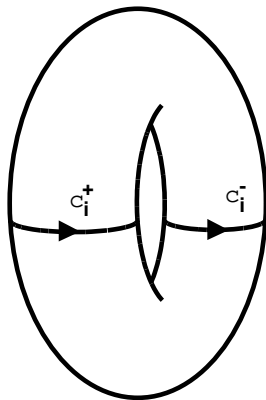
Soit Σ_0 une orbifold fermée hyperbolique orientable, i.e., un quotient du disque de Poincaré par un sous-groupe discret cocompact de $PSL(2, \mathbb{R})$ éventuellement avec torsion (pour plus de précisions, voir [36]). Soit M_0 le fibré unitaire tangent à Σ_0 : il s'agit d'un fibré de Seifert. Nous appelons π_0 la fibration en cercles de M_0 sur Σ_0 .

Soit $p: M \rightarrow M_0$ un revêtement d'indice fini ne faisant que "déplier les fibres de π_0 ", c'est-à-dire tel que les fibres de la composition $\pi = \pi_0 \circ p$ soient connexes. L'application π est une fibration en cercles sur Σ_0 . Notons Φ_0^t le flot géodésique sur M_0 . Il se relève dans M en un flot d'Anosov Φ_{geod}^t .

Nous choisissons sur Σ_0 une collection finie (c_1, \dots, c_n) de géodésiques fermées orientées simples deux-à-deux disjointes.



Les préimages par π_0 des c_i sont des tores (T_1^0, \dots, T_n^0) plongés dans M_0 deux-à-deux disjointes. Chaque géodésique orientée c_i définit deux orbites périodiques de Φ_0 entièrement contenues dans le tore T_i^0 correspondant: l'une est celle des vecteurs tangents à c_i dont les directions sont celles définies par l'orientation de c_i , l'autre est celle des vecteurs tangents à c_i mais de directions inverses. Il est facile de voir que en dehors de ces deux orbites, le tore T_i^0 est transverse au flot.



Soient T_1, \dots, T_n les préimages par p des T_i^0 : il s'agit de tores incompressibles plongés dans M . Ils contiennent un nombre fini d'orbites périodiques, et en dehors ces orbites périodiques ils sont transverses à Φ_{geod}^t . De plus, ils sont transverses aux deux feuilletages faibles, et les seules feuilles fermées des traces des feuilletages faibles sur ces tores sont les orbites périodiques de Φ_{geod}^t qu'ils contiennent. Ceci entraîne que de part et d'autre de chacune de ces orbites périodiques, le flot est transverse au tore en deux directions opposées. Ce qui précède peut être résumé par le qualificatif suivant: ces tores sont *quasi-transverses* à Φ_{geod}^t . Pour plus de précision, voir [4].

Pour chaque indice i on choisit deux orbites tangentes à T_i : l'une, qu'on notera c_i^+ , est choisie de direction compatible avec l'orientation de c_i , l'autre, c_i^- , est choisie de direction opposée.

Découpons M le long de ces tores T_i . Nous obtenons ainsi une collection de morceaux S_k . Ce sont des fibrés de Seifert sur des orbifolds hyperboliques à bord. De plus, ils sont chacun munis d'un feuilletage orienté: la trace du feuilletage défini par Φ_{geod}^t . Ces feuilletages sont transverses aux bords en dehors d'un nombre fini de feuilles fermées tangentes. Ces morceaux sont des "morceaux de flots géodésiques".

Les composantes de bord de ces morceaux viennent par paires (T'_i, T''_i) . Le feuilletage initial (M, Φ_{geod}) est obtenu par recollements de ces morceaux par des difféomorphismes $f_i : T'_i \rightarrow T''_i$. Nous tenons à insister sur le fait que les deux tores T'_i et T''_i peuvent appartenir au même morceau.

Les exemples de Handel-Thurston s'obtiennent en changeant ces recollements: on les modifie en composant à gauche par des difféomorphismes g_i de T'_i . Bien sûr, les g_i ne peuvent être quelconques. Ils doivent en particulier préserver les feuilles fermées contenues dans T'_i , ce qui signifie qu'ils doivent être isotopes aux twists de Dehn le long de ces feuilles fermées. La réciproque est vraie: il s'agit du théorème de [23] (mais qui n'est pas énoncé sous cette forme). *Tout twist de Dehn le long d'une orbite périodique contenue dans T'_i est isotope à un difféomorphisme g_i tel que dans la variété obtenue par les recollements $f_i \circ g_i : T'_i \rightarrow T''_i$ les feuilletages des morceaux se composent en un feuilletage dont les feuilles sont les orbites d'un flot d'Anosov.* A vrai dire, cette affirmation telle quelle n'est pas démontrée dans [23]: dans cet article il est imposé une condition de positivité. Mais celle-ci peut être déjouée si on utilise la présentation de S. Goodman (cf. [19]). D. Fried a par la suite mis au point une version infinitésimale de cette construction (voir [16]). Elle s'énonce de la manière suivante: pour tout flot d'Anosov Φ^t de dimension 3, pour toute orbite périodique θ de ce flot, et pour tout entier p , la variété obtenue par chirurgie de Dehn d'ordre $\frac{1}{p}$ sur θ supporte un flot d'Anosov ψ^t . De plus, la restriction du flot ψ^t ainsi construit au complémentaire du lieu de la chirurgie est topologiquement équivalent à la restriction de Φ^t au complémentaire de θ . Nous appelons cette opération *chirurgie de Dehn sur Φ^t le long de θ d'ordre p* . Voyons le lien entre les chirurgies de Dehn et les exemples de Handel-Thurston. Soit ψ^t un flot de Handel-Thurston obtenu à partir d'un revêtement fini Φ^t_{geod} d'un flot géodésique. Soient p_1, \dots, p_n les entiers caractérisant les classes d'isotopie des twists de Dehn g_i . Chaque orbite périodique c_i^+ de Φ^t_{geod} correspond à une orbite périodique γ_i^+ de ψ^t . Soit enfin Φ^t le flot d'Anosov obtenu à partir de ψ^t par chirurgie de Dehn d'ordre $-p_i$ le long de chaque γ_i^+ . Il est clair que la variété ambiante de Φ^t est homéomorphe à M . D'après [18], ou plus précisément d'après le théorème 4.9 à suivre, il s'en suit que Φ^t est topologiquement équivalent à un flot géodésique. En d'autres termes, tout exemple de Handel-Thurston s'obtient par chirurgies de Dehn à partir d'un flot algébrique. Ceci suggère d'étendre la définition des exemples de Handel-Thurston de la manière suivante:

Définition 2.1 *Un flot d'Anosov ψ^t est appelé exemple de Handel-Thurston s'il s'obtient par chirurgies de Dehn à partir d'un flot Φ^t tel que:*

- Φ^t est topologiquement équivalent à un revêtement fini Φ^t_{geod} du flot géodésique d'une orbifold hyperbolique orientable Σ_0 ,
- les orbites périodiques de Φ^t le long desquelles les chirurgies sont opérées correspondent à des orbites de Φ^t_{geod} qui se projettent dans Σ_0 en des géodésiques fermées simples deux à deux disjointes.

Notre discussion précédente montre que les exemples de Handel-Thurston au sens de [23] sont tous des exemples de Handel-Thurston au sens de 2.1.

2.2 Morceaux de bifeuilletages géodésiques et exemples de Handel-Thurston généralisés

Reconsidérons les morceaux définis au paragraphe précédent. Nous les notons S_k . On peut les munir d'une donnée supplémentaire: les restrictions G^s et G^u à S_k des feuilletages faibles du flot géodésique. Ce sont deux feuilletages de codimension un, transverses l'un par rapport et l'autre, et transverses au bord de S_k . Le triplet (S_k, G^s, G^u) est appelé *morceau de bifeuilletage géodésique*. Ce morceau est découpé dans la variété M qui a été choisie comme étant un revêtement d'indice fini du fibré unitaire tangent de l'orbifold sous-jacente Σ_0 . L'indice de ce revêtement est appelé *indice du morceau* (S_k, G^s, G^u) .

Nous allons montrer à suivre que la donnée d'un morceau de bifeuilletage géodésique équivaut à la donnée de certains sous-groupes discrets du revêtement universel $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ de $PSL(2, \mathbb{R})$.

Soit $p_0 : \widetilde{SL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ l'application de revêtement. C'est un morphisme de groupes de Lie dont le noyau est un sous-groupe discret cyclique. Ce noyau est également le centre de $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$. Soit δ un de ses deux générateurs.

Soit Γ_0 un sous-groupe discret de $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$, et $\bar{\Gamma}_0 = p_0(\Gamma_0)$ sa projection dans $PSL(2, \mathbb{R})$. Nous choisissons Γ_0 de sorte que:

- il est de type fini,
- il rencontre le centre de $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ en un élément non trivial,
- aucun élément de $\bar{\Gamma}_0$ n'est parabolique.

Le quotient $M_{\Gamma_0} = \Gamma_0 \backslash \widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ est un revêtement fini de $M_0 = \bar{\Gamma}_0 \backslash PSL(2, \mathbb{R})$. L'indice de ce revêtement est le plus petit entier positif non nul n pour lequel δ^n appartient à Γ_0 . Ceci montre que $\bar{\Gamma}_0$ est discret dans $PSL(2, \mathbb{R})$.

Soit $SO(2)$ le sous-groupe de $PSL(2, \mathbb{R})$ correspondant aux matrices de rotation de la forme:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \theta \in \mathbb{R}/_{2\pi} \mathbb{Z}$$

Le quotient à droite de $PSL(2, \mathbb{R})$ par $SO(2)$ s'identifie au demi-plan supérieur de Poincaré H . En effet, $SO(2)$ est le stabilisateur de i pour l'action naturelle de $PSL(2, \mathbb{R})$ sur H . Ainsi, le biquotient $\bar{\Gamma}_0 \backslash PSL(2, \mathbb{R}) / SO(2)$ s'identifie à l'orbifold hyperbolique $O_0 = \bar{\Gamma}_0 \backslash H$. De plus, la projection $\pi_0 : M_0 \rightarrow O_0$ est un fibré $SO(2)$ -principal. L'espace total M_0 s'identifie ainsi au fibré unitaire tangent de O_0 . Le revêtement $M_{\Gamma_0} \rightarrow M_0$ ne fait que déplier les fibres de π_0 . Nous pouvons donc parler du flot géodésique Φ_{Γ_0} de M_{Γ_0} . Ce flot est le relevé du flot géodésique de O_0 . C'est aussi le passage au quotient du "flot géodésique de $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ " qui est donné par l'action d'un sous-groupe à un paramètre. Nous notons $\tilde{\Phi}_{geod}$ le flot géodésique de $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$: c'est en quelque sorte le flot géodésique universel puisqu'il revêt tous les flots géodésiques.

Comme $\bar{\Gamma}_0$ n'admet pas d'éléments paraboliques et qu'il est de type fini, il possède un *domaine de Nielsen* \mathcal{D}_0 (cf. [7], paragraphe 8.5). C'est un fermé de H préservé par l'action de $\bar{\Gamma}_0$, et le quotient $\Sigma_0 = \bar{\Gamma}_0 \backslash \mathcal{D}_0$ de cette action s'identifie à une partie compacte de O_0 bordée par des géodésiques. Soit $S_0 = \pi_0^{-1}(\Sigma_0)$ la partie de M_0 au-dessus de Σ_0 . Le bifeuilletage géodésique de M_0 est transverse au bord de S_0 . Sa restriction à S_0 définit un morceau de bifeuilletage géodésique. Soit S_{Γ_0} la partie de M_{Γ_0} au-dessus de $S_0 \subset M_0$. Le bifeuilletage de S_0 se relève en un bifeuilletage géodésique de S_{Γ_0} . Nous notons $(S_{\Gamma_0}, G_{\Gamma_0}^s, G_{\Gamma_0}^u)$ le morceau de bifeuilletage géodésique ainsi défini. Tous les morceaux de bifeuilletages géodésiques s'obtiennent de cette manière.

Un *exemple de Handel-Thurston généralisé* est un flot d'Anosov vérifiant la propriété suivante: il existe un nombre fini de tores quasi-transverses plongés dans M tels que les morceaux de bifeuilletages obtenus en découpant le long de ces tores quasi-transverses sont topologiquement conjugués hors de leur partie tangente à un morceau de bifeuilletage géodésique privé de sa partie tangente. Cette définition englobe celle des exemples de Handel-Thurston donnée à la section précédente mais est a priori plus large. Comme il apparaîtra par la suite (voir paragraphe 4.3), les exemples de Handel-Thurston sont exactement les exemples de Handel-Thurston généralisés dont les morceaux de bifeuilletages géodésiques qui le constituent ont tous le même indice et dont les deux feuilletages faibles sont transversalement orientés. Il semble affirmé dans [23] qu'il existe des exemples de Handel-Thurston généralisés qui ne sont pas des exemples de Handel-Thurston au sens de 2.1. Il n'y est malheureusement pas proposé de preuve, et il ne nous paraît pas que ce soit une trivialité. Par exemple, il découle du lemme 5.2 de [6] que deux tores bordant deux morceaux de bifeuilletages géodésiques ne peuvent être envoyés l'un sur l'autre par un homéomorphisme respectant les traces des bifeuilletages que si les deux morceaux ont le même indice. Par ailleurs, même s'il est aisé de trouver un tel recollement lisse entre les deux tores ne respectant que le feuilletage intersection, il demeure délicat de s'assurer que le feuilletage de dimension un obtenu sur le

recollé puisse être paramétré par un flot d’Anosov. Pour appréhender la difficulté, il convient de noter que le feuilletage obtenu par recollement ne saurait admettre un ouvert saturé formé d’orbites périodiques.

2.3 Décomposition des variétés Haken

Rappelons le théorème fondamental de décomposition torique des 3-variétés énoncé lors de l’introduction:

Toute 3-variété irréductible, orientable et Haken se découpe le long de tores incompressibles en des sous-variétés qui sont soit atoroïdales, soit des fibrés de Seifert. De plus, une telle décomposition, si elle est minimale, est unique à isotopie près.

Rappelons qu’une variété orientable *Haken* est une variété irréductible dans laquelle il existe un plongement incompressible d’une surface fermée, et qu’une variété est *atoroïdale* si tout tore immergé de manière incompressible est homotope à une composante du bord. Il est à noter que les seuls fibrés de Seifert atoroïdaux sont ceux qui sont homéomorphes à $D^2 \times S^1$, $T^2 \times I$ ou au fibré en cercles non trivial sur le ruban de Möbius (Ce dernier est aussi homéomorphe au fibré en segments non trivial sur la bouteille de Klein).

Un cas particulier est celui des variétés graphées, notion qui a été introduite par F. Waldhausen ([37, 38]). Il s’agit des 3-variétés fermées orientables décomposables en fibrés de Seifert le long d’un nombre fini de tores plongés incompressibles deux-à-deux disjoints. Pour ne pas alourdir inutilement notre propos nous nous restreindrons aux *variétés graphées principales*, i.e. celles décomposables en fibrés de Seifert *principaux* (cf. introduction) qui ne sont pas homéomorphe au fibré en segments non trivial sur la bouteille de Klein (il convient ici de remarquer que le fibré en cercles non trivial sur le ruban de Möbius admet aussi une fibration principale sur le disque avec deux singularités d’ordre 2. Pour plus de précision, voir [38]). Avec ces conventions, dans une variété graphée principale, aucun tore ne borde un voisinage tubulaire régulier d’une bouteille de Klein. Nous distinguons parmi les variétés graphées celles qui sont “*suffisamment compliquées*” (cf [38]). Les seules variétés graphées principales non “suffisamment compliquées” sont les fibrés en tores sur le cercle et les fibrés de Seifert sur la sphère avec au plus trois fibres exceptionnelles. La classification des flots d’Anosov sur ces variétés est déjà connue. Nous limitons donc notre étude aux variétés graphées principales “suffisamment compliquées”. Nous utiliserons l’abréviation VGPC. Il découle de [38] que toute variété graphée principale suffisamment compliquée est Haken.

Dans tout ce qui suit, M désigne une variété Haken orientable, non homéomorphe à un fibré en tores sur le cercle. Soit $T = T_1 \cup \dots \cup T_n$ une collection de tores plongés incompressibles et deux-à-deux disjoints le long desquels M se découpe de manière minimale. Cette famille est bien définie à isotopie près. Nous appelons S_1, \dots, S_k les morceaux de la décomposition: eux aussi sont bien définis à isotopie près. Comme M n’est pas un fibré en tores sur le cercle, les T_i sont deux-à-deux non librement homotopes. Deux morceaux S_i et $S_{i'}$ sont dits *adjacents via un tore T_j* si pour tout voisinage tubulaire régulier U de T_j dans M , une des composantes connexes de $U \setminus T_j$ est contenue dans S_i et que l’autre est contenue dans $S_{i'}$. Il est à remarquer qu’un morceau peut fort bien être adjacent à lui-même.

Soit \mathcal{G}_M le graphe dont les sommets sont les S_i , dont les arêtes sont les tores T_j , et tel qu’une arête T_j relie deux sommets S_i et $S_{i'}$ si ceux-ci sont adjacents via T_j . Ce graphe est indépendant du choix de T .

On peut associer à M mieux qu’un graphe: *un graphe de groupes* (voir [35]). Soit \mathcal{G}_M^0 le graphe orienté obtenu en dupliquant les arêtes de \mathcal{G}_M : si S_i et $S_{i'}$ sont deux morceaux adjacents via le tore T_j , l’arête T_j de \mathcal{G}_M donne lieu à deux arêtes $\alpha = (S_i, S_{i'})$ et $\bar{\alpha} = (S_{i'}, S_i)$ de \mathcal{G}_M^0 . On choisit ensuite pour chaque indice i un point base x_i dans le morceau S_i , et pour chaque indice j , un point base y_j dans le tore T_j . Enfin, si S_i et $S_{i'}$ sont deux morceaux adjacents via T_j , on choisit deux chemins c_{ji} et $c_{ji'}$ joignant dans cet ordre y_j aux points bases x_i et $x_{i'}$. Ces chemins permettent de définir les injections suivantes:

$$\pi_1(S_i, x_i) \xleftarrow{f_j^i} \pi_1(T_j, y_j) \xrightarrow{f_j^{i'}} \pi_1(S_{i'}, x_{i'})$$

Si α est l’arête $(S_i, S_{i'})$ de \mathcal{G}_M^0 , nous notons f_α l’application f_j^i .

Nous obtenons ainsi:

- un étiquetage des sommets de \mathcal{G}_M^0 : l'étiquette de S_i est $\pi_1(S_i, x_i)$,
- un étiquetage des arêtes de \mathcal{G}_M^0 : l'étiquette de $\alpha = (S_i, S_{i'})$ est $\pi_1(T_j, y_j)$,
- pour chaque arête $\alpha = (S_i, S_{i'})$, un morphisme injectif f_α de son étiquette dans celle de son extrémité source S_i .

Une telle donnée est un graphe de groupe.

Définition 2.2 *Pour tout morceau S_i un élément γ de $\pi_1(S_i, x_i)$ est appelé fibre de S_i s'il existe une fibration de Seifert d'espace total S_i pour laquelle la fibre passant par x_i est régulière et représente γ . Un élément γ du groupe fondamental de M est appelé fibre de M s'il est conjugué dans $\pi_1(M)$ à une fibre de S_i où S_i est un morceau fibré de Seifert de M .*

Il convient de remarquer que lorsque S_i est un fibré de Seifert principal, son groupe fondamental n'admet que deux fibres, l'une inverse de l'autre. Ceci signifie que le centre du groupe fondamental est dans ce cas cyclique.

Proposition 2.3 *Aucun des groupes fondamentaux $\pi_1(S_i, x_i)$ n'est isomorphe à \mathbb{Z} ou à $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, et s'il est isomorphe à l'extension double non-triviale de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, alors S_i est un voisinage tubulaire régulier d'une bouteille de Klein. Si S_i et $S_{i'}$ sont deux morceaux adjacents via T_j , l'image réciproque par f_j^i d'une fibre de S_i et l'image réciproque par $f_j^{i'}$ d'une fibre de $S_{i'}$ sont deux éléments de $\pi_1(T_j, y_j)$ qui n'ont aucune puissance commune.*

Preuve Si le groupe fondamental $\pi_1(S_i, x_i)$ est isomorphe à \mathbb{Z} , $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ou à l'extension double non-triviale de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, le morceau S_i est à bord non-vide et est donc Haken. D'après le corollaire 12.8 de [25], S_i devrait être un fibré de Seifert. On en déduit aisément qu'il devrait être homéomorphe à $D^2 \times S^1$, à $T^2 \times I$ ou au voisinage tubulaire d'une bouteille de Klein plongée dans M de manière incompressible. Le premier cas contredit l'incompressibilité de T , et dans le second cas, il découle de la minimalité de T que le morceau S_i doit être l'unique morceau apparaissant dans la décomposition de M . En d'autres termes, M doit être un fibré en tores sur le cercle, ce qui est supposé ne pas être. Ceci montre la première affirmation. La deuxième est elle aussi un corollaire de la minimalité de T (les préimages par f_j^i et $f_j^{i'}$ de fibres de S_i et de $S_{i'}$ se représentent par des courbes fermées simples de T_j . Donc, si elles admettent des puissances communes, elles sont en fait égales). ■

Notons S l'ensemble des sommets de \mathcal{G}_M^0 , et A celui de ses arêtes. A chaque élément α de A nous associons un symbole t_α . Nous notons $L(t_\alpha)$ le groupe libre de générateur t_α . Soit enfin $G(\mathcal{G}_M^0)$ le groupe obtenu en quotientant le produit libre

$$(*_{i \in S} \pi_1(S_i, x_i)) * (*_{\alpha \in A} L(t_\alpha))$$

par les relations:

$$\begin{aligned} t_{\bar{\alpha}} &= t_\alpha^{-1} \\ f_{\bar{\alpha}}(g) &= t_\alpha f_\alpha(g) t_\alpha^{-1} \end{aligned}$$

Ce groupe se projette surjectivement sur l'ensemble des mots réduits en les lettres t_α , qui n'est autre que le groupoïde des classes d'homotopies à extrémités fixées des chemins dans le graphe \mathcal{G}_M . Alors, pour tout choix d'un "sommet-base" s_0 de \mathcal{G}_M , la préimage par cette projection de l'ensemble des classes d'homotopie des chemins fermés d'extrémités s_0 est un sous groupe de $G(\mathcal{G}_M^0)$. Ce groupe est exactement le groupe fondamental du graphe de groupes au point-base s_0 . A isomorphisme près, il ne dépend pas du choix de s_0 .

D'après le théorème de Van Kampen:

Théorème 2.4 *Le groupe fondamental de \mathcal{G}_M^0 est isomorphe au groupe fondamental de M .* ■

2.4 Caractérisation des groupes fuchsien d'après Gabai, Casson, Jungreis

Nous notons $\text{Homéo}^+(S^1)$ le groupe des homéomorphismes du cercle préservant l'orientation. Rappelons qu'un groupe fuchsien est un sous-groupe discret de $PSL(2, \mathbb{R}) \subset \text{Homéo}^+(S^1)$. Il apparaîtra que la preuve du théorème A consiste essentiellement à montrer qu'un certain groupe d'homéomorphismes du cercle est conjugué dans $\text{Homéo}^+(S^1)$ à un groupe fuchsien. Pour répondre à ce type de question, nous disposons du critère suivant:

Théorème 2.5 *Un sous-groupe de $\text{Homéo}^+(S^1)$ est conjugué à un groupe fuchsien si et seulement si il est de convergence.*

Un *groupe de convergence* est un sous-groupe de $\text{Homéo}^+(S^1)$ vérifiant les propriétés suivantes:

De toute suite d'éléments distincts du groupe il est possible d'extraire une sous-suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour laquelle il existe deux éléments x et y de S^1 tels que:

- *La suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge sur $S^1 \setminus \{y\}$ vers x uniformément sur les compacts*
- *La suite $(g_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge sur $S^1 \setminus \{x\}$ vers y uniformément sur les compacts*

La preuve de ce théorème est le fruit du travail de nombreux auteurs: A. Casson, D. Gabai, F.W. Gehring, D. Jungreis, G. Martin, J. Nielsen, R. Tukia, H. Zieschang (cf. [17, 11]). Il ne s'agit pas pour nous de présenter ici cette preuve qui est longue et difficile. Notre objectif est d'établir grâce à 2.5 un autre critère. Nous devons pour ce faire introduire la notion de lacune: tout sous-groupe G de $\text{Homéo}^+(S^1)$ admet au moins un fermé invariant minimal. Une composante connexe du complémentaire dans S^1 d'un fermé G -invariant minimal est appelé *lacune de G* . Une lacune de G est dite *errante* si elle est disjointe de tous ses itérés par les éléments non-triviaux de G .

Théorème 2.6 *Soit G un groupe d'homéomorphismes du cercle de type fini. Il est conjugué dans $\text{Homéo}^+(S^1)$ à un sous-groupe de $PSL(2, \mathbb{R})$ si les propriétés suivantes sont vérifiées:*

1. *G n'admet pas de lacune errante,*
2. *tout élément de G admet au plus deux points fixes, et s'il en admet deux, il est de type hyperbolique,*
3. *le sous-groupe d'isotropie de tout point du cercle est soit trivial, soit cyclique,*
4. *si (x_0, y_0) est le couple des points fixes d'un élément hyperbolique de G , son orbite par G est un fermé discret de $S^1 \times S^1$ privé de la diagonale.*

De plus, si l'action de G n'est pas libre, le sous-groupe de $PSL(2, \mathbb{R})$ auquel il est conjugué est discret.

Preuve Nous ne traitons pas ici le cas (facile) où G admet une orbite finie. Ce cas étant exclu, l'action de G sur le cercle admet un unique fermé invariant minimal (cf par exemple [24], IV.3.1). Nous notons μ ce minimal. Le cas où G agit librement sur le cercle est bien connu: son action est alors topologiquement conjuguée à une action par rotations d'angles irrationnelles (remarquer que d'après la condition 1 l'action est dans ce cas minimale).

Nous supposons donc désormais que l'action de G n'est pas libre. Nous traitons d'abord le cas où elle est minimale, i.e., $\mu = S^1$. Nous notons \mathcal{P} l'ensemble des points du cercle à groupe d'isotropie non trivial. Comme l'action de G n'est pas libre, \mathcal{P} n'est pas vide. Comme l'action est minimale, \mathcal{P} est dense dans S^1 . Notons \mathcal{P}^2 l'ensemble des couples de points fixes d'éléments hyperboliques de G .

Lemme 2.7 *\mathcal{P}^2 n'est pas vide.*

Preuve Remarquons que comme \mathcal{P} n'est pas vide, si G n'admet pas d'élément parabolique, alors il contient des éléments hyperboliques. Ce qui conclut dans ce cas.

Soit donc g_0 un élément parabolique de G , c'est-à-dire, admettant un unique point fixe x_0 . Soit g un élément de G envoyant x_0 sur un élément $y_0 \neq x_0$. Le conjugué $g_1 = gg_0^{-1}g^{-1}$ est un élément parabolique de point fixe y_0 . Le commutateur g_0g_1 envoie un des intervalles $[x_0, y_0]$ à l'intérieur de lui-même. Il admet donc deux points fixes, un dans chaque intervalle ouvert délimité par x_0 et y_0 . ■

Lemme 2.8 \mathcal{P}^2 est dense dans $S^1 \times S^1$.

Preuve Ceci provient d'un argument classique qui s'applique dans le contexte plus général de l'action des groupes hyperboliques sur leur bord (cf. [20], corollary 8.2.G.). ■

Soit (g_n) une suite d'éléments distincts de G . Fixons nous un élément (x_0, y_0) de \mathcal{P}^2 . Quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que la suite des $g_n x_0$ admet une limite \bar{a} . La condition (4) de l'énoncé montre alors qu'à une exception près \bar{a} est l'unique valeur d'adhérence possible pour la suite des $g_n y_0$. Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n y_0 = \bar{a}$$

L'exception dont il est question précédemment est le cas où une infinité de $g_n x_0$ valent \bar{a} . Dans ce cas, après une extraction d'une sous-suite, les g_n ne diffèrent les uns des autres que par des puissances d'un même élément de G de type hyperbolique ou parabolique. On vérifie aisément la propriété de convergence dans ce cas de figure. De manière plus générale, on peut supposer que pour tout élément (x, y) de \mathcal{P}^2 , si $g_n(x)$ converge, alors $g_n(y)$ converge elle aussi et admet la même limite.

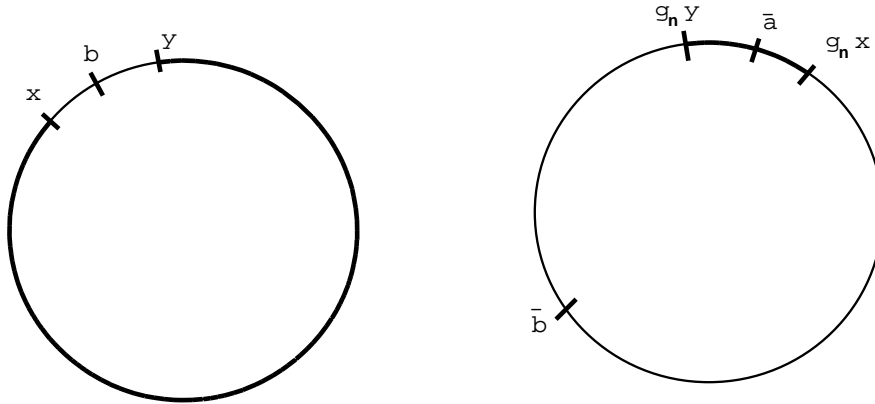
A ce stade, la meilleure méthode consiste à étudier d'abord le cas suivant :

(H) Il existe un élément b du cercle tel que la suite des $g_n b$ admet une valeur d'adhérence \bar{b} différente de \bar{a} .

Après extraction d'une sous-suite, nous avons :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n b = \bar{b}$$

Pour tout couple d'éléments distincts de $S^1 \setminus \{b\}$, nous notons $[x, y]$ l'intervalle de $S^1 \setminus \{b\}$ d'extrémités x et y . Alors, si les $g_n x$ et $g_n y$ convergent vers \bar{a} , les restrictions à $[x, y]$ des g_n convergent uniformément vers \bar{a} . En effet, les intervalles $S^1 \setminus g_n[x, y]$ contiennent $g_n(b)$, c'est-à-dire, des points de plus en plus proches de \bar{b} . Comme les extrémités des $S^1 \setminus g_n[x, y]$ convergent vers \bar{a} et que \bar{b} est différent de \bar{a} , ces intervalles sont de plus en plus "grands". Les $g_n[x, y]$ sont donc de plus en plus petits et convergent vers \bar{a} .



Ainsi, si (x, y) est un élément de \mathcal{P}^2 "intercalé" avec (x_0, y_0) , les intervalles $g_n[x, y]$ convergent vers \bar{a} . Or, comme \mathcal{P}^2 est dense, tout élément (x_1, y_1) de \mathcal{P}^2 converge vers \bar{a} . En effet, si (x_1, y_1) et (x_0, y_0) ne

sont pas déjà intercalés, il existe un autre élément (x_2, y_2) de \mathcal{P}^2 intercalé à la fois avec (x_0, y_0) et (x_1, y_1) . Comme tout compact de $S^1 \setminus \{b\}$ est contenu dans un intervalle du type $[x, y]$, où (x, y) appartient à \mathcal{P}^2 , nous avons montré que *la suite des g_n converge uniformément sur les compacts de $S^1 \setminus \{b\}$ vers \bar{a}* . La convergence de la suite inverse en découle aisément: soit K un compact de $S^1 \setminus \{\bar{a}\}$. Soit I un voisinage de b . D'après ce qui précède:

$$\exists n_0 \forall n > n_0 \quad g_n(S^1 \setminus I) \cap K = \emptyset$$

D'où:

$$g_n^{-1}K \subset I$$

La suite (g_n^{-1}) converge donc uniformément sur les compacts de $S^1 \setminus \{\bar{a}\}$ vers b .

Le cas où (H) est vérifié est donc traité. Il ne reste donc qu'à étudier le cas:

$$\forall x \in S^1 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n x = \bar{a}$$

Si, quand x décrit S^1 , deux des suites inverses $g_n^{-1}(x)$ admettent des valeurs d'adhérence différentes, nous pouvons à nouveau nous placer sous l'hypothèse (H) . Donc, après extraction d'une sous-suite, nous pouvons supposer l'existence d'un élément \bar{c} vers lequel toutes les suites $g_n^{-1}x$ convergent.

Soit K un compact de $S^1 \setminus \{\bar{c}\}$. Quitte à l'agrandir, nous pouvons le supposer être un intervalle.

Soit I un voisinage de \bar{a} :

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 \quad g_n(\partial K) \subset I$$

Supposons que les g_n ne convergent pas uniformément sur K vers \bar{a} . Alors, nous aurions pour une infinité d'entre eux:

$$g_n K \supset S^1 \setminus I$$

D'où, après extraction d'une sous-suite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(S^1 \setminus K) = \{\bar{a}\}$$

Soit x un élément de $S^1 \setminus \{\bar{a}\}$. D'après ce qui précède, x appartient à $g_n K$ dès que n est suffisamment grand. Or, $g_n^{-1}x$ converge vers \bar{c} . Nous en déduisons que \bar{c} appartient à K , ce qui est absurde.

La suite (g_n) converge donc uniformément sur les compacts de $S^1 \setminus \{\bar{c}\}$ vers \bar{a} . La convergence de la suite inverse s'obtient de la même façon. Nous avons ainsi traité le cas où l'action est minimale.

Lorsque μ n'est pas tout le cercle, nous pouvons nous ramener au cas où l'action est minimale: il suffit d'"écraser" les composantes connexes de $S^1 \setminus \mu$ en des points. En d'autres termes, il suffit de considérer une application continue $f : S^1 \rightarrow S^1$, croissante pour l'ordre cyclique sur S^1 , et telle que la préimage d'un point de S^1 est soit un singleton, soit l'adhérence d'une composante connexe de $S^1 \setminus \mu$. Cette application f envoie alors l'action de G sur le cercle de gauche en une action minimale de G sur le cercle de droite. Ces deux actions sont alors bien sûr semi-conjugées par f . Les composantes connexes de $S^1 \setminus \mu$ sont d'après la condition 1 chacune fixée par un élément de G . Leurs images par f sont donc des points fixes d'éléments de G dont l'action sur le cercle est de type parabolique. La nouvelle action de G sur le cercle vérifie toujours les hypothèses du théorème 2.6, et elle est de plus minimale: d'après ce qui précède il existe un morphisme injectif $\rho : G \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ et un homéomorphisme $f_0 : S^1 \rightarrow S^1$ tels que:

$$\forall x \in S^1 \forall g \in G \quad f_0(gs) = \rho(g)f_0(x)$$

Comme G est de type fini, et que l'action de $\rho(G)$ sur S^1 est minimale, le quotient du disque de Poincaré par $\rho(G)$ est une orbifold O de type fini munie d'une métrique hyperbolique, et dont tous les bouts sont des "cusps". Il existe sur O une autre métrique hyperbolique n'admettant pas de cusps. Elle correspond à une autre représentation fidèle ρ_0 de G dans $PSL(2, \mathbb{R})$ dont l'image ne contient aucun élément parabolique. Par ailleurs, il est bien connu que toutes les représentations fidèles et discrètes d'un même groupe dans $PSL(2, \mathbb{R})$ sont semi-conjugées: il existe une semi-conjugaison $f_1 : S^1 \rightarrow S^1$ entre les actions de G sur S^1 via ρ et ρ_0 . C'est une application continue, préservant l'ordre cyclique sur S^1 et telle que:

$$\forall x \in S^1 \forall g \in G \quad f_1(\rho_0(g)s) = \rho(g)f_1(x)$$

La préimage par f_1 d'un point x de S^1 est un singleton, sauf si x est point fixe d'un élément parabolique $\rho(g)$, auquel cas la préimage est un intervalle dont les extrémités sont fixées par l'élément $\rho_0(g)$. Cet intervalle est alors l'adhérence d'une composante connexe du complémentaire dans S^1 de l'ensemble limite de l'action de $\rho_0(G)$. On en déduit sans peine que la semi-conjugaison f se "relève" en une conjugaison entre l'action initiale de G sur le cercle et son action projective via ρ_0 . ■

2.5 Généralités sur les flots d'Anosov en dimension trois

Nous résumons à suivre les principaux résultats de [3] et de [4]. Soit Φ^t un flot d'Anosov *non topologiquement équivalent à la suspension d'un difféomorphisme du tore* sur une 3-variété fermée orientable M . Comme Φ^t n'est pas une suspension, M ne fibre pas en tores sur le cercle.

Soit $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ le revêtement universel de M . Soient $\widetilde{\Phi}^t$, $\widetilde{\Phi}$, $\widetilde{\mathcal{F}}^s$, etc ... les relevés dans \widetilde{M} de Φ^t , Φ , \mathcal{F}^s , etc ... Rappelons que nous supposons ici que les feuilletages faibles sont transversalement orientés. Les quotients $\widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}}^s$ et $\widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}}^u$ sont appelés *espaces des feuilles* (respectivement stables et instables) et notés Q^s et Q^u . Ce sont des variétés de dimension un, orientables, simplement connexes, mais en général non-Hausdorff. Dans [3], il est montré que si un des espaces des feuilles est Hausdorff, il en est de même pour l'autre. Dans [12], S. Fenley démontre lui-aussi ce résultat de manière indépendante. Quand tel est le cas, i.e., quand Q^s et Q^u sont simultanément homéomorphes à \mathbb{R} , le flot d'Anosov est dit produit.

Le quotient $\widetilde{M}/\widetilde{\Phi}$ est appelé espace des orbites, et noté Q^Φ . D'après [3] (voir aussi [12]), ce quotient est toujours homéomorphe à \mathbb{R}^2 et le passage au quotient $\pi^\Phi : \widetilde{M} \rightarrow Q^\Phi$ est une fibration triviale. Pour toute sous-variété A de M plongée de manière incompressible, le revêtement universel de A se plonge dans \widetilde{M} en une sous-variété \widetilde{A} de sorte que la restriction de π à \widetilde{A} est un revêtement d'image A . La projection $\pi^\Phi(\widetilde{A})$ est appelée *trace transverse* de A . On note \mathcal{G}^s et \mathcal{G}^u les feuilletages $\pi_*^\Phi(\widetilde{\mathcal{F}}^s)$ et $\pi_*^\Phi(\widetilde{\mathcal{F}}^u)$. Ce sont des feuilletages par droites fermées transverses l'un par rapport à l'autre. Les quotients Q^Φ/\mathcal{G}^s et Q^Φ/\mathcal{G}^u sont homéomorphes à Q^s et Q^u . On note $p^s : Q^\Phi \rightarrow Q^s$ et $p^u : Q^\Phi \rightarrow Q^u$ les applications passage au quotient.

L'action de Γ sur \widetilde{M} par automorphismes de revêtements passe aux quotients en des actions sur Q^s , Q^u et Q^Φ . L'action sur Q^Φ préserve les feuilletages \mathcal{G}^s et \mathcal{G}^u . Si un élément γ préserve globalement une feuille de \mathcal{G}^s (respectivement de \mathcal{G}^u) il y admet un unique point fixe: la feuille fixe est au-dessus d'une feuille cylindrique de \mathcal{F}^s (respectivement de \mathcal{F}^u) et le point fixe est au-dessus de l'unique orbite périodique du flot contenue dans cette feuille. Ce point fixe est alors de type hyperbolique, i.e. c'est un point fixe attractif ou répulsif de γ . Enfin, l'ensemble des éléments de Γ qui fixent un point donné de Q^s , Q^u ou Q^Φ est un sous-groupe trivial ou cyclique.

Lorsque \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u sont orientables, \mathcal{G}^s et \mathcal{G}^u admettent des orientations préservées par l'action de Γ . Ces orientations induisent sur chaque feuille de \mathcal{G}^s et de \mathcal{G}^u un ordre. Nous convenons alors des notations suivantes:

- Pour tout élément x de Q^Φ la feuille de \mathcal{G}^s (respectivement de \mathcal{G}^u) le contenant est notée $s(x)$ (respectivement $u(x)$). L'ensemble des éléments de $s(x)$ (respectivement $u(x)$) supérieurs à x est noté $s^+(x)$ (respectivement $u^+(x)$). Les éléments de $s(x)$ ou de $u(x)$ inférieurs à x sont notés $s^-(x)$ et $u^-(x)$.
- Pour tout élément x de Q^Φ , la composante connexe de $Q^\Phi \setminus s(x)$ (respectivement de $Q^\Phi \setminus u(x)$) contenant $u^+(x)$ (respectivement $s^+(x)$) est notée $S_+(x)$ (respectivement $U_+(x)$). L'autre composante connexe est notée $S_-(x)$ (respectivement $U_-(x)$).
- Pour tout élément s de Q^s , si x est un élément de s , l'image par p^s de $S_+(x)$ est notée s_+ . Celle de $S_-(x)$ est notée s_- . On définit de manière analogue u_+ et u_- pour chaque élément u de Q^u .

Pour toute partie A de Q^Φ , on note $Sat_{\mathcal{G}^s}(A)$ (respectivement $Sat_{\mathcal{G}^u}(A)$) le saturé par \mathcal{G}^s (respec-

tivement par G^u) de A . Pour chaque élément x de Q^Φ :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{++}(x) &= \text{Sat}_{G^s}(u^+(x)) \cap \text{Sat}_{G^u}(s^+(x)) \\ \mathcal{L}^{+-}(x) &= \text{Sat}_{G^s}(u^+(x)) \cap \text{Sat}_{G^u}(s^-(x)) \\ \mathcal{L}^{-+}(x) &= \text{Sat}_{G^s}(u^-(x)) \cap \text{Sat}_{G^u}(s^+(x)) \\ \mathcal{L}^{--}(x) &= \text{Sat}_{G^s}(u^-(x)) \cap \text{Sat}_{G^u}(s^-(x))\end{aligned}$$

Soit x et y deux éléments de Q^Φ tels que:

$$\mathcal{L}^{++}(x) = \mathcal{L}^{--}(y)$$

Alors $\mathcal{L}^{++}(x)$ est appelé *losange ouvert direct de sommets x et y* . De même, si les ouverts $\mathcal{L}^{+-}(x)$ et $\mathcal{L}^{-+}(y)$ sont confondus, on les appelle *losanges ouverts indirects de sommets x et y* . La notion de losange a été introduite par S. Fenley dans [13].

Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite d'éléments de Q^Φ tels que:

$$\mathcal{L}^{++}(x_n) = \mathcal{L}^{--}(x_{n+1}) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Alors, l'union des $\mathcal{L}^{++}(x_n)$ et des $\{x_n\}$ est appelée *chapelet de losanges*. De même, si $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ vérifie:

$$\mathcal{L}^{+-}(x_n) = \mathcal{L}^{-+}(x_{n+1}) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

l'union des $\mathcal{L}^{+-}(x_n)$ et des $\{x_n\}$ est elle-aussi appelée *chapelet de losanges*.

Un des résultats principaux de [4] est le suivant (cf. théorèmes C et E de [4], ainsi que la remarque 7.14 de ce même article):

Théorème 2.9 *Soit T_1, \dots, T_n une collection finie de tores plongés dans M de manière incompressible. On suppose que le flot Φ^t est produit et que ses deux feuilletages faibles sont transversalement orientés. On suppose de plus qu'aucun des tores T_i ne borde dans M un voisinage tubulaire d'un plongement de la bouteille de Klein. Alors, chaque tore T_i est isotope dans M à un tore $T_i^!$ quasi-transverse à Φ^t . De plus, si les T_i sont disjoints et deux-à-deux non librement homotopes, les $T_i^!$ peuvent alors être choisis deux-à-deux disjoints. ■*

Pour la définition d'un tore quasi-transverse, voir [4] ou la section 2.1.

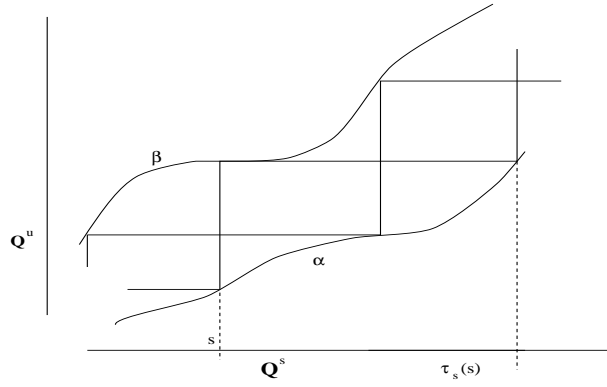
Ce théorème est basé sur le fait que pour tout flot d'Anosov produit, tout sous-groupe du groupe fondamental isomorphe à $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ préserve un chapelet de losanges dans l'espace des orbites. De manière plus générale nous avons le résultat suivant (cf. [3]):

Théorème 2.10 *Soit (M, Φ^t) un flot d'Anosov produit non topologiquement équivalent à une suspension. Alors l'application de Q^Φ dans $Q^s \times Q^u$ qui à une orbite associe les deux feuilles qui la contiennent est un plongement injectif. Son image est l'ouvert compris entre les graphes de deux homéomorphismes α et β de Q^s vers Q^u . La composition $\tau_s = \alpha^{-1} \circ \beta$ est un homéomorphisme de Q^s sans point fixe et commutant avec l'action de Γ , pour peu que les deux feuilletages faibles sont transversalement orientés. ■*

La prochaine figure permet de visualiser les applications α , β et τ . Il est par exemple simple d'en extraire la preuve du lemme suivant:

Lemme 2.11 *Si s est un point fixe attractif dans Q^s d'un élément γ de Γ , les $\tau_s^n(s)$, où n décrit \mathbb{Z} , sont exactement tous les points fixes attractifs de γ .*

Nous aurons besoin dans notre étude du théorème suivant, dû à S. Fenley, mais malheureusement encore non publié:



Théorème 2.12 *Si deux éléments de Q^s sont non-séparés l'un de l'autre par la topologie de Q^s , ils sont alors points fixes d'un même élément du groupe fondamental. De plus, tout élément du groupe fondamental préservant les orientations de Q^s et de Q^u qui fixe l'un fixe l'autre.*

Preuve Il s'agit des théorèmes A et C de [14]. ■

3 Preuve du théorème A

Par hypothèse, $i : S \hookrightarrow M$ est un morceau fibré de Seifert principal. Fixons le point base x_0 de M à l'intérieur de $i(S)$. Nous l'identifions à sa préimage par i . Nous notons $\Gamma = \pi_1(M, x_0)$ et $Z = \pi_1(S, x_0)$. Le centre de Z est un sous-groupe engendré par un élément h représenté par la fibre régulière passant par x_0 .

D'après le théorème 2.10 l'espace des orbites Q^Φ s'identifie à l'ouvert délimité dans $Q^s \times Q^u$ par les graphes de deux homéomorphismes α et β de Q^s vers Q^u . Nous choisissons les orientations de Q^s et de Q^u de sorte que les homéomorphismes α et β soient croissants. Nous notons $\tau_s = \alpha^{-1} \circ \beta$.

3.1 Mise en bonne position du morceau par rapport au flot

Nous commençons par étudier l'action de Z sur Q^s . Dans tout ce qui suit, nous appelons *Z-cylindrique* toute feuille de G^s ou de G^u fixée par un élément (non trivial) de Z . Nous appelons *Z-périodique* tout point de Q^Φ fixé par un élément de Z .

Lemme 3.1 *L'action de Z sur Q^s n'admet pas d'orbite fermée discrète.*

Preuve Nous raisonnons par l'absurde: soit $\Theta_0 = Z \cdot \{s_0\}$ une Z -orbite fermée discrète de $Q^s \simeq \mathbb{R}$. Pour chaque élément γ de Z , si γs_0 est supérieur à s_0 nous notons $\rho(\gamma)$ le nombre d'éléments de Θ_0 contenus dans $[s_0, \gamma s_0[$. Si γs_0 est inférieur à s_0 , nous notons $\rho(\gamma)$ l'opposé du nombre d'éléments de Θ_0 contenus dans $] \gamma s_0, s_0]$. Enfin, si γs_0 et s_0 sont confondus, nous posons $\rho(\gamma) = 0$. On montre aisément que $\rho : Z \rightarrow \mathbb{Z}$ est un morphisme surjectif. Son noyau est le stabilisateur de s_0 et est donc trivial ou cyclique. Il s'en suit que Z est soit cyclique, soit isomorphe à $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ à un indice deux près. Contradiction (cf. proposition 2.3). ■

Comme premier corollaire, nous obtenons que l'action de la fibre h sur Q^s est nécessairement libre: en effet, l'ensemble des points fixes de h est soit vide, soit un fermé discret Z -invariant.

Lemme 3.2 *Chaque élément de Z préserve l'orientation de Q^s .*

Preuve Si un élément γ de Z renverse l'orientation de Q^s il y admet un unique point fixe. Comme h et γ commutent, ce point fixe devrait aussi être point fixe de h : contradiction. ■

Lemme 3.3 *L'action de Z sur Q^s n'est pas libre.*

Preuve Tout groupe agissant librement sur R est un groupe libre abélien. Par ailleurs, les seuls groupes libres abéliens pouvant apparaître comme groupe fondamental d'un fibré de Seifert sont \mathbb{Z} , $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. On exclut les deux premiers grâce à la proposition 2.3. Le dernier cas est lui-aussi impossible, car toute variété fermée dont le groupe fondamental contient $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ admet un revêtement fini par le tore de dimension trois. Or, celui-ci ne peut être support d'un flot d'Anosov car son groupe fondamental n'est pas à croissance exponentielle (cf. [32]). ■

Corollaire 3.4 *L'action de Z sur Q^s admet un unique fermé invariant minimal μ^s qui est soit tout Q^s , soit exceptionnel, i.e. parfait et totalement discontinu. Si un élément de Z admet des points fixes dans Q^s , un de ces points fixes appartient à μ^s .*

Preuve C'est une propriété générale des groupes de type fini agissant sur R et sans orbite fermée discrète. Voir par exemple [24], IV.3.1. ■

Comme τ_s commute à l'action de Z , l'unicité de μ^s implique son invariance par τ_s .

Il découle presque immédiatement de la définition de τ_s que, pour tout élément γ de Z , si s est un point fixe de γ , disons attractif, alors $\tau_s(s)$ est lui-aussi un point fixe attractif de γ , et l'intervalle $]s, \tau_s(s)[$ contient un et un seul point fixe de γ , qui est répulsif. On en déduit:

Lemme 3.5 *Le minimal μ^s est l'adhérence des points fixes d'éléments de Z .* ■

Lemme 3.6 *L'action sur le quotient Q^s/τ_s d'un élément de Z admettant un point fixe dans Q^s est de type hyperbolique, i.e. admet deux points fixes, l'un attractif, l'autre répulsif.* ■

En raisonnant de manière analogue sur Q^u , on trouve l'existence d'un minimal μ^u pour l'action de Z sur Q^u qui est l'adhérence des points fixes d'éléments de Z . Du reste, μ^u n'est autre que l'image par α ou β de μ^s .

Corollaire 3.7 *Soit \mathcal{M} l'ensemble des éléments de $Q^\Phi \subset Q^s \times Q^u$ dont les coordonnées appartiennent à μ^s et μ^u . Alors, l'ensemble des points Z -périodiques de Q^Φ est une partie dense de \mathcal{M} .*

Preuve L'argument est classique. Voir la référence du lemme 2.8. ■

Ces observations étant faites, revenons à la preuve du théorème A.

D'après le théorème 2.9 on peut après isotopie supposer que les composantes connexes de $i(\partial S)$ sont des tores quasi-transverses à Φ . Notons que l'hypothèse d'orientabilité transverse des feuilletages faibles demandée dans l'énoncé du théorème 2.9 est palliée dans notre cas par le lemme 3.2. De plus, ils ont pour traces transverses des chapelets de losanges, i.e., pour chacun d'entre eux, il existe une composante connexe de leur préimage par π sur lequel π^Φ se restreint en un homéomorphisme d'image un chapelet. Les restrictions G^s et G^u de \mathcal{F}^s et de \mathcal{F}^u à S forment alors un morceau de bifeuilletage d'Anosov. Soit $\hat{\pi} : (\widehat{M}, \hat{x}_0) \rightarrow (M, x_0)$ le revêtement associé à $Z \subset \Gamma$. Comme Z n'est autre que $\pi_1(S, x_0)$, le plongement i de l'intérieur de S dans M se relève en un plongement \hat{i} de $\widehat{Int}S$ dans \widehat{M} tel que $\hat{\pi} \circ \hat{i}$ soit injectif.

L'adhérence de $\hat{i}(\widehat{Int}S)$ est un fibré de Seifert compact \widehat{S} plongé dans \widehat{M} . Son bord $\partial \widehat{S}$ est constitué de tores quasi-transverses au relevé $\widehat{\Phi}$ de Φ . Il se peut que certains tores T_i borde S des deux côtés: ces tores

correspondent aux “auto-recollements” de S . Au-dessus de tels tores il existe deux tores composantes connexes de $\partial\widehat{S}$. Notons $\widehat{T}_1, \dots, \widehat{T}_m$ les composantes connexes de $\partial\widehat{S}$. Soit $(\widetilde{S}, \widetilde{x}_0)$ le revêtement universel de $(\widehat{S}, \widehat{x}_0)$. Il se plonge dans $(\widetilde{M}, \widetilde{x}_0)$. Nous l’identifions à l’image de ce plongement. C’est alors un fermé de \widetilde{M} préservé par l’action de Z . De plus, comme \widetilde{S} est connexe, si un élément de Γ envoie l’intérieur de \widetilde{S} sur une partie de \widetilde{M} non-disjointe de \widetilde{S} , il appartient nécessairement à Z . Le fermé \widetilde{S} est bordé dans \widetilde{M} par une infinité de plans fermés. Chacun de ces plans fermés est au-dessus d’un des \widehat{T}_i et est préservé par un sous-groupe libre abélien de rang deux de Z .

Soit \widetilde{T} un des plans fermés bordant \widetilde{S} . Nous noterons toujours H le sous-groupe libre abélien de rang deux de Z préservant \widetilde{T} . Notons \mathcal{C} sa projection π^Φ . Rappelons (cf. lemme 7.4 de [4]) que toute feuille de $\widetilde{\Phi}$ non tangente à \widetilde{T} ne rencontre \widetilde{T} qu’en au plus un point, et que l’intersection entre chaque feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ ou de $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ et \widetilde{T} est soit vide, soit connexe. Soit \widetilde{T}^+ la composante connexe de $\widetilde{M} \setminus \widetilde{T}$ contenant l’intérieur de \widetilde{S} , et \widetilde{T}^- l’autre composante connexe. Soit $\widetilde{\theta}$ une feuille de $\widetilde{\Phi}$ contenue dans \widetilde{T} : elle est globalement préservée par un élément γ de H qui préserve également \widetilde{T} . Soit enfin F^s et F^u les feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ et de $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ contenant $\widetilde{\theta}$, F_+^s et F_+^u les composantes connexes de $F^s \setminus \widetilde{\theta}$ et de $F^u \setminus \widetilde{\theta}$ contenues dans \widetilde{T}^+ , et F_-^s et F_-^u les composantes connexes de $F^s \setminus \widetilde{\theta}$ et de $F^u \setminus \widetilde{\theta}$ contenues dans \widetilde{T}^- . L’union $F_+^s \cup F_+^u \cup \widetilde{\theta}$ borde dans \widetilde{M} un domaine entièrement contenu dans \widetilde{T}^+ . Nous notons $W^+(\widetilde{\theta})$ l’union de ce domaine, de F_+^s et de F_+^u . De manière similaire, nous définissons le fermé $W^-(\widetilde{\theta})$ de \widetilde{T}^- bordé par F_-^s et F_-^u . Les deux fermés $W^+(\widetilde{\theta})$ et $W^-(\widetilde{\theta})$ sont saturés par $\widetilde{\Phi}$. Notons (s_0, u_0) les coordonnées de $\pi^\Phi(\widetilde{\theta})$ dans $Q^\Phi \subset Q^s \times Q^u$ (cf. théorème 2.10). La projection $\Delta(\widetilde{\theta}) = \pi^\Phi(W^-(\widetilde{\theta}))$ est l’un des triangles $\Delta^+(\widetilde{\theta})$ ou $\Delta^-(\widetilde{\theta})$ définis par:

$$\begin{aligned}\Delta^+(\widetilde{\theta}) &= \{(s, u) \in Q^\Phi / (s, u) \neq (s_0, u_0), s \in [s_0, \alpha^{-1}(u_0)[, u \in]\alpha(s_0), u_0]\} \\ \Delta^-(\widetilde{\theta}) &= \{(s, u) \in Q^\Phi / (s, u) \neq (s_0, u_0), s \in]\beta^{-1}(u_0), s_0], u \in [u_0, \beta(s_0)]\}\end{aligned}$$

Si $\Delta(\widetilde{\theta}) = \Delta^+(\widetilde{\theta})$, alors $\bar{\Delta}(\widetilde{\theta}) = \pi^\Phi(W^+(\widetilde{\theta}))$ est le triangle $\Delta^-(\widetilde{\theta})$, et si $\Delta(\widetilde{\theta}) = \Delta^-(\widetilde{\theta})$, alors $\bar{\Delta}(\widetilde{\theta}) = \Delta^+(\widetilde{\theta})$.

Lemme 3.8 $\Delta(\widetilde{\theta})$ ne contient pas de point Z -périodique.

Preuve Supposons l’existence d’une orbite $\widetilde{\theta}_0$ de $\widetilde{\Phi}$ contenue dans $W^-(\widetilde{\theta})$ préservée par un élément γ_0 de Z . Alors, $\gamma_0\widetilde{T}^-$ et \widetilde{T}^- ont en commun $\widetilde{\theta}_0$ et ne sont donc pas disjoints. Il s’en suit que γ_0 préserve \widetilde{T} , et donc le chapelet \mathcal{C} . Comme il préserve un point de Q^Φ , il fixe en fait chaque sommet de \mathcal{C} . L’orbite θ_0 est donc sommet de \mathcal{C} . Or, \mathcal{C} est disjoint de $\Delta(\widetilde{\theta})$: contradiction. ■

Lemme 3.9 Aucune feuille de G^s ou de G^u rencontrant l’intérieur de $\Delta(\widetilde{\theta})$ n’est Z -cylindrique.

Preuve Supposons qu’une feuille F de G^s rencontre l’intérieur de $\Delta(\widetilde{\theta})$ tout en étant fixée par un élément γ_0 de Z . Nous nous plaçons dans le cas $\Delta(\widetilde{\theta}) = \Delta^+(\widetilde{\theta})$, l’autre cas se traite de manière analogue. Comme μ^s est parfait il existe une autre feuille F' de G^s dans $]s_0, \beta(u_0)[$ fixée par un élément γ'_0 de Z et telle que γ_0 et γ'_0 n’ont aucune puissance commune. Quitte à échanger F et F' on peut supposer $F' < F$. Alors, $\alpha(F)$ est strictement supérieur à $\alpha(F')$, ce qui montre que le couple $(F', \alpha(F))$ appartient à $\Delta(\widetilde{\theta})$. Par ailleurs, c’est un élément de \mathcal{M} . D’après le corollaire 3.7, il existe donc dans $\Delta(\widetilde{\theta})$ un point Z -périodique. Ceci contredit le lemme 3.8. On montre de même qu’aucune feuille Z -cylindrique de G^u ne rencontre l’intérieur de $\Delta(\widetilde{\theta})$. ■

Corollaire 3.10 La projection $p^s(\text{Int}\Delta(\widetilde{\theta}))$ (respectivement $p^u(\text{Int}\Delta(\widetilde{\theta}))$) est une composante connexe de $Q^s \setminus \mu^s$ (respectivement de $Q^u \setminus \mu^u$). ■

Corollaire 3.11 L’intérieur du chapelet \mathcal{C} ne contient aucun point Z -périodique.

Preuve Une des deux feuilles Z -cylindriques (soit de \mathcal{G}^s , soit de \mathcal{G}^u) passant par un tel point rencontrerait l'intérieur de $\Delta(\tilde{\theta})$. ■

Lemme 3.12 *Le triangle $\bar{\Delta}(\tilde{\theta})$ contient une orbite Z -périodique.*

Preuve Comme μ^s et μ^u sont parfaits il existe des feuilles Z -cylindriques proches respectivement de s_0 et de u_0 . Comme elles ne peuvent rencontrer $\Delta(\tilde{\theta})$ elles rencontrent l'intérieur de $\bar{\Delta}(\tilde{\theta})$. Leur intersection est constituée d'un élément de \mathcal{M} contenu à l'intérieur de $\bar{\Delta}(\tilde{\theta})$. D'après 3.7 l'intérieur de celui-ci contient donc un point Z -périodique. ■

L'étude précédente nous permet d'avoir une bonne idée de la restriction de $\tilde{\Phi}$ à $W^-(\tilde{\theta})$. Par ailleurs, lorsque $\tilde{\theta}$ parcourt l'ensemble des orbites de $\tilde{\Phi}$ tangentes à \tilde{T} , l'union des $\bar{\Delta}(\tilde{\theta})$ et des $\Delta(\tilde{\theta})$ recouvre le complémentaire de \mathcal{C} dans $Q^{\tilde{\Phi}}$. D'où:

Lemme 3.13 *Une feuille de $\tilde{\Phi}$ ne rencontrant pas \tilde{T} est soit contenue dans l'un des $W^+(\tilde{\theta})$, soit dans l'un des $W^-(\tilde{\theta})$.* ■

Soit \hat{T} la projection de \tilde{T} dans \hat{M} et \hat{T}^- celle de \tilde{T}^- .

Corollaire 3.14 *Les orbites périodiques de $\hat{\Phi}^t$ sont toutes contenues dans \hat{S} .*

Preuve Soit $\hat{\theta}_0$ une orbite périodique de $\hat{\Phi}^t$. Elle se relève en une orbite $\tilde{\theta}_0$ de $\tilde{\Phi}$ préservée par un élément de Z . D'après 3.11 elle ne peut rencontrer transversalement $\partial\hat{S}$, et d'après 3.9 $\tilde{\theta}_0$ ne peut rencontrer un des $W^-(\tilde{\theta})$. D'après 3.13, il s'en suit que $\hat{\theta}_0$ ne rencontre aucun des \hat{T}^- et est donc contenu dans \hat{S} . ■

Chaque losange $\mathcal{L}^{++}(\tilde{\theta})$ correspond à un anneau de Birkhoff élémentaire $A^+(\tilde{\theta})$ entièrement contenu dans la projection T de \tilde{T} dans M (cf. [4]). Le flot Φ^t est transverse à l'intérieur de $A^+(\tilde{\theta})$. Il est donc soit rentrant dans S , soit sortant de S en $A^+(\tilde{\theta})$. Le résultat suivant donne un critère pour décider de cette alternative.

Corollaire 3.15 *Le flot Φ^t est sortant de S en $A^+(\tilde{\theta})$ si $\Delta(\tilde{\theta}) = \Delta^+(\tilde{\theta})$. Il est rentrant dans S si $\Delta(\tilde{\theta}) = \Delta^-(\tilde{\theta})$.*

Preuve Nous n'étudions que le premier cas, à savoir $\Delta(\tilde{\theta}) = \Delta^+(\tilde{\theta})$. L'autre cas s'en déduit en inversant le flot. Soit $\hat{\theta}^t$ un élément Z -périodique de $Q^{\tilde{\Phi}}$ dont la feuille u^t de \mathcal{G}^u rencontre $\mathcal{L}^{++}(\tilde{\theta})$ (il existe d'après le lemme 3.12). Il correspond à une orbite périodique $\hat{\theta}^t$ de $\hat{\Phi}^t$ contenue à l'intérieur de \hat{S} . Nous notons comme précédemment \hat{T} la projection de \tilde{T} dans \hat{M} , et \hat{T}^- celle de \tilde{T}^- . Soit enfin \hat{M}_H le revêtement de \hat{M} associé au sous-groupe H de Z préservant \tilde{T} , i.e., correspondant au groupe fondamental de \hat{T} . Soient \hat{T}_H et \hat{T}_H^- les projetés de \hat{T} et de \hat{T}^- dans \hat{M}_H . Les seuls éléments γ de Z envoyant \hat{T}^- sur un ouvert $\gamma\hat{T}^-$ non disjoint de \hat{T}^- sont ceux appartenant à H . Donc, le revêtement $\hat{\pi}_H : \hat{M}_H \rightarrow \hat{M}$ se restreint à \hat{T}_H^- en un homéomorphisme sur son image \hat{T}^- . Or, d'après le lemme 7.4 de [4], une feuille de $\hat{\Phi}_H$ rencontrant transversalement \hat{T}_H^- ne le rencontre qu'en exactement un point. Donc, pour chaque élément \hat{x} de \hat{T} , si les $\hat{\Phi}^t(\hat{x})$ pour t petit et négatif appartiennent à \hat{T}^- , alors l'orbite négative toute entière de \hat{x} est contenue dans \hat{T}^- . Soit $\hat{\theta}$ l'orbite de $\hat{\Phi}^t$ correspondant à $\tilde{\theta}$, et $\hat{A}(\tilde{\theta})$ l'anneau de Birkhoff contenu dans \hat{T} correspondant à $\mathcal{L}^{++}(\tilde{\theta})$. Par hypothèse, il existe un élément \hat{x} de $\hat{A}(\tilde{\theta})$ dont l'orbite négative s'accumule sur $\hat{\theta} \subset \hat{S}$. Comme \hat{S} et \hat{T}^- sont disjoints, les $\hat{\Phi}^t(\hat{x})$ pour les temps t négatifs ne peuvent tous appartenir à \hat{T}^- . D'après ce qui précède, ils appartiennent donc tous à \hat{S} : $\hat{\Phi}$ est donc sortant de \hat{S} en $\hat{A}(\tilde{\theta})$. Le lemme en découle. ■

3.2 Structures projectives transverses des feuilletages intermédiaires

Notre but est de montrer ici que les relevés dans \widehat{M} de \mathcal{F}^s et de \mathcal{F}^u sont transversalement projectifs.

Proposition 3.16 *Toute lacune de Z dans Q^s est de la forme $p^s(\Delta(\tilde{\theta}))$ où $\tilde{\theta}$ est une feuille de $\tilde{\Phi}$ tangente à $\partial\tilde{S}$.*

Preuve Soit I une lacune de Z dans Q^s . Rappelons que ceci signifie que I est une composante connexe I du complémentaire dans Q^s de μ^s . Rappelons aussi qu'elle est dite errante si elle est disjointe de tous ses itérés γI ($\gamma \in Z \setminus \{id\}$).

Supposons que I soit errante. Soit Λ la préimage $(p^s)^{-1}(I)$. Soit $\bar{\Lambda}$ la projection dans M de $(\pi^\Phi)^{-1}(\Lambda)$. Soit \tilde{T} un des plans fermés bordant \tilde{S} . Pour toute orbite $\tilde{\theta}$ tangente à \tilde{T} l'intervalle $p^s(Int\Delta(\tilde{\theta}))$ est une lacune de Z non-errante (cf. corollaire 3.10). Elle est donc disjointe de I . Donc, Λ est disjoint de $\Delta(\tilde{\theta})$. On en déduit que Λ est contenu dans $\Omega S = \pi^\Phi(\tilde{S})$ (cf. proposition 3.13). De plus, si l'orbite $\tilde{\theta}$ est telle que le losange $\mathcal{L}^{++}(\tilde{\theta})$ rencontre Λ , alors le triangle $\Delta(\tilde{\theta})$ est $\Delta^-(\tilde{\theta})$. D'après le corollaire 3.15, il s'en suit que si une orbite de $\tilde{\Phi}$ appartenant à Λ rencontre \tilde{T} en un point \tilde{x} , l'orbite négative de \tilde{x} par $\tilde{\Phi}^\dagger$ est entièrement contenue dans \tilde{T}^- . Il en découle que l'orbite positive de \tilde{x} est elle entièrement contenue dans \tilde{S} . Ceci s'interprète dans M de la manière suivante: l'orbite d'un élément de $\bar{\Lambda}$ est d'un des deux types suivants:

- soit elle est entièrement contenue dans S ,
- soit elle rencontre ∂S en un point x dont l'orbite positive par Φ^\dagger est entièrement contenue à l'intérieur de S .

Soit s_0 une feuille de \mathcal{G}^s rencontrant Λ et contenant un point fixe $\tilde{\theta}_0$ d'un élément γ_0 de Γ (cette feuille existe, car les feuilles cylindriques de \mathcal{F}^s sont denses dans M . Voir par exemple le théorème 2.4 de [3]). Soit \tilde{F}_0^s la feuille $(\pi^\Phi)^{-1}(s_0)$ de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ et F_0^s sa projection dans M . Soit enfin θ_0 le projeté dans M de $\tilde{\theta}_0$: c'est l'unique orbite périodique contenue dans F_0^s . Quitte à modifier le choix de s_0 on peut supposer que θ_0 n'est pas une des orbites périodiques contenues dans ∂S . Soit enfin $\tilde{\theta}'$ une orbite de $\tilde{\Phi}$ contenue dans \tilde{F}_0^s dont l'image par π^Φ rencontre un des losanges $\mathcal{L}^{++}(\tilde{\theta})$ où $\tilde{\theta}$ est une orbite périodique tangente à un des plans \tilde{T} bordant \tilde{S} . Soit θ' sa projection dans M . L'orbite positive de θ' est contenue dans S et s'accumule sur θ_0 . On en déduit que θ_0 est contenue dans S , et même dans l'intérieur de S puisqu'elle n'est pas tangente à ∂S . Soit $\tilde{\theta}_0'$ un relevé de θ_0 dans \tilde{S} : il existe un élément γ_1 de Z préservant $\tilde{\theta}_0'$. Soit γ l'élément de Γ envoyant $\tilde{\theta}_0$ sur $\tilde{\theta}_0'$. Nous avons, quitte à remplacer γ_0 et γ_1 par des puissances d'eux-même:

$$\gamma_1 = \gamma\gamma_0\gamma^{-1}$$

Par ailleurs, γ envoie $\tilde{\theta}'$ sur une orbite $\gamma\tilde{\theta}'$ dont la partie future s'accumule sur $\tilde{\theta}_0' \subset Int\tilde{S}$. Comme la partie future de $\tilde{\theta}'$ est elle aussi contenue à l'intérieur de \tilde{S} on en déduit que l'intersection entre l'intérieur de \tilde{S} et l'intérieur de $\gamma\tilde{S}$ est non-vidé. Donc, γ est élément de Z , et $\gamma_0 = \gamma^{-1}\gamma_1\gamma$ également. Il s'en suit que l'élément γ_0 de Z fixe la feuille s_0 qui est contenue dans Λ : ceci contredit le fait que I soit une lacune et le lemme 3.5.

Donc, I n'est pas errante: il existe un élément γ de Z fixant les extrémités $s_1 < s_2$ de I . Soit \mathcal{C} le chapelet des γ -losanges. Le losange $\mathcal{L}^{++}(\tilde{\theta}')$ ne rencontre aucune feuille Z -cylindrique de \mathcal{G}^s , et $\mathcal{L}^{--}(\tilde{\theta}')$ ne rencontre aucune feuille Z -cylindrique de \mathcal{G}^u . On en déduit que l'intérieur de \mathcal{C} ne contient aucun point Z -périodique. C'est donc un chapelet " Z -simple", i.e. la Z -orbite d'un sommet de \mathcal{C} est disjointe de l'intérieur de \mathcal{C} . D'après le théorème C de [4] (qui peut être appliqué dans ce contexte car il n'y est jamais utilisée la compacité de la variété ambiante) il existe un tore \hat{T} plongé dans \widehat{M} , quasi-transverse à $\hat{\Phi}$, et admettant un relevé \tilde{T} dans \tilde{M} dont l'image par π^Φ est le chapelet \mathcal{C} . Comme \mathcal{C} ne rencontre aucun des $\Delta(\tilde{\theta}_0)$ où $\tilde{\theta}_0$ est une feuille de $\tilde{\Phi}$ tangente à $\partial\tilde{S}$, \hat{T} est contenu dans \hat{S} (quitte à le pousser le long des orbites de $\hat{\Phi}^\dagger$).

Supposons que \widehat{T} n'est pas librement homotope à un des tores bordant \widehat{S} . Alors, d'après le théorème E de [4], on peut le supposer disjoint de $\partial\widehat{S}$, i.e. contenu à l'intérieur de \widehat{S} . Il existe alors une courbe fermée simple c dans $\text{Int}\widehat{S}$ dont le nombre d'intersection avec \widehat{T} est non-nul. On peut supposer que c contient le point base. Soit $[c]$ l'élément de Z représenté par c . Soit H le sous-groupe de Z engendré par $[c]$ et h . C'est un groupe libre abélien de rang 2. D'après la proposition 7.1 de [4] il existe un élément $[c']$ de H fixant un point de Q^Φ . Soit $\hat{\theta}_0$ l'orbite de $\widehat{\Phi}$ correspondant à ce point fixe. Comme h n'admet pas de point fixe, $[c']$ est de la forme $[c]^p h^q$ où p est non-nul. Donc, comme $\hat{\theta}_0$ est homologue à c' , son nombre d'intersection avec \widehat{T} est non-nul: $\hat{\theta}_0$ rencontre transversalement \widehat{T} . Ceci contredit le fait que C ne contient pas d'éléments Z -périodiques dans son intérieur.

Donc, \widehat{T} est homotope à une composante connexe de $\partial\widehat{S}$. Les orbites périodiques qu'il contient sont tangentes à cette composante de bord. La lacune I est donc un intervalle $p^s(\Delta(\hat{\theta}))$ où $\hat{\theta}$ est tangente à $\partial\widehat{S}$. ■

Proposition 3.17 *Il existe un entier positif k tel que les restrictions à μ^s de τ_s^k et de h coïncident.*

Preuve Soit s un point fixe attractif d'un élément γ de Z . L'image $h(s)$ est alors elle aussi un point fixe attractif de γ et est donc de la forme $\tau_s^{k(s)}(s)$. L'application k est manifestement localement constante et est Z -invariante. Elle est donc constante sur l'ensemble des points cylindriques. On conclut grâce à la densité des éléments Z -cylindriques dans μ^s . ■

En général, l'égalité $h = \tau_s^k$ ne s'étend pas à tout Q^s . La proposition suivante remédie à cette "imperfection":

Proposition 3.18 *Il existe un homéomorphisme τ_0 de Q^s dans lui-même coïncidant avec τ_s sur μ^s , commutant avec l'action de Z et vérifiant:*

$$\tau_0^k = h$$

Preuve Si $k = 1$ il suffit de choisir $\tau_0 = h$. Si μ^s est Q^s tout entier, $\tau_0 = \tau_s$ convient. Nous supposons donc $k > 1$ et $\mu^s \neq Q^s$. Nous allons définir les restrictions de τ_0 à chaque composante connexe J de $Q^s \setminus \mu^s$. Comme nous voulons assurer la commutativité avec Z , nous sommes amenés à étudier la dynamique de l'action de Z sur les intervalles J . Soit x_0 un élément de μ^s . Notons I_0 l'intervalle $[x_0, \tau_s(x_0)]$. Soit $(J_r)_{r \in \mathcal{R}}$ une collection de composantes connexes de $I_0 \setminus \mu$ telle que:

$$Z.J_r \cap Z.J_{r'} \neq \emptyset \Leftrightarrow r = r' \tag{1}$$

$$I_0 \setminus \mu = \bigcup_{r \in \mathcal{R}} (Z.J_r \cap I_0) \tag{2}$$

Comme Z agit minimalement sur μ^s toute composante connexe de $Q^s \setminus \mu^s$ admet un itéré dans I_0 . C'est-à-dire:

$$Q^s \setminus \mu = \bigcup_{r \in \mathcal{R}} (Z.J_r) \tag{3}$$

D'après 3.16 chaque intervalle J_r est préservé par un élément de Z . Nous notons γ_r le générateur du groupe d'isotropie de l'intervalle J_r ($r \in \mathcal{R}$) dont le point fixe répulsif est l'extrémité gauche de J_r .

Soit \mathcal{G} le graphe orienté étiqueté par Z suivant:

- L'ensemble des sommets de \mathcal{G} est \mathcal{R} .
- Une arête relie r_1 à r_2 (dans cet ordre) si il existe un élément γ de Z tel que:

$$\tau_s J_{r_1} = \gamma.J_{r_2} \tag{4}$$

Elle est étiquetée par un des γ vérifiant (4).

Remarquons que le choix de l'étiquette d'une arête est unique modulo translation à droite par γ_{r_2} ou modulo translation à gauche par γ_{r_1} . L'étiquette envoie par conjugaison γ_{r_1} sur γ_{r_2} . Montrons que ce graphe vérifie les propriétés suivantes:

1. Chaque sommet est de valence deux. Il admet une arête 'rentrante' et une arête 'sortante' (ces deux arêtes peuvent être confondues).
2. Chaque composante connexe est un cycle de longueur finie divisant k .

La propriété 1 découle de (3) et de (1).

En effet: pour tout indice r les intervalles $\tau_s J_r$ et $\tau_s^{-1} J_r$ sont des composantes connexes de $Q^s \setminus \mu^s$. L'existence des arêtes provient de (3), l'unicité de (1).

Pour prouver 2 il suffit de montrer que tout chemin orienté de \mathcal{G} de longueur k est un cycle. Soit donc (r_0, \dots, r_k) un tel chemin. Soit γ_i l'étiquette de l'arête $[r_i, r_{i+1}]$ ($0 \leq i \leq k$). La composition des relations (4) donne:

$$\gamma_0 \dots \gamma_{k-1} J_{r_k} = (\tau_s)^k J_{r_0} = h J_{r_0}$$

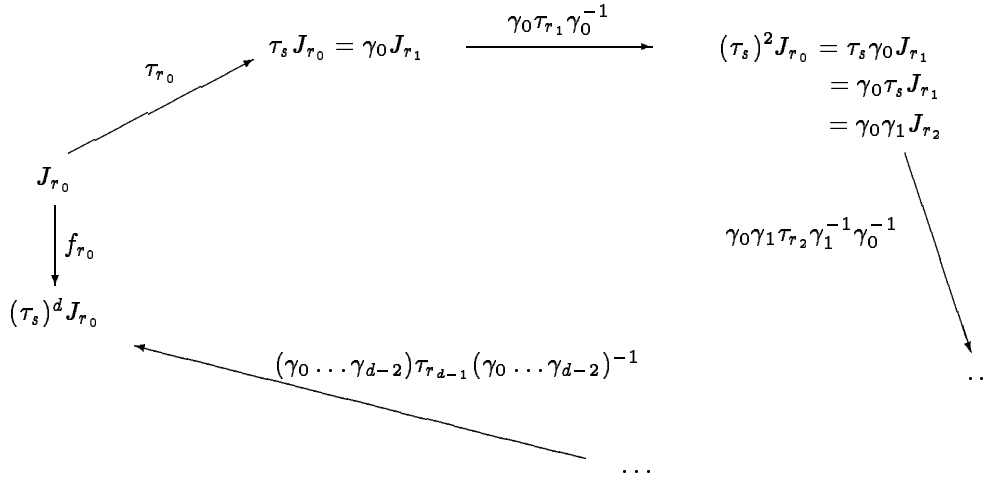
D'après (1):

$$r_k = r_0$$

Nous allons maintenant définir des applications τ_r ($r \in \mathcal{R}$). Ce seront des restrictions de l'application τ_0 recherchée. Les seules contraintes sont celles provenant des cycles. Soit $(r_0, \dots, r_d = r_0)$ un tel cycle. Rappelons que d divise k . Notons p le rapport $\frac{k}{d}$. Notons γ_i l'étiquette de l'arête $[r_i, r_{i+1}]$ et γ la composition de ces étiquettes. Nous choisissons pour chaque indice i entre 0 et $d-2$ un homéomorphisme croissant τ_{r_i} de J_{r_i} sur $\tau_s J_{r_i}$ commutant avec les actions de γ_{r_i} sur ces intervalles (remarquons que γ_{r_i} préserve $\tau_s J_{r_i}$). Le choix de $\tau_{r_{d-1}}$ est moins immédiat. Rappelons que les étiquettes des arêtes sont définies modulo les groupes d'isotropie des sommets. Ceci implique que leur composition γ est définie modulo γ_{r_0} . La puissance γ^p envoie J_{r_0} sur $h J_{r_0}$. Il existe donc un entier q tel que:

$$\gamma^p \gamma_{r_0}^q = h \tag{6}$$

Comme γ est défini modulo γ_{r_0} on peut supposer q compris entre 0 et p . Soit f_{r_0} un homéomorphisme croissant de J_{r_0} sur $\gamma J_{r_0} = \gamma_{r_0} J_{r_0} = (\tau_s)^d J_{r_0}$ commutant avec les actions de γ_{r_0} et tel que $(f_{r_0} \circ \gamma^{-1})^p$ vaille $\gamma_{r_0}^q$. Il suffit alors de choisir $\tau_{r_{d-1}}$ de sorte que le diagramme suivant soit commutatif:



Cette application $\tau_{r_{d-1}}$ commute alors avec $\gamma_{r_{d-1}}$.

Les applications ainsi associées aux sommets de \mathcal{G} définissent une application τ_0 de $\cup_{r \in \mathcal{R}} J_r$ sur $\cup_{r \in \mathcal{R}} (\tau_s J_r) = \tau_s (\cup_{r \in \mathcal{R}} J_r)$. Celle-ci s'étend sur tout Q^s de la manière suivante:

- $\tau_{0|\mu^s} = \tau_s|\mu^s$
- $\tau_{0|\gamma J_r} = \gamma \tau_r \gamma^{-1}$

Cette application est bien définie. En effet, dans la deuxième égalité, l'élément γ est défini modulo γ_r à droite. Or, comme τ_r et γ_r commutent:

$$(\gamma \gamma_r) \tau_r (\gamma \gamma_r)^{-1} = \gamma \tau_r \gamma^{-1}$$

Cette application est définie sur tout Q^s . Elle est strictement croissante, surjective: c'est donc un homéomorphisme. La commutativité avec l'action de Z est claire. Pour vérifier que τ_0 admet pour puissance k -ième h il suffit de le faire sur les intervalles J_r . Etudier $\tau_{0|J_r}^k$ revient à considérer le cycle $(r = r_0, \dots, r_d = r)$ de \mathcal{G} issu de r . Notre choix des $\tau_{r_{d-1}}$ a été fait pour que la restriction de τ_0^d à J_r coïncide avec f_r . D'où:

$$\begin{aligned} \tau_{0|J_r}^k &= (\tau_0^d)|_{J_r}^p \\ &= \gamma^{p-1} \circ f_r \circ \gamma^{1-p} \circ \dots \circ \gamma \circ f_r \circ \gamma^{-1} \circ f_r \\ &= \gamma^{p-1} (f_r \circ \gamma^{-1})^p \gamma \\ &= \gamma^{-1} \circ \gamma^p \circ \gamma_{r_0}^q \circ \gamma \\ &= \gamma^{-1} \circ h \circ \gamma \\ &= h|_{J_r} \end{aligned}$$

■

Il ne nous reste qu'à vérifier que le théorème 2.6 s'applique à l'action de $\bar{Z} = Z/\langle h \rangle$ sur le cercle $S_0 = Q^s/\langle \tau_0 \rangle$. Notons $\bar{\mu}^s$ la projection dans S_0 de μ^s : il s'agit de l'unique fermé minimal invariant par \bar{Z} .

Lemme 3.19 *Un élément non trivial $\bar{\gamma}$ de \bar{Z} ayant un point fixe dans S_0 est de type hyperbolique. Le groupe d'isotropie de tout point de S_0 est cyclique.*

Preuve Soit \bar{x}_0 un élément de S_0 de groupe d'isotropie \bar{Z}_0 non trivial. Soit x_0 un relevé dans Q^s de \bar{x}_0 . Si γ est un élément non trivial de Z dont la projection $\bar{\gamma}$ dans \bar{Z} appartient à \bar{Z}_0 , il existe un entier $p(\gamma)$ tel que:

$$\gamma x_0 = \tau_0^{p(\gamma)} x_0$$

D'où:

$$\gamma^k h^{-p(\gamma)} x_0 = x_0$$

Remarquons que γ^k est différent de $h^{p(\gamma)}$. En effet, $\bar{\gamma}$ serait sinon un homéomorphisme d'ordre fini admettant un point fixe. Il serait donc trivial, ce qu'on a supposé ne pas être.

On en déduit:

- Le Z -groupe d'isotropie de x_0 n'est pas trivial: on note γ_0 un de ses générateurs.
- Il existe un entier $q(\gamma)$ non-nul tel que $\gamma^k = h^{p(\gamma)} \gamma_0^{q(\gamma)}$.

On en déduit que $\bar{\gamma}^k$ est de type hyperbolique sur S_0 . Il en est donc de même pour $\bar{\gamma}$. De plus, si on note \bar{y}_0 le deuxième point fixe de $\bar{\gamma}_0$, le groupe d'isotropie \bar{Z}_0 est aussi le groupe d'isotropie de \bar{y}_0 . L'action de \bar{Z}_0 sur chaque composante connexe de $S_0 \setminus \{\bar{x}_0, \bar{y}_0\}$ est libre. Le groupe \bar{Z}_0 est donc isomorphe à un sous-groupe de \mathbb{R} . Comme chacun de ses éléments élevé à la puissance k appartient au même groupe cyclique (celui engendré par $\bar{\gamma}_0$) c'est un groupe cyclique. ■

Lemme 3.20 Soit (\bar{x}, \bar{y}) les points fixes d'un élément de \bar{Z} . L'orbite de (\bar{x}, \bar{y}) par Z est un fermé discret de $S_0 \times S_0$ privé de la diagonale.

Preuve Supposons l'existence de deux éléments distincts \bar{a} et \bar{b} de S_0 et d'une suite $\bar{\gamma}_n$ de \bar{Z} tels que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{\gamma}_n(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{a}, \bar{b})$$

Notons x et y des relevés de \bar{x} et \bar{y} dans Q^s . Nous les choisissons de sorte que le couple $(x, \alpha(y))$ appartienne à l'ouvert $Q^\Phi \subset Q^s \times Q^u$. Il est alors possible de choisir des représentants γ_n des $\bar{\gamma}_n$ de sorte que les suites $(\gamma_n x)$ et $(\gamma_n y)$ convergent. Notons a et b leurs limites: il s'agit de relevés de \bar{a} et de \bar{b} . Ils sont donc différents. De plus, vu notre choix de x et de y , le couple $(a, \alpha(b))$, qui est la limite des $\gamma_n(x, \alpha(y))$, appartient à Q^Φ .

Ce qui précède s'interprète alors de la manière suivante: l'orbite du flot Φ^t représentée par $(x, \alpha(y))$ admet dans son adhérence l'orbite représentée par $(a, \alpha(b))$. Or, la première est une orbite périodique, donc propre. Il s'en suit que la suite $\gamma_n(x, \alpha(y))$ est stationnaire à partir d'un certain rang. ■

D'après les lemmes 3.16, 3.3, 3.19 et 3.20 les hypothèses du théorème 2.6 sont toutes satisfaites. La conjugaison topologique obtenue grâce à ce théorème se relève en une conjugaison f_s entre l'action de Z sur Q^s et une action projective sur \bar{P}^1 définie par un plongement discret ρ de Z dans $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$. Ceci montre:

Proposition 3.21 Les actions de Z sur Q^s et Q^u sont projectives. ■

Remarque 3.22 Le sous-groupe $\rho(Z)$ est toujours discret, mais il n'est cocompact que si S est M tout entier (et donc, en particulier, que si M est un fibré de Seifert). En effet comme le revêtement universel \widetilde{M} est homéomorphe à \mathbb{R}^3 , le revêtement \widehat{M} associé à Z est un $K(Z, 1)$. Or, $\rho(Z) \backslash \widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ est lui aussi un $K(Z, 1)$. Donc, si $\rho(Z)$ est cocompact, \widehat{M} est compact, ce qui entraîne comme nous l'avons affirmé que le morceau S est M tout entier. Cependant, dans le cas général, comme tout élément de Z admettant dans Q^s un point fixe est de type hyperbolique, l'image $\rho(Z)$ ne contient aucun élément parabolique.

3.3 Fin de la preuve du théorème A

Soient \widehat{G}^s et \widehat{G}^u les relevés dans \widehat{M} de \mathcal{F}^s et de \mathcal{F}^u . Soient \widehat{G}^s et \widehat{G}^u leurs restrictions à \widehat{S} . D'après la proposition 3.21 ces deux feuilletages sont transversalement projectifs. Soient \widetilde{G}^s et \widetilde{G}^u les relevés dans \widetilde{S} de \widehat{G}^s et de \widehat{G}^u . Les feuilles de $\widetilde{G}^s \cap \widetilde{G}^u$ sont les fibres de la restriction à \widetilde{S} de π^Φ . Rappelons que ΩS est le complémentaire dans Q^Φ des $\Delta(\bar{\theta})$, où $\bar{\theta}$ décrit l'ensemble des feuilles de $\bar{\Phi}$ tangentes à $\partial \widetilde{S}$: la restriction à \widetilde{S} de π^Φ est une fibration (localement) triviale d'image ΩS . De plus, elle envoie \widetilde{G}^s et \widetilde{G}^u sur les restrictions à $\Omega S \subset Q^s \times Q^u$ des feuilletages verticaux et horizontaux.

Soit $\varphi : Q^\Phi \rightarrow \bar{P}^1 \times \bar{P}^1$ l'application définie par:

$$\varphi(s, u) = (f_s(s), f_s(\alpha^{-1}(u)))$$

Elle envoie homéomorphiquement Q^Φ sur l'ouvert Ω' de $\bar{P}^1 \times \bar{P}^1$ compris entre les graphes de l'identité et de $\delta' = f_s \circ \tau_s \circ f_s^{-1}$. Elle envoie l'action de Z sur Ω sur la restriction à Ω' de son action diagonale sur $\bar{P}^1 \times \bar{P}^1$ via $\rho : Z \rightarrow \widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$. Rappelons que nous notons δ un des générateurs du centre de $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$. Quitte à inverser δ nous pouvons supposer que:

$$\delta \circ f_s = f_s \circ \tau_0$$

D'après la proposition 3.18 δ et δ' coïncident sur $f_s(\mu^s)$. Notons Ω_{can} l'ouvert de $\bar{P}^1 \times \bar{P}^1$ compris entre les graphes de l'identité et de δ . Les ouverts Ω' et Ω_{can} sont en général différents, mais nous pouvons estimer à quel point ils diffèrent: soit $(J_r =]s_1^r, s_2^r])_{r \in \mathcal{R}}$ la collection des composantes connexes de $Q^s \setminus \mu^s$.

Chaque couple $(s_1^r, \alpha(s_2^r))$ est un élément $\tilde{\theta}_r$ de Q^Φ correspondant à une orbite de $\tilde{\Phi}$ tangente à \tilde{S} . Soit (x_r, y_r) l'image par φ de $\tilde{\theta}_r$. On pose:

$$\begin{aligned} T_r &= \{(x, y) \in]x_r, y_r] \times \tilde{P}^1 / \delta(x_r) \leq y < \delta'(x)\} \setminus \{(y_r, \delta(x_r))\} \\ T_r^0 &= \{(x, y) \in]x_r, y_r] \times \tilde{P}^1 / \delta(x_r) \leq y < \delta(x)\} \setminus \{(y_r, \delta(x_r))\} \end{aligned}$$

Alors, T_r et T_r^0 sont des "triangles" contenus respectivement dans Ω' et Ω_{can} , et Ω' privé de T_r coïncide avec Ω_{can} privé de T_r^0 . Soit $[\rho(\gamma_r)z_r, z_r] \subset]x_r, y_r[$ un domaine fondamental de l'action de $\rho(\gamma_r)$ (rappelons que γ_r est un générateur du stabilisateur de $\tilde{\theta}_r$). Soit enfin u_r un élément de \tilde{P}^1 supérieur à z_r et inférieur à $\delta(z_r)$ et $\delta'(z_r)$. On montre aisément qu'il existe un homéomorphisme croissant η_r envoyant $[\rho(\gamma_r)z_r, z_r]$ sur $[\rho(\gamma_r)u_r, u_r]$ et dont le graphe est contenu dans $T_r \cap T_r^0$. On peut prolonger η_r sur tout I_r en lui imposant de vérifier:

$$\eta_r \circ \rho(\gamma_r) = \rho(\gamma_r) \circ \eta_r$$

Soit T_r' le triangle:

$$T_r' = \{(x, y) \in]x_r, y_r] \times \tilde{P}^1 / \delta(x_r) \leq y < \eta_r(x)\}$$

C'est un voisinage ouvert de (x_r, y_r) à la fois dans T_r et dans T_r^0 . De plus, T_r^0 , T_r et T_r' sont chacun préservé par l'action de $\rho(\gamma_r)$. Notons:

$$\begin{aligned} t_r &= \{(x, y) \in]\rho(\gamma_r)z_r, z_r] \times \tilde{P}^1 / \delta(x_r) \leq y < \delta'(x)\} \\ t_r^0 &= \{(x, y) \in]\rho(\gamma_r)z_r, z_r] \times \tilde{P}^1 / \delta(x_r) \leq y < \delta(x)\} \end{aligned}$$

Il existe un homéomorphisme $\Psi_r : t_r \rightarrow t_r^0$ tel que:

$$\begin{aligned} \Psi_r(\rho(\gamma_r)z_r, \rho(\gamma_r)y) &= \rho(\gamma_r)\Psi_r(z_r, y) \\ \Psi_r(x, y) &= (x, y) \text{ si } y < \eta_r(x) \end{aligned}$$

On prolonge ensuite Ψ_r sur tout T_r en lui imposant de commuter avec $\rho(\gamma_r)$. On obtient alors un homéomorphisme $\Psi_r : T_r \rightarrow T_r^0$ commutant avec $\rho(\gamma_r)$ et valant l'identité sur T_r' . On prolonge Ψ_r sur l'orbite de T_r par $\rho(Z)$ en lui imposant de commuter avec l'action de Z . On effectue cette construction pour chaque intervalle J_r . On obtient ainsi un homéomorphisme Ψ entre l'union des T_r et celle des T_r^0 commutant avec l'action de $\rho(Z)$. Comme Ψ vaut l'identité sur les triangles T_r' , il se prolonge continûment en un homéomorphisme entre Ω' et Ω_{can} : il suffit de lui imposer de valoir l'identité hors des T_r . En composant Ψ avec φ on obtient:

Proposition 3.23 *Il existe un homéomorphisme φ_0 entre Q^Φ et Ω_{can} envoyant l'action de Z sur Ω sur la restriction à Ω_{can} de l'action de Z sur $\tilde{P}^1 \times \tilde{P}^1$ via ρ . ■*

Comme Ψ vaut l'identité hors des T_r nous avons même:

Proposition 3.24 *La conjugaison topologique φ_0 envoie les restrictions à ΩS de \mathcal{G}^s et de \mathcal{G}^u sur les restrictions à $\varphi_0(\Omega S)$ des feuilletages verticaux et horizontaux. ■*

L'intérêt de cette identification est que l'action diagonale de $\rho(Z)$ sur Ω_{can} s'interprète naturellement comme étant l'action du groupe fondamental sur l'espace des orbites du flot géodésique $\Phi_{\rho(Z)}$ (cf. [3]). En d'autres termes, $\hat{\Phi}$ et $\Phi_{\rho(Z)}$ ont même espaces transverses. Il est bien connu que les propriétés transverses d'un feuilletage le caractérise fortement. Nous sommes ainsi en mesure de montrer:

Proposition 3.25 *Le feuilletage intermédiaire $\hat{\Phi}$ sur \hat{M} est topologiquement conjugué au feuilletage géodésique de $\rho(Z) \backslash \tilde{S}L(2, R)$. Cette conjugaison topologique peut être choisie de trace transverse φ_0 .*

Avant de commencer la preuve convenons de quelques définitions. Si (N_1, Φ_1) et (N_2, Φ_2) sont deux variétés feuilletées et $f : N_1 \rightarrow N_2$ une application continue envoyant les orbites de Φ_1 dans celles de Φ_2 nous appelons trace transverse de f toute application entre les quotients $\widetilde{N}_1/\widetilde{\Phi}_1$ et $\widetilde{N}_2/\widetilde{\Phi}_2$ induite par un relevé de f aux revêtements universels \widetilde{N}_1 et \widetilde{N}_2 . Rappelons quelques notations déjà convenues auparavant: $\widehat{T}_1, \dots, \widehat{T}_m$ sont les tores bordant \widehat{S} , et soient $(\widetilde{T}_a)_{a \in A}$ leurs relevés dans \widehat{M} . Pour tout indice a , soit H_a le sous-groupe de Z fixant \widetilde{T}_a . Soit \widehat{T}_a^- (respectivement \widehat{T}_i^-) la composante connexe de $\widehat{M} \setminus \widetilde{T}_a$ (respectivement $\widehat{M} \setminus \widehat{T}_i$) ne contenant pas \widehat{S} (respectivement \widehat{S}).

Lemme 3.26 *Pour chaque indice i il existe un voisinage ouvert U_i de $\widehat{T}_i^- \cup \widehat{T}_i$ dans \widehat{M} et une application $\widehat{\varphi}_i : U_i \rightarrow M_{\rho(Z)}$ qui est un homéomorphisme sur son image et envoie la restriction de $\widehat{\Phi}$ à $\widehat{\varphi}_i(U_i)$. De plus, chaque $\widehat{\varphi}_i$ admet pour trace transverse φ_0 , et les U_i peuvent être choisis deux-à-deux disjoints.*

Preuve Pour chaque indice a dans A soit \widehat{M}_{H_a} le revêtement de \widehat{M} associé à H_a . Le relevé $\widehat{\Phi}_a$ de $\widehat{\Phi}$ à \widehat{M}_{H_a} admet une description particulièrement simple: la variété \widehat{M}_{H_a} est homéomorphe au produit du tore par \mathbb{R} . Elle admet donc deux bouts. Le flot $\widehat{\Phi}_a$ n'admet qu'un nombre fini de feuilles compactes, et les autres feuilles sont toutes errantes. Ces feuilles errantes vont soit d'un bout à lui-même, soit d'un bout à l'autre, soit d'un bout à une feuille compacte. Cette même description vaut bien sûr aussi pour le flot géodésique sur $\rho(H_a) \setminus \widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$. On en déduit aisément l'existence d'une conjugaison topologique $\widehat{\varphi}_a$ entre $\widehat{\Phi}_a$ et le flot géodésique sur $\rho(H_a) \setminus \widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ dont la trace transverse soit φ_0 : comme indication, disons qu'on définit cette conjugaison sur des voisinages tubulaires des feuilles fermées; on étend cette conjugaison sur les saturés de ces voisinages tubulaires (ceci sans aucune difficulté puisque les saturés de voisinages suffisamment petits de deux feuilles fermées différentes sont disjoints); on prolonge enfin cette conjugaison sur tout \widehat{M}_{H_a} . Il ne nous semble pas utile de donner plus de détails.

Par ailleurs, la restriction de l'application de revêtement $\widehat{\pi}_a : \widehat{M}_{H_a} \rightarrow \widehat{M}$ à l'une des composantes connexes de \widehat{M}_{H_a} privé du tore \widetilde{T}_a/H_a est injective, l'image étant un \widehat{T}_i^- . L'indice i étant fixé, on choisit un indice a pour lequel \widetilde{T}_a est au-dessus de \widehat{T}_i . Il existe alors un voisinage ouvert U_i de \widehat{T}_i^- sur lequel $\widehat{\pi}_a$ admet une section σ_a . Ceci fournit l'ouvert U_i recherché, l'application $\widehat{\varphi}_i$ recherchée étant $\widehat{\varphi}_a \circ \sigma_a$. ■

Preuve de 3.25 Il ne nous reste qu'à prolonger les applications $\widehat{\varphi}_i$ définies au lemme précédent sur \widehat{S} , car les U_i recouvrent $\widehat{M} \setminus \widehat{S}$.

Soit τ_1, \dots, τ_k une collection finie de transversales à $\widehat{\Phi}$ contenues dans \widehat{S} et ϵ un réel positif tels que:

- la restriction de $\widehat{\Phi}^t$ à chaque $\tau_j \times]-\epsilon, +\epsilon[$ est un plongement d'image V_j contenue dans \widehat{S} ,
- l'union des V_j ($1 \leq j \leq k$) et des U_i ($1 \leq i \leq m$) recouvre \widehat{M} .

Soit w_1, \dots, w_{m+k} une partition de l'unité sur \widehat{M} telle que:

- pour chaque indice i entre 1 et m , le support de w_i est contenu dans U_i ,
- pour chaque indice j entre 1 et k , le support de w_{m+j} est contenu dans V_j .

Nous notons $(\widetilde{\tau}_b)_{b \in B}$ les relevés dans \widehat{M} des τ_i , $(\widetilde{U}_a)_{a \in A}$ ceux des U_i et $(\widetilde{V}_b)_{b \in B}$ ceux des V_j . Nous choisissons bien sûr les indices de telle sorte que chaque \widetilde{U}_a contient \widetilde{T}_a et que chaque \widetilde{V}_b contient $\widetilde{\tau}_b$. Enfin, pour chaque indice a , on note \widetilde{w}_a le relevé à \widetilde{U}_a d'un des w_i (le seul w_i pour lequel ceci a un sens), et pour chaque indice b , on note \widetilde{w}_b le relevé à \widetilde{V}_b d'un des w_{m+j} (là encore, il n'y a qu'un seul indice j pour lequel ceci a un sens).

Chaque $\widetilde{\tau}_b$ se projette dans Q^Φ en un ouvert que l'homéomorphisme φ_0 envoie en un ouvert de Ω_{can} au-dessus duquel la fibration $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \Omega_{can}$ admet une section. On choisit une telle section dont l'image est notée $\widetilde{\tau}'_b$. Nous faisons ce choix de sorte que la collection des $\widetilde{\tau}'_b$ soit $\rho(Z)$ -invariante. On

obtient aussi des homéomorphismes $\tilde{\varphi}_b : \tilde{\tau}_b \rightarrow \tilde{\tau}'_b$ de traces transverses $\varphi_0 : \pi^{\tilde{\Phi}}(\tilde{\tau}_b) \rightarrow \varphi_0(\pi^{\tilde{\Phi}}(\tilde{\tau}'_b))$. Pour chaque élément x d'un des \tilde{T}_a^- on pose $\tilde{\varphi}_0(x) = \tilde{\varphi}_a(x)$, $\tilde{\varphi}_a$ étant le relevé de $\hat{\varphi}_i$. Pour les éléments x de \tilde{S} , on considère les divers ouverts \tilde{V}_b le contenant. Pour chacun de ces ouverts \tilde{V}_b , il existe un unique élément x_b de $\tilde{\tau}_b$ et un unique réel t_b tels que:

$$x = \tilde{\Phi}^{t_b}(x_b)$$

On pose alors:

$$x'_b = \tilde{\Phi}_{geod}^{t_b}(\tilde{\varphi}_b(x_b))$$

Si de plus x appartient à un des \tilde{U}_a on pose:

$$x'_a = \tilde{\varphi}_a(x)$$

En résumé, à chaque indice a (respectivement b) tel que $\tilde{w}_a(x)$ (respectivement $\tilde{w}_b(x)$) est non-nul nous avons associé un élément de $\tilde{S}\tilde{L}(2, \mathbb{R})$. Ces divers points appartiennent tous à la même orbite du flot géodésique $\tilde{\Phi}_{geod}$. Celle-ci munie de son paramétrage est une droite affine: on peut donc prendre le barycentre de ces points x'_a et x'_b pondérés par les poids $\tilde{w}_a(x)$ et $\tilde{w}_b(x)$. Nous notons $\tilde{\varphi}_0(x)$ ce barycentre. Il est clair que $\tilde{\varphi}_0 : \tilde{M} \rightarrow \tilde{S}\tilde{L}(2, \mathbb{R})$ est continue, de trace transverse φ_0 et commute avec les actions de Z . De plus, elle envoie les orbites de $\tilde{\Phi}$ dans celles de $\tilde{\Phi}_{geod}$. Elle passe donc au quotient en une application $\hat{\varphi}_0 : \hat{M} \rightarrow M_{\rho(Z)}$ envoyant les orbites de $\hat{\Phi}$ dans celles de $\Phi_{\rho(Z)}$. Nous aurions achevé la preuve de la proposition si $\hat{\varphi}_0$ s'avérait bijective.

Remarquons que la restriction à $\hat{M} \setminus \hat{S}$ de $\hat{\varphi}_0$ est donnée par les $\hat{\varphi}_i$ et est donc un homéomorphisme sur son image. Comme c'est une équivalence d'homotopie, $\hat{\varphi}_0$ est donc surjective. Pour les définitions de $M_{\rho(Z)}$, de $S_{\rho(Z)}$ et de $\Phi_{\rho(Z)}$ nous renvoyons à la section 2.2. Notons S' le complémentaire dans $M_{\rho(Z)}$ de l'union des $\hat{\varphi}_i(\hat{T}_i^-)$. Ce qui précède signifie que $\hat{\varphi}_0$ envoie le complémentaire de \hat{S} sur celui de S' . Nous affirmons qu'on peut supposer en plus que $\hat{\varphi}_0$ envoie \hat{S} dans S' . En effet: soit x un élément de \hat{S} dont l'image par $\hat{\varphi}_0$ est hors de S' . Alors, il existe un élément x' de $\partial S'$ un réel positif $t(x)$ et un signe $\alpha = \pm 1$ tels que, pour tous les temps positifs t , le point $\Phi_{\rho(Z)}^{\alpha t}(x')$ est hors de S' , et tels que $\Phi_{\rho(Z)}^{\alpha t(x)}(x')$ soit égal à $\hat{\varphi}_0(x)$. On définit alors $\hat{\varphi}'_0(x)$ comme étant x' . On obtient ainsi une nouvelle application continue $\hat{\varphi}'_0$ satisfaisant les propriétés de $\hat{\varphi}_0$ décrites précédemment, et en outre envoyant \hat{S} dans S' . Là encore, il nous semble superflu de détailler davantage.

Si deux éléments de \hat{M} ont même image par $\hat{\varphi}_0$ ils sont nécessairement sur la même orbite de $\hat{\Phi}$. Il se peut cependant que $\hat{\varphi}_0$ ne soit pas injective. Pour achever la preuve nous allons modifier $\hat{\varphi}_0$ en poussant le long des orbites de $\Phi_{\rho(Z)}$, i.e. la remplacer par une application de la forme $\Phi_{\rho(Z)}^{v(x)}(\hat{\varphi}_0(x))$ où $v : \hat{M} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Nous allons pour ce faire appliquer comme dans [18] ou [3] l'idée suivante (dûe à M. Gromov [21]): soit $u : \mathbb{R} \times \hat{U} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \hat{M} \quad \hat{\varphi}_0(\hat{\Phi}^t(x)) = \Phi_{\rho(Z)}^{u(t,x)}(\hat{\varphi}_0(x))$$

Pour tout réel positif T , soit $u_T : \hat{M} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application moyenne:

$$\forall x \in \hat{M} \quad u_T(x) = \frac{1}{T} \int_0^T u(s, x) ds$$

On définit alors l'application $\hat{\varphi}_T : \hat{M} \rightarrow M_{\rho(Z)}$:

$$\hat{\varphi}_T(x) = \Phi_{\rho(Z)}^{u_T(x)}(\hat{\varphi}_0(x))$$

Nous avons:

$$\hat{\varphi}_T(\hat{\Phi}^t(x)) = \Phi_{\rho(Z)}^{v_T(t,x)}(\hat{\varphi}_T(x))$$

où v_T est définie comme étant:

$$v_T(t, x) = \frac{1}{T} \int_t^{T+t} u(s, x) ds$$

Donc:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} v_T(t, x) &= \frac{1}{T} [u(T+t, x) - u(t, x)] \\ &= \frac{1}{T} u(T, \widehat{\Phi}^t(x)) - u_T(x) \end{aligned}$$

En particulier la dérivée par rapport à t en 0 de $v_T(t, x)$ est de même signe que $u(T, x)$. Si celui-ci est non-nul, $\widehat{\varphi}_T$ est injective le long des feuilles de $\widehat{\Phi}$ au voisinage de x . Donc, si le réel T est tel que $u(T, x)$ ne s'annule en aucun élément x de \widehat{M} , $\widehat{\varphi}_T$ est injective.

Comme \widehat{S} est compact, on montre comme dans la preuve du lemme 3.5 de [3] qu'on peut pour le moins choisir le réel T de telle sorte que, pour tout élément x de \widehat{S} , si la portion d'orbite positive $\{\widehat{\Phi}^t(x)/0 \leq t \leq T\}$ est contenue dans \widehat{S} , alors $u(T, x)$ est non-nul.

On peut en résumer la preuve de la manière suivante: il existe dans \widehat{S} un autre point y proche de x , appartenant à la feuille stable forte $\widehat{F}^{ss}(x)$, et tel que tous les $\widehat{\Phi}^t(y)$ ($0 \leq t \leq T$) appartiennent eux-aussi à \widehat{S} . Comme les $\widehat{\Phi}^t(y)$ et les $\widehat{\Phi}^t(x)$ se rapprochent exponentiellement lorsque t devient proche de T , il en est de même pour les $\widehat{\varphi}_0(\widehat{\Phi}^t(y)) = \widehat{\Phi}_{\rho(z)}^{u(t,y)}(\widehat{\varphi}_0(y))$ et les $\widehat{\Phi}_{\rho(z)}^{u(t,x)}(\widehat{\varphi}_0(x))$. Ceci implique que, pour peu que y ait été choisi suffisamment éloigné de x , le réel $u(T, x)$ doit être suffisamment grand, et donc au moins non-nul. Que ce réel T puisse être choisi indépendamment de x provient de la compacité de \widehat{S} .

Par ailleurs, si la portion d'orbite positive $\{\widehat{\Phi}^t(x)/0 \leq t \leq T\}$ sort de \widehat{S} , $u(T, x)$ doit là encore être non-nul car $\widehat{\varphi}_0$ est injective hors de \widehat{S} . En définitive, il existe un réel positif T tel que $u(T, x)$ est non-nul pour chaque élément x de \widehat{S} . Toujours parce que $\widehat{\varphi}_0$ est injective hors de \widehat{S} , cette propriété s'étend sur tout \widehat{M} : $\widehat{\varphi}_T$ est donc injective. ■

Soit i l'immersion de S dans M dont la restriction à l'intérieur de S est un plongement. Les restrictions à $i(S)$ de \mathcal{F}^s et de \mathcal{F}^u se tirent en arrière en un bifeuilletage (G^s, G^u) de S . Comme Z est exactement le sous-groupe $i_* \pi_1(S, x_0)$ de Γ , i se relève en un plongement $\widehat{i}: S \hookrightarrow \widehat{M}$. Vu notre choix de i , qui est tel que les composantes de $i(\partial S)$ soient quasi-transverses à Φ^t l'image de \widehat{i} est exactement \widehat{S} . Le plongement \widehat{i} est donc une conjugaison topologique entre (S, G^s, G^u) et $(\widehat{S}, \widehat{G}^s, \widehat{G}^u)$.

\widehat{S} privé de sa partie tangente, i.e. des quelques orbites périodiques de $\widehat{\Phi}$ tangentes à $\partial \widehat{S}$, est envoyée par $\widehat{\varphi}_0$ en une partie de $M_{\rho(Z)}$ qui est clairement homotope le long des orbites de $\Phi_{\rho(Z)}$ à $S_{\rho(Z)}$ privé de sa partie tangente. Il convient de noter que cette homotopie le long du flot ne peut être en général prolongée aux parties tangentes!

Il découle de la proposition 3.24 que la conjugaison topologique ainsi établie entre S privé de sa partie tangente et $S_{\rho(Z)}$ privé de sa partie tangente préserve les bifeuilletages. Le théorème A est donc démontré.

4 Preuve du théorème B

Dans toute cette section, Φ^t désigne un flot d'Anosov sur une VGPC M . Nous appelons $T = T_1 \cup \dots \cup T_n$ une collection finie de tores plongés dans M de manière incompressible et deux-à-deux disjoints le long desquels M se découpe en un nombre fini de fibrés de Seifert compacts à bord S_1, \dots, S_k . Ce sont des fibrés principaux. Mettant à part le cas où M est un fibré de Seifert principal (cf théorème 4.9), nous supposons ici que le nombre n de tores est non-nul. Si T est choisie minimale, cette décomposition est unique à isotopie près. D'après la section 2.3, le groupe fondamental Γ de M s'exprime comme un produit des $\pi_1(S_i, x_i)$ amalgamé par les $\pi_1(T_j, y_j)$, où les x_i et les y_j sont des points bases choisis arbitrairement. Nous fixons x_1 comme point base de M . De manière plus précise, $\Gamma = \pi_1(M, x_1)$ est isomorphe au groupe fondamental d'un graphe de groupes \mathcal{G}_M^0 . Pour chaque couple d'indices (i, j) où T_j est un tore contenu dans ∂S_i il a été choisi un chemin c_{ij} reliant x_i à y_j : ceci permet de définir un plongement $f_j^i: \pi_1(T_j, y_j) \hookrightarrow \pi_1(S_i, x_i)$. De même, le choix d'un sous-arbre maximal \mathcal{T} de \mathcal{G}_M^0 permet

de définir de manière unique des plongements $f_T^i : \pi_1(S_i, x_i) \hookrightarrow \Gamma$ et $f_T^j : \pi_1(T_j, y_j) \hookrightarrow \Gamma$. Les images de ces plongements sont notés respectivement Z_i et H_j . Nous notons h_i l'élément de Z_i correspondant aux fibres régulières de S_i : il engendre le centre de Z_i . Enfin, si S_i et $S_{i'}$ sont deux morceaux sommets d'une même arête du sous-arbre T , les fibres h_i et $h_{i'}$ commutent.

4.1 Sur l'hypothèse produit

Le but de cette section est de montrer l'équivalence entre les assertions 1 et 2 apparaissant dans l'énoncé du théorème B. Pour mener à bien ce projet nous devons établir quelques propriétés générales des 1-variétés fermées connexes, simplement connexes et orientées, ainsi que de leurs homéomorphismes. Pour tout couple d'éléments (s, s') de Q^s nous notons $]s, s'[$ l'ensemble des éléments de Q^s qui déconnectent s de s' . Si il existe une immersion de \mathbb{R} dans Q^s dont l'image contient s et s' , alors $]s, s'[$ est contenu dans l'image de cette immersion. De manière plus précise, $]s, s'[$ est l'intervalle ouvert délimité par s et s' dans l'image de cette immersion. s et s' sont alors dits comparables. Nous notons $[s, s']$ l'union de $]s, s'[$ et de $\{s, s'\}$. Lorsque s et s' sont non-séparés, c'est-à-dire lorsque tout voisinage de l'un rencontre tout voisinage de l'autre, nous notons $s \approx s'$. Nous laissons au lecteur le soin de montrer (voir aussi [2]):

Lemme 4.1 *Pour toute paire d'éléments (s, s') de Q^s l'ensemble $[s, s']$ est une union finie d'intervalles $[s_i, s'_i]$ ($i = 1, \dots, n$) où:*

$$\begin{aligned} s_1 = s \quad , \quad s'_n = s' \\ s'_i \approx s_{i+1} \end{aligned}$$

■

On peut donc définir sur Q^s la pseudodistance:

$$d(s, s') = n - 1$$

où n est le nombre d'intervalles composantes connexes de $[s, s']$. On vérifie aisément que si s' déconnecte s de s'' alors:

$$d(s, s'') = d(s, s') + d(s', s'')$$

De plus, tout homéomorphisme de Q^s est une d -isométrie. Remarquons que $d(s, s')$ peut s'interpréter de la manière suivante: c'est le nombre minimal de points de tangence avec \mathcal{G}^s d'un chemin reliant dans Q^s un point de s à un point de s' . Le lemme suivant interviendra fréquemment dans notre étude:

Lemme 4.2 *Soit γ un élément de Γ préservant l'orientation de Q^s et sans point fixe. On suppose qu'il existe un intervalle ouvert I_0 de Q^s préservé par γ . Alors, cet intervalle est unique, i.e., il n'existe pas d'autre intervalle ouvert γ -invariant.*

Preuve Soit I un autre intervalle ouvert γ -invariant. S'il est disjoint de I_0 , comme I et I_0 sont connexes, il existe un unique élément s de ∂I_0 déconnectant I et I_0 . $\gamma(s)$ vérifie alors la même propriété et doit donc être égal à s : contradiction. Donc, $J = I \cap I_0$ est non-vide. Comme Q^s est simplement connexe, J est un sous-intervalle ouvert de I_0 préservé par γ . Ses extrémités dans I_0 , si elles existent, sont des points fixes de γ . Donc, J et I_0 sont confondus. De même, $J = I$. Donc, I et I_0 sont confondus. ■

Un homéomorphisme $f : Q^s \rightarrow Q^s$ est dit *séparant les points de Q^s* s'il préserve l'orientation de Q^s et que tout élément s de Q^s est séparé de son image $f(s)$ par la topologie de Q^s . Un homéomorphisme séparant les points est en beaucoup de points semblable à un automorphisme d'un arbre simplicial agissant librement. Par exemple, il admet l'analogue d'un "axe de translation": L'*axe fondamental* d'un homéomorphisme f de Q^s séparant les points est l'ensemble des éléments s de Q^s pour lesquels $d(s, f(s))$ est pair. Il est noté $\mathcal{A}(f)$. On préférera sans doute une des définitions provenant de la proposition suivante:

Proposition 4.3 *Un élément s de Q^s appartient à $\mathcal{A}(f)$ si et seulement si il vérifie une des trois conditions suivantes:*

1. *Pour une orientation de Q^s convenable $f(s)$ appartient à s_+ et s appartient à $f(s)_-$*
2. *L'intersection de $[s, f(s)]$ avec son image $[f(s), f^2(s)]$ est réduite à $f(s)$.*
3. *L'image $f(s)$ déconnecte s et $f^2(s)$.*

Preuve Élémentaire. ■

Proposition 4.4 *L'axe fondamental de f n'est pas vide.*

Preuve Soit I un intervalle ouvert de Q^s . Supposons l'existence d'un entier n non nul pour lequel $f^n I$ rencontre I . Soit y un élément de cette intersection: $f^n y$ appartient à $f^n I$ et est donc comparable à y . Remarquons que comme f agit librement sur Q^s d'après la proposition 3.8 de [4] f^n n'admet pas non plus de point fixe. y est donc différent de $f^n y$. On en déduit que l'union J des itérés $f^{pn}[y, f^n y]$ est un intervalle ouvert f^n -invariant. Comme fJ est lui-aussi f^n -invariant, nous avons $fJ = J$ d'après le lemme 4.2. Donc, y est comparable à fy , et appartient donc à $\mathcal{A}(f)$.

Nous pouvons donc nous restreindre au cas où tous les intervalles ouverts de Q^s sont disjoints de leurs itérés par les f^n . Le quotient Q^s_f est alors une 1-variété, qui n'est pas simplement connexe puisqu'elle admet un revêtement non trivial. Il existe donc un élément \bar{s}_0 de ce quotient qui ne le déconnecte pas. N'importe quel relevé de \bar{s}_0 dans Q^s appartient alors à $\mathcal{A}(f)$. ■

Proposition 4.5 *Pour tout élément s de $\mathcal{A}(f)$, la réunion des itérés $[f^n(s), f^{n+1}(s)]$ quand n décrit \mathbb{Z} est $\mathcal{A}(f)$ tout entier.*

Preuve Pour tout élément s de $\mathcal{A}(f)$, notons I_s la réunion des $[f^n s, f^{n+1} s]$ où n décrit \mathbb{Z} . Soit s' un élément de $]s, f(s)[$. D'après le point 2 de 4.3 son image $f(s')$ ne déconnecte pas s et $f(s)$. Par contre, elle déconnecte $f(s)$ et $f^2(s)$. Elle déconnecte donc s et s' de $f^2(s)$. D'où:

$$d(s, f^2(s)) = d(s, s') + d(s', f(s')) + d(f(s'), f^2(s))$$

Donc:

$$\begin{aligned} d(s, f(s)) + d(f(s), f^2(s)) &= d(s, s') + d(s', f(s')) + d(s', f(s)) \\ 2d(s, f(s)) &= d(s, f(s)) + d(s', f(s')) \\ d(s, f(s)) &= d(s', f(s')) \end{aligned}$$

Ce qui montre que s' appartient à $\mathcal{A}(f)$. Celui-ci étant f -invariant, on en déduit qu'il contient I_s .

Inversement, soit s' un élément de $\mathcal{A}(f)$. Supposons par l'absurde qu'il n'appartient pas à I_s . D'après le point 1 de 4.3, pour une orientation convenable de Q^s , et quitte à remplacer f par son inverse:

$$s \in (s')_+ \quad f(s') \in (s')_+ \quad s' \in f(s')_-$$

Il en découle:

$$f(s) \in f(s')_+$$

Comme $f(s')$ est supposé ne pas déconnecter s et $f(s)$:

$$s \in f(s')_+$$

Par conséquent, $f(s')$ déconnecte s de s' . En itérant ce procédé, on montre que pour tout entier positif n $f^n(s')$ appartient à $[s, s']$. Comme ce dernier est compact, et que la suite des $f^n(s')$ vérifie une propriété

de croissance (à savoir: si p est supérieur à q , alors $f^p(s')$ appartient à $[s, f^q(s')]$) on en déduit que cette suite admet une limite \bar{s} . Cette limite serait un point presque fixe de f , i.e:

$$f(\bar{s}) \approx \bar{s}$$

Ceci est absurde puisque f sépare les points de Q^s ■

Montrons $1 \implies 2$ dans le théorème B. L'hypothèse 1 du théorème B signifie que pour chaque indice i le générateur h_i du centre de $Z_i \subset \Gamma$ n'admet pas de point fixe dans Q^Φ . D'après la proposition 3.8 de [4], il en découle qu'aucune puissance non triviale de h n'admet de point fixe dans Q^Φ . Les trois lemmes suivants constituent le point de départ de ce travail. Pour simplifier les notations nous omettons les indices i de h_i et de Z_i .

Lemme 4.6 *Chaque fibre h préserve l'orientation de Q^s . Il existe un intervalle ouvert I^s de Q^s préservé par h .*

Preuve Etudions h^2 : il préserve l'orientation de Q^s . Nous distinguons deux cas:

- *Premier cas: h^2 admet un point presque fixe.* Alors, près de ce point presque fixe, il existe un point s_0 comparable à son image $h^2 s_0$, i.e., tel que $]s_0, h^2 s_0[$ est un intervalle ouvert. Alors, l'union des $[h^{2n} s_0, h^{2n+2} s_0]$ est un intervalle ouvert I_0 préservé par h^2 . L'intervalle $h I_0$ est lui-aussi préservé par h^2 . D'après le lemme 4.2 nous avons donc $h I_0 = I_0$. Comme h n'admet pas de point fixe, on en déduit également que h préserve l'orientation de I_0 , donc de Q^s .
- *Deuxième cas: h^2 sépare les points de Q^s .* Soit $\mathcal{A} = \mathcal{A}(h^2)$ son axe fondamental. Soit s_0 un élément de \mathcal{A} . D'après la proposition 4.5 \mathcal{A} est l'union des $[h^{2n}(s_0), h^{2n+2}(s_0)]$. Supposons que \mathcal{A} n'est pas connexe, i.e., que s_0 et $h^2 s_0$ ne sont pas comparables. Alors, \mathcal{A} est une union d'intervalles fermés $[s_i, s'_i]$ tels que:

$$\begin{aligned} s'_i &\approx s_{i+1} \\ h^2 s_i &= s_{i+p} \end{aligned}$$

où p est un entier pair non-nul. Par ailleurs, chaque élément γ de Z commute avec h^2 et préserve donc \mathcal{A} . Il permute donc les indices i . Cette permutation préserve ou inverse l'ordre des indices: elle est donc de la forme $i \mapsto \epsilon(\gamma).i + t(\gamma)$, où $\epsilon(\gamma)$ vaut ± 1 et où $t(\gamma)$ est un entier. Si $\epsilon(\gamma)$ vaut -1 , alors γ fixe un et un seul intervalle $[s_i, s'_i]$. Comme h^2 commute avec γ , l'intervalle $h^2[s_i, s'_i]$ est lui-aussi fixé par γ . Il s'en suit que h^2 doit fixer l'intervalle $[s_i, s'_i]$, et donc également ses extrémités. Ceci est absurde. Donc, tous les $\epsilon(\gamma)$ valent $+1$. L'application $t : Z \rightarrow \mathbb{Z}$ est donc un morphisme. Son noyau est le stabilisateur des s_i : il est donc trivial ou cyclique. On en déduit que Z est soit cyclique, soit isomorphe à $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, soit isomorphe à l'extension double non-triviale de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Ceci contredit la proposition 2.3. Donc, \mathcal{A} est connexe, i.e., chaque élément de \mathcal{A} est comparable à son image par h^2 . On conclut alors comme lors du premier cas. ■

Lemme 4.7 *L'intervalle I^s est Z -invariant.*

Preuve Pour tout élément γ de Z , γI^s est un intervalle ouvert h -invariant. Il est donc égal à I^s d'après le lemme 4.2. ■

Lemme 4.8 *Chaque élément de Z préserve l'orientation de Q^s .*

Preuve La preuve est identique à celle du lemme 3.2. ■

Il existe donc pour chaque indice i un unique intervalle ouvert I_i h_i -invariant. Si S_i et $S_{i'}$ sont deux morceaux adjacents admettant en commun un tore T_j appartenant au sous-arbre \mathcal{T} , les fibres h_i et $h_{i'}$ commutent. Il s'en suit alors que I_i et $I_{i'}$ sont confondus. Par connexité de \mathcal{T} , on en déduit que tous les I_i sont confondus. Nous notons I cet intervalle commun préservé par les h_i . Soit $\Gamma_{\mathcal{T}}$ le sous-groupe de Γ engendré par les Z_i : comme chaque sous-groupe Z_i préserve I_i , $\Gamma_{\mathcal{T}}$ préserve I .

D'après le théorème 2.4 Γ s'identifie à un sous-groupe du quotient $G(\mathcal{G}_M^0)$ du produit libre

$$(*_{i \in S} \pi_1(S_i, x_i)) * (*_{\alpha \in A} L(t_\alpha))$$

par les relations:

$$\begin{aligned} t_{\bar{\alpha}} &= t_\alpha^{-1} \\ f_{\bar{\alpha}}(g) &= t_\alpha f_\alpha(g) t_\alpha^{-1} \end{aligned}$$

où chaque α est une arête de \mathcal{G}_M^0 . Soit S_i un morceau. Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ l'unique géodésique de \mathcal{T} reliant S_1 à S_i . Via cette identification, le sous-groupe Z_i de Γ correspond aux projections des $[t_{\alpha_1}] \dots [t_{\alpha_k}] [c] [t_{\alpha_k}]^{-1} \dots [t_{\alpha_1}]^{-1}$ où $[c]$ décrit $\pi_1(S_i, x_i)$. Soit $\alpha = (i, i')$ une arête de \mathcal{G}_M^0 . Soit $(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_l)$ la géodésique de \mathcal{T} reliant S_1 à $S_{i'}$. Soit enfin γ_α l'élément de Γ correspondant à $[t_{\alpha'_1}] \dots [t_{\alpha'_l}] [t_\alpha] [t_{\alpha_k}]^{-1} \dots [t_{\alpha_1}]^{-1}$. Vu la description précédente, il est clair que $\gamma_\alpha h_i \gamma_\alpha^{-1}$ est un élément de Γ appartenant à $Z_{i'}$. Il préserve donc I , ce qui montre que h_i préserve $\gamma_\alpha I$. On en déduit que γ_α préserve I . Comme l'union des γ_α et de $\Gamma_{\mathcal{T}}$ engendrent Γ , on en déduit que Γ tout entier préserve I . Soit U l'ouvert $(p^s \circ \pi^\Phi)^{-1}(I)$ de \widetilde{M} . C'est un ouvert Γ -invariant homéomorphe à \mathbb{R}^3 . Le quotient de U par l'action de Γ est un $K(\Gamma, 1)$ tout comme M . Il est donc en particulier compact. Par ailleurs, il s'identifie à l'ouvert $\pi(U)$ de M . Par connexité de M , on en déduit que U est \widetilde{M} tout entier, et donc que Φ^t est produit.

La réciproque est beaucoup plus facile: si le flot Φ^t est produit, aucun des h_i ne peut admettre de point fixe. En effet, l'ensemble de ces points fixes serait sinon un fermé discret de $Q^s \simeq \mathbb{R}$ Z_i -invariant. Un argument analogue à celui utilisé au deuxième cas de la preuve du lemme 4.6 montre que Z_i serait alors isomorphe à un indice 2 près à \mathbb{Z} ou $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, ce qui est absurde.

4.2 Flots d'Anosov sur les 3-variétés à centre non-trivial

Dans ce paragraphe nous exploitons les résultats précédents pour montrer la généralisation suivante du théorème de E. Ghys cité lors de l'introduction:

Théorème 4.9 *Tout flot d'Anosov sur une 3-variété dont le groupe fondamental est à centre non-trivial est topologiquement équivalent à un revêtement fini d'un flot géodésique.*

Une méthode possible pour montrer ce théorème est la suivante: d'après le théorème 1.1 de [11] (voir aussi [34, 28, 17]), une variété vérifiant les hypothèses de ce théorème est nécessairement un fibré de Seifert principal. On peut alors adapter la preuve de [18] assez aisément.

Nous allons exposer ici une preuve différente utilisant essentiellement les résultats précédents de cet article. Plus précisément, notre preuve consiste à reprendre les arguments de la preuve du théorème A, qui dans ce cas de figure se simplifient considérablement. Soit donc Φ^t sur une variété M dont le groupe fondamental Γ est à centre non-trivial. Soit h un élément non-trivial du centre de Γ préservant les orientations de Q^s et Q^u .

Lemme 4.10 *h agit sur l'espace des feuilles Q^s en séparant les points.*

Preuve Il s'agit d'un des résultats de [18]: soit X l'ensemble des points de Q^s non séparés de leurs images par h . Comme l'ensemble des points fixes de h et l'ensemble des points de branchements de Q^s

sont tous les deux dénombrables, X est un fermé dénombrable de Q^s . Comme h appartient au centre de Γ , ce fermé est de plus Γ -invariant. Il correspond donc à un fermé de M saturé par \mathcal{F}^s transversalement dénombrable. Comme M est compacte, ce fermé, *s'il est non-vide*, contient un fermé minimal invariant qui est lui aussi "transversalement dénombrable". Il est donc d'intérieur vide, et aucune transversale ne le coupe selon un fermé localement homéomorphe à un Cantor. Ce fermé est donc une feuille compacte de \mathcal{F}^s , ce qui est absurde. X est donc vide. ■

La preuve du lemme 4.6 s'applique ici pour montrer que l'axe fondamental de h est un intervalle ouvert I^s de Q^s . Cet intervalle est Γ -invariant. Soit V la préimage par p^s de I^s : c'est un ouvert de \widetilde{M} homéomorphe à \mathbb{R}^3 et Γ invariant. Sa projection dans M est donc un ouvert \bar{V} , qui est un $K(\Gamma, 1)$. Or, M est lui-aussi un $K(\Gamma, 1)$ tout en étant compact. Donc, \bar{V} est un ouvert compact de M , donc est tout M . En d'autres termes, I^s est Q^s tout entier, i.e.:

Lemme 4.11 *Le flot Φ^t est produit.* ■

On montre comme pour le lemme 4.8 que Γ préserve l'orientation de Q^s . Le lemme 3.17 est ici superflu: en effet, comme Φ^t est produit, il est topologiquement transitif, et le minimal μ^s est donc Q^s tout entier. L'égalité $h = \tau_s^k$ est donc déjà valable sur tout Q^s . La preuve de 3.21 s'applique ici pour montrer que l'action de Γ sur Q^s est projective. Le feuilletage \mathcal{F}^s est donc transversalement projectif. D'après [3], il s'en suit que (M, Φ^t) est revêtement fini d'un flot géodésique.

4.3 Caractérisation des exemples de Handel-Thurston

Nous achevons ici la preuve du théorème B. Remarquons que l'implication $2 \implies 3$ est un corollaire du théorème A.

Montrons la réciproque, à savoir que tous les exemples de Handel-Thurston généralisés sont produits. Nous raisonnons pour ce faire par l'absurde, supposant l'existence d'un exemple de Handel-Thurston généralisé admettant une orbite périodique librement homotope à une fibre h d'un des morceaux S de la décomposition torique de la variété ambiante M . Soit T un des tores bordant S (Notons qu'il en existe puisque d'après le théorème 4.9 S n'est pas M tout entier). Il est clair d'après la description des exemples de Handel-Thurston généralisés que T est quasi-transverse au flot. Par ailleurs, T contient une orbite périodique du flot non homologue dans T aux représentants de h dans T . D'après le théorème B de [4] il s'en suit que T est homotope à un tore transverse au flot. Or, toujours selon [4], un tore quasi-transverse au flot ne peut être homotope à un tore transverse: contradiction.

Le théorème B est donc démontré. Nous achevons cette section en montrant une affirmation faite précédemment, à savoir que si les morceaux d'un exemple de Handel-Thurston généralisé ont tous le même indice, et que le feuilletage faible stable de cet exemple est transversalement orienté, alors c'est un exemple de Handel-Thurston au sens de [23]. La raison en est fort simple: soit n l'indice commun de tous les morceaux. Soit T un tore bordant un des morceaux: il est adjacent à deux morceaux S et S' . Soit h et h' les fibres de S et S' , et $2k$ le nombre d'orbites périodiques du flot contenues dans T . On vérifie aisément que le nombre d'intersection entre h et chacune de ces orbites périodiques est le rapport $\frac{n}{k}$, et est donc égale au nombre d'intersection entre h' et chaque orbite périodique contenue dans T . Il s'en suit qu'après une chirurgie de Dehn convenable le long d'une de ces orbites périodiques on peut supposer que $h^{\pm 1}$ et h' sont homotopes dans M . En effectuant des chirurgies de Dehn de ce type pour chaque tore, on est ramené au cas où la variété ambiante est un fibré en cercle et dont le groupe fondamental Γ est donc à pseudocentre non-trivial. D'après ce qui précède le flot d'Anosov sur cette nouvelle variété est produit, et le feuilletage faible stable a été supposé transversalement orienté: le groupe Γ agit donc sur \mathbb{R} par homéomorphismes préservant l'orientation. Soit h un générateur du pseudocentre de Γ : il agit librement sur Q^s . On en déduit qu'il ne peut satisfaire une relation du type $tht^{-1} = h^{-1}$: le pseudocentre est donc exactement le centre de Γ . D'après le théorème 4.9 le flot est un revêtement d'indice fini d'un flot géodésique. Le flot initial était donc un exemple de Handel-Thurston au sens de [24].

5 Etude d'un exemple

Le but de cette section est de démontrer le théorème C, i.e. de donner des exemples de VGPC n'admettant pas de flots d'Anosov et d'autres exemples de VGPC n'admettant pour flots d'Anosov que des exemples de Handel-Thurston.

Ces exemples sont construits en recollant deux copies S_1 et S_2 de $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \Sigma_0$ où Σ_0 est le tore troué une fois. Nous ne retenons que les recollements pour lesquelles la variété obtenue est orientable. Ces recollements sont définis à isotopie près par l'application $H_1(T_1) \rightarrow H_1(T_2)$ qu'elle induit, où T_i est le bord de S_i ($i = 1, 2$). Si on oriente T_i comme bord de S_i , ce qui oriente les $H_1(T_i)$, l'application précédente doit renverser les orientations pour que le recollé soit orientable.

Chaque $H_1(T_i)$ est naturellement muni d'une base définie au signe près: soit s_i un des deux éléments de $H_1(T_i)$ engendrant le noyau de $H_1(T_i) \rightarrow H_1(S_i)$, et h_i l'unique élément de $H_1(T_i)$ tel que la base (h_i, s_i) soit directe et dont l'image par $H_1(T_i) \simeq \pi_1(T_i) \rightarrow \pi_1(S_i)$ soit la fibre de S_i . Une fois de telles bases choisies, toute matrice A à coefficients entiers et de déterminant -1 définit une variété M_A : celle obtenue par un recollement dont l'application induite $H_1(T_1) \rightarrow H_1(T_2)$ est donnée par A dans les bases (h_i, s_i) .

Nous notons

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

les coefficients de A .

Nous notons Z_1 et Z_2 les groupes fondamentaux de S_1 et S_2 . Ils se plongent dans le groupe fondamental Γ_A de M_A . Nous les identifions abusivement avec leurs images par ces plongements. Leur intersection dans Γ_A est le sous-groupe libre abélien de rang deux H engendré par s_1 et h_1 . C'est aussi le sous-groupe engendré par s_2 et h_2 . Il correspond au groupe fondamental du tore T_A plongé dans M_A correspondant à T_1 et T_2 . Nous noterons parfois de manière abusive $T_1 = T_A = T_2$.

Il est clair que M_A est un fibré en cercle si et seulement si $(\alpha, \gamma) = (\pm 1, 0)$. Il est tout aussi clair que deux matrices A et A^{-1} inverses l'une de l'autre définissent deux VGPC difféomorphes: le difféomorphisme consiste à envoyer la copie de S_i dans M_A sur celle de S_{2-i} dans $M_{A^{-1}}$.

De même, comme le choix des bases (h_i, s_i) est au signe près, deux matrices opposées A et $-A$ définissent deux VGPC difféomorphes. Enfin, pour chaque indice i , comme S_i est difféomorphe à $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \Sigma_0$, on peut définir un difféomorphisme $\Phi_i : S_i \rightarrow S_i$ par:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \Sigma_0 &\rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \Sigma_0 \\ ([x], m) &\mapsto ([-x], m) \end{aligned}$$

Le difféomorphisme $\Phi_1 \cup \Phi_2$ sur $S_1 \cup S_2$ passe aux quotients en un difféomorphisme entre M_A et $M_{\hat{A}}$ où \hat{A} est la matrice:

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ -\gamma & \delta \end{pmatrix}$$

Inversement: soit $\varphi : M_A \rightarrow M_{A'}$ un difféomorphisme entre deux de ces VGPC. On suppose que ces VGPC ne fibrent pas en cercles. D'après les travaux de Waldhausen ([38], (8.1)) on peut supposer après isotopie que φ envoie T_A sur $T_{A'}$. D'après la remarque précédente, et quitte à inverser A , on peut supposer que φ envoie la copie S_i de M_A sur celle de $M_{A'}$. Notons B la matrice dans la base (h_1, s_1) de l'application $H_1(T_1) \rightarrow H_1(T_1)$ induite par la restriction à T_1 de φ . Elle est nécessairement de la forme:

$$\begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon' \end{pmatrix}$$

où $|\epsilon|$ et $|\epsilon'|$ valent 1. En étudiant la restriction de φ sur T_2 , on voit que B doit aussi envoyer $h_1^\alpha s_1^\gamma$ sur $h_1^{\alpha'\epsilon_1} s_1^{\gamma'\epsilon_1}$ où $\epsilon_1 = \pm 1$; et $h_1^\beta s_1^\delta$ sur $h_1^{\beta'\epsilon_2} s_1^{\delta'\epsilon_2}$ où $\epsilon_2 = \pm 1$. On en déduit les égalités:

$$\begin{aligned}\alpha' &= \alpha\epsilon_1 \\ \beta' &= \beta\epsilon_2 \\ \gamma' &= \gamma\epsilon_1 \\ \delta' &= \delta\epsilon_2\end{aligned}$$

Quitte à remplacer A par son opposé, on peut supposer que $\epsilon = \epsilon_1$. Alors, comme $\beta\gamma - \alpha\delta$ et $\beta'\gamma' - \alpha'\delta'$ valent chacun 1, il s'en suit que $\epsilon' = \epsilon_2$. Alors:

$$\begin{aligned}\alpha' &= \alpha \\ \beta' &= \beta\epsilon' \\ \gamma' &= \gamma\epsilon' \\ \delta' &= \delta\end{aligned}$$

Donc, en définitive, si M_A ne fibre pas en cercles, $M_{A'}$ est difféomorphe à M_A si et seulement si:

$$A^{\pm 1} = \pm A' \quad \text{ou} \quad A^{\pm 1} = \pm \hat{A}'$$

Cette conclusion reste vraie même dans le cas où M_A est un fibré en cercles, i.e. quand A est de la forme:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

où α vaut ± 1 . En effet, dans ce cas, le produit $\beta\alpha$ est exactement la classe d'Euler du fibré en cercles $M_A \rightarrow \Sigma$ où Σ est la surface orientable de genre 2 et où l'orientation des fibres est celle donnée par h_1 . Nous laissons la preuve de cette affirmation au lecteur.

Théorème 5.1 *Si ni $|\alpha|$, ni $|\delta|$ ne vaut 1, et si β ne divise ni $\alpha + 1$, ni $\alpha - 1$, alors la VGPC M_A n'admet pas de flot d'Anosov. De plus, si β divise $\alpha + 1$ ou $\alpha - 1$ mais que ni $|\alpha|$, ni $|\delta|$ ne vaut 0 ou 1, alors tout flot d'Anosov sur M_A , s'il en existe, est un exemple de Handel-Thurston généralisé. Enfin, si la trace de A est nulle, si $|\alpha|$ est différent de 0 et de 1, si β divise $\alpha + 1$ ou $\alpha - 1$, et si M_A admet un flot d'Anosov, alors ce flot d'Anosov est un exemple de Handel-Thurston au sens de [23], et le quotient de $\alpha \pm 1$ par β est de valeur absolue 1 ou 2.*

Ce théorème prouve clairement le théorème C. Signalons ici que les matrices pour lesquelles le rapport entre $\alpha \pm 1$ et β vaut ± 1 ou ± 2 sont les matrices de la forme:

$$\begin{pmatrix} \epsilon + \beta k & \beta \\ -2k\epsilon - \beta k^2 & -\epsilon - \beta k \end{pmatrix}$$

où β est un entier non-nul quelconque et où k vaut ± 1 ou ± 2 .

Nous commençons la preuve du théorème par le fait suivant:

Proposition 5.2 *Les feuilletages faibles de tout flot d'Anosov sur une des variétés M_A sont transversalement orientés.*

Preuve Soit Φ^t un flot d'Anosov sur M_A . Nous allons montrer que le feuilletage faible stable \mathcal{F}^s est transversalement orienté. Le cas de \mathcal{F}^u est analogue. Il s'agit de montrer que l'action du groupe fondamental Γ_A sur Q^s préserve l'orientation. Comme Z_1 et Z_2 engendrent à eux deux Γ_A il suffit de montrer que l'un et l'autre préserve l'orientation de Q^s . Nous ne traitons que le cas de Z_1 , celui de Z_2 étant analogue. Si h_1 n'a pas de point fixe, il s'agit exactement des lemmes 4.6 à 4.8. Nous supposons donc que h_1 fixe un point s dans Q^s . Si h_1 renversait l'orientation de Q^s , il échangerait les deux composantes connexes de $Q^s \setminus \{s\}$. s serait donc l'unique point fixe de h_1 et serait donc fixé par tout Z_1 . Ceci est absurde. Donc, h_1 préserve les orientations de Q^s et de Q^u . Nous considérons comme dans [4] le graphe G_{h_1} suivant:

- les sommets de G_{h_1} sont les éléments de Q^Φ fixés par h_1 ,
- deux sommets θ_1 et θ_2 sont reliés par une arête si et seulement si il existe un losange de sommets θ_1 et θ_2 .

Comme dans [4], proposition 3.6, il découle du théorème 3.5 de [13] que G_{h_1} est un arbre connexe. De plus, Z_1 agit sur cet arbre, l'action de tout élément de Z_1 qui n'est pas une puissance de h_1 est libre, et h_1 agit trivialement. Une orientation de Q^s étant fixée, chaque h_1 -losange est "orienté", et donc, chaque arête de G_{h_1} l'est aussi. Si un élément γ de Z_1 renverse l'orientation de Q^s , il renverse également celle de G_{h_1} . Il doit donc dans ce cas fixer une arête de G_{h_1} en échangeant les extrémités. Ces deux extrémités sont alors points fixes de γ^2 qui doit donc être une puissance de h_1 . γ lui-même doit donc être une puissance de h_1 : contradiction. ■

Nous supposons toujours l'existence d'un flot d'Anosov Φ^t sur une variété M_A .

Lemme 5.3 *Une des deux fibres h_1 et h_2 n'est pas librement homotope dans M_A à une orbite périodique de Φ^t .*

Preuve Nous raisonnons par l'absurde en supposant que h_1 et h_2 admettent chacun des points fixes dans Q^s . Alors, d'après le théorème B de [4], quitte à isotoper le flot, on peut supposer que T_A est transverse à Φ^t et que les restrictions des feuilletages faibles à T_A sont sans composante de Reeb et admettent l'une des feuilles fermées homotopes à h_1 , l'autre des feuilles fermées homotopes à h_2 . Quitte à inverser le flot, on peut supposer qu'il est rentrant dans S_1 en T_A . Nous notons G la restriction à S_1 du feuilletage faible dont la restriction à $T_1 = T_A$ admet des feuilles fermées homotopes à h_1 . Soit Q l'espace des feuilles du relevé \tilde{G} au revêtement universel de S_1 . Comme la restriction à T_1 n'admet pas de composante de Reeb et que les feuilletages faibles n'admet pas de composante de Reeb, G n'a ni composante de Reeb ni semi-composantes de Reeb. Il découle donc du théorème de Novikov que le groupe fondamental de chaque feuille de G s'injecte dans celui de S_1 . Les feuilles de \tilde{G} sont donc simplement connexes. Ceci montre que Q est une 1-variété connexe et simplement connexe. De plus, Z_1 agit sur Q de manière effective, i.e. l'action d'un élément non-trivial est non-triviale. Soit x un élément de Q au-dessus d'une feuille de G dont l'intersection avec T_1 admet une composante compacte: x est un point fixe de h_1 . Donc, l'ensemble des points presque-fixes de h_1 est un fermé de Q Z_1 -invariant et non-vidé. On en déduit comme lors de la preuve du lemme 4.10 que G doit admettre une feuille compacte. Notons G_0 une feuille compacte de G , et F_0 la feuille de \mathcal{F}^s ou de \mathcal{F}^u qui la contient. Le bord de G_0 est constitué de courbes fermées simples non homotopiquement triviales dans G_0 , donc également homotopiquement non-triviales dans F_0 . On en déduit que F_0 est nécessairement un cylindre, et que G_0 est un anneau. Rappelons qu'un anneau plongé dans S_1 est dit vertical s'il contient une courbe fermée simple homotope à h_1 , horizontal s'il est isotope modulo ∂S_1 à un anneau sur lequel la fibration $S_1 \rightarrow \Sigma$ se restreint en un revêtement, et ∂ -parallèle s'il est isotope modulo T_1 à un anneau contenu dans T_1 . D'après [37], tout anneau plongé de manière incompressible dans S_1 est soit vertical, soit ∂ -parallèle, soit horizontal. La feuille G_0 ne peut être ∂ -parallèle: en effet, le théorème de Novikov appliqué au double $2G$ aboutirait à l'existence d'une semi-composante de Reeb. Elle ne peut pas non plus être horizontale, car la surface à bord compacte S_1 ne peut être revêtue par un anneau. G_0 est donc verticale. Comme Φ^t est rentrant dans S_1 le long de T_1 , ceci montre que G est la restriction de \mathcal{F}^s et que G_0 contient une orbite périodique θ_0 homotope à h_1 . Maintenant, en appliquant de nouveau les arguments précédents à la restriction G^u de \mathcal{F}^u à S_1 , on montre que G^u admet lui-aussi une feuille compacte qui est un anneau vertical (pour montrer que h_1 admet un point fixe dans l'espace des feuilles approprié, il suffit de considérer la feuille de G^u contenant θ_0). Or, la restriction de Φ^t à cette feuille compacte doit être rentrant le long du bord: ceci est absurde puisque cet anneau compact est découpé dans une feuille instable. ■

Nous supposons désormais que h_1 n'admet pas de point fixe dans Q^s . D'après les lemmes 4.6 et 4.7 Z_1 fixe un unique intervalle ouvert dans Q^s . Nous notons I_1^s cet intervalle Z_1 -invariant.

Lemme 5.4 *Tout élément s de la frontière de I_1^s est non-séparé d'un unique élément de I_1^s .*

Preuve Soit s un élément de la frontière de I_1^s , et J un intervalle ouvert voisinage de s . Comme Q^s est simplement connexe, l'intersection entre J et I_1^s est un intervalle ouvert de $I_1^s \simeq \mathbb{R}$. Deux cas se présentent:

- soit on peut choisir J de telle sorte que $J \cap I_1^s$ est à extrémités finies: alors une de ces extrémités est non-séparée de s .
- soit, quelque soit le choix de J , une des extrémités de $J \cap I_1^s$ est infinie.

Dans le premier cas nous avons conclu. Dans le second cas, $J \cap I_1^s$ rencontre son image par n'importe quel élément de Z_1 . Ceci montre que pour tout élément γ de Z_1 , s et γs sont non-séparés l'un de l'autre. D'après le théorème 2.12, il existe un élément γ_0 de Γ_A fixant chaque élément de l'orbite de s par Z_1 . On en déduit que γ_0 appartient au pseudo-centre de Z_1 et est donc une puissance non-triviale de h_1 . En d'autres termes, une puissance de h_1 doit fixer s . Or, comme h_1 n'admet pas de point fixe, ceci contredit la proposition 3.8 de [4].

L'unicité est évidente. ■

Les analogues des lemmes 3.1, 3.4 et 3.5 restent vraies. L'action de Z_1 sur I_1^s admet donc un unique fermé minimal invariant μ_1^s . Nous notons \mathcal{P} l'ensemble des éléments de μ_1^s fixés par un élément de Z_1 . Il est dense dans μ_1^s pour peu qu'il soit non-vide, ce qui provient du lemme suivant et du fait que si le flot n'est pas produit h_2 admet un point fixe dans Q^s .

Lemme 5.5 *Tout élément de Z_1 admettant un point fixe dans Q^s admet un point fixe dans μ_1^s .*

Preuve Soit γ un élément de Z_1 fixant un élément s de Q^s . Si s n'appartient pas à I_1^s , soit s' l'unique élément de ∂I_1^s déconnectant s de I_1^s . Etant unique, s' doit être lui-aussi point fixe de γ . D'après le lemme 5.4, il existe un unique élément s'' de I_1^s non-séparé de s' . Toujours pour raison d'unicité, s'' est point fixe de γ . Donc, γ admet un point fixe dans I_1^s . En déduire qu'il admet un point fixe dans μ_1^s est classique: voir la référence donnée au corollaire 3.4 ■

Lemme 5.6 *Il existe une courbe fermée simple dans T_A homotope dans M_A à une orbite périodique de Φ^t , et les courbes vérifiant cette propriété sont homotopes entre elles dans T_A .*

Preuve L'existence est claire: elle est évidente si h_2 est homotope à une orbite périodique, elle provient du théorème B sinon. Il s'agit donc de montrer l'unicité. S'il n'y a pas unicité, le fameux théorème B de [4] montre une nouvelle fois qu'après isotopie, le tore T_A est transverse au flot. En particulier, Φ^t n'est pas produit ce qui montre que nécessairement on est dans le cas où h_2 est homotope à une orbite périodique. Ainsi, un des feuilletages faibles se restreint à S_2 en un feuilletage G dont la trace sur T_2 admet des feuilles compactes homotopes à h_2 . On aboutit à une contradiction comme lors de la preuve du lemme 5.3. ■

Le lemme précédent se traduit de la manière suivante: il existe un élément $\pm(p, q)$ de \mathbb{Z}^2 bien défini au signe près tel que p et q sont premiers entre eux et $h_1^p s_1^q$ admet un point fixe dans Q^s . De plus, tout élément de H admettant un point fixe dans Q^s est nécessairement une puissance de $h_1^p s_1^q$. Notre but est de montrer que $p = \pm 1$ ou $(p, q) = (0, \pm 1)$. Ce fait, analogue de l'inégalité de Milnor-Wood et l'emploi qu'en fait W. Thurston dans sa thèse, est l'obstruction topologique menant au théorème C.

Soit s un élément de μ_1^s fixé par un élément γ de Z_1 . Quitte à inverser γ , on peut supposer que s est un point fixe attractif de γ . Soit $\tau(s)$ le plus petit point fixe attractif de γ appartenant à μ_1^s strictement supérieur à s . Notons qu'il existe car $h_1 s > s$ est un point fixe attractif de γ et que les points fixes de γ forment un fermé discret de I_1^s .

Nous reprenons les notations de la section 2.5. Soit V_1 l'ouvert $(p^s)^{-1}(I_1^s)$ de Q^Φ . C'est un ouvert saturé par \mathcal{G}^s Z_1 -invariant. Nous notons g^u la trace sur V_1 de \mathcal{G}^u . Pour tout élément x de V_1 nous notons

$s(x)$ et $\bar{u}(x)$ les feuilles de G^s et de g^u le contenant. La projection $p^s(\bar{u}(x))$ est un intervalle ouvert de I_1^s . Nous le notons $]\alpha(x), \beta(x)[$. Les quantités $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ peuvent *a priori* être l'une ou l'autre infinie. Nous nous intéressons dans ce qui suit à un point fixe x_0 d'un élément γ_0 de Z_1 .

Lemme 5.7 *Les extrémités $\alpha(x_0)$ et $\beta(x_0)$ appartiennent à I_1^s .*

Preuve Les itérés $h(x_0)$ et $h^{-1}(x_0)$ sont eux aussi points fixes de γ_0 . Une intersection entre $h^{-1}s(x_0)$ et $\bar{u}(x_0)$ serait un point fixe de γ_0 : $\bar{u}(x_0)$ contiendrait alors deux points fixes de γ_0 ce qui est impossible. Donc:

$$\alpha(x_0) > h^{-1}p^s(x_0)$$

De même:

$$\beta(x_0) < hp^s(x_0)$$

■

Soit x_{-1} le point fixe de γ_0 contenu dans $\alpha(x_0)$ et x_1 celui contenu dans $\beta(x_0)$. Comme chaque feuille appartenant à l'intervalle $]\alpha(x_0), \beta(x_0)[$ rencontre $\bar{u}(x_0)$, le seul point fixe de γ_0 dans $]\alpha(x_0), \beta(x_0)[$ est $p^s(x_0)$. On en déduit:

$$\beta(x_{-1}) = p^s(x_0) = \alpha(x_1)$$

Deux alternatives se présentent selon que $\alpha(x_0)$ et $\beta(x_0)$ appartiennent ou non à la même composante connexe de $V_1 \setminus \bar{u}(x_0)$. Dans le premier cas, x_0 est dit *de type C*. Dans le second cas, il est dit *de type D*.

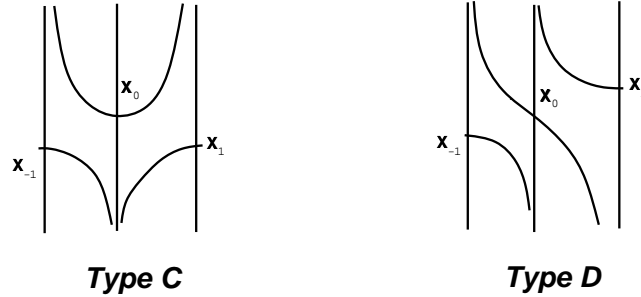


Figure 1:

Lemme 5.8 *Si $p^s(x_0)$ appartient à μ_1^s alors x_0 est de type D.*

Preuve Nous raisonnons une nouvelle fois par l'absurde. Nous supposons donc l'existence d'un point fixe x_0 d'un élément γ_0 de Z_1 de type C dont la projection par p^s appartient à μ_1^s . Quitte à modifier l'orientation de Q^u nous pouvons supposer que x_{-1} et x_1 appartiennent à $U_-(x_0)$.

Nous allons montrer que l'orbite $Z_1 \cdot \{p^s(x_0)\}$ ne rencontre l'intervalle $]\alpha(x_0), \beta(x_0)[$ qu'en $p^s(x_0)$, ce qui amène à la contradiction voulue puisque μ_1^s est parfait et que $Z_1 \cdot \{p^s(x_0)\}$ est dense dans μ_1^s .

Supposons donc *a contrario* l'existence d'un itéré $x'_0 = \gamma x_0$ ($\gamma \in Z_1$) dans $(p^s)^{-1}(]\alpha(x_0), \beta(x_0)[)$ autre que x_0 . Nous notons γ_1 le conjugué $\gamma\gamma_0\gamma^{-1}$: il admet x'_0 comme point fixe. Comme $s(x'_0)$ rencontre $\bar{u}(x_0)$ et que x_0 et x'_0 sont différents, γ_0 et γ_1 n'ont aucune puissance commune. Donc, aucun point fixe de γ_0 n'est point fixe de γ_1 .

Nous pouvons nous restreindre au cas où $p^s(x'_0)$ appartient à $]\alpha(x_0), \beta(x_0)[$. L'autre cas, à savoir $p^s(x'_0)$ appartenant à $]\alpha(x_0), p^s(x_0)[$ est identique. La feuille $s(x'_0)$ rencontre alors $u^-(x_1)$, ce qui montre que $x'_{-1} = \gamma x_{-1}$ appartient à $U_-(x_1)$. Donc, la feuille $\alpha(x'_0) = p^s(x'_1)$ rencontre $u^+(x_0)$. On en déduit aisément que x'_0 doit appartenir à $S_+(x_0) \cap U_+(x_0)$. Comme x'_{-1} appartient à $U_-(x_1)$ et que $\bar{u}(x'_{-1})$ ne rencontre pas $\bar{u}(x_1)$, $\alpha(x'_{-1})$ est supérieur à $p^s(x_0)$, et même strictement puisque γ_0 et γ_1 n'ont pas de point fixe commun. Soit x'_{-2} l'unique γ_1 -point fixe appartenant à $\alpha(x'_{-1})$, et x'_{-3} l'unique γ_1 -point fixe

appartenant à $\alpha(x'_{-2})$. Le premier appartient clairement à $S_+(x_0) \cap U_+(x_0)$: ceci découle de l'égalité $\beta(x'_{-2}) = p^s(x'_{-1})$. Par ailleurs, selon l'égalité $\beta(x'_{-3}) = p^s(x'_{-2})$, x'_{-3} appartient à $S_-(x_1) \cap U_-(x_1)$. De proche en proche, on établit ainsi l'existence d'une infinité de γ_1 -points fixes $(x'_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ alternativement dans $S_+(x_0) \cap U_+(x_0)$ et dans $S_-(x_1) \cap U_-(x_1)$. Les $(p^s(x'_{-n}))_{n \in \mathbb{N}}$ forment une suite décroissante dans le compact $[p^s(x_0), \beta(x_0)]$: cette suite converge donc, et sa limite est un point fixe de γ_1 . Or, comme les points fixes de γ_1 sont de type hyperbolique, ils forment un fermé discret de I_1^s . Contradiction. ■

La réciproque est elle aussi vraie:

Lemme 5.9 *Si $p^s(x_0)$ n'appartient pas à μ_1^s alors x_0 est de type C.*

Preuve Supposons que $p^s(x_0)$ n'appartient pas à μ_1^s . Soit $]s_-, s_+[$ la composante connexe de $I_1^s \setminus \mu_1^s$ contenant $p^s(x_0)$. Cette composante est γ_0 -invariante. Ses extrémités s_- et s_+ sont donc points fixes de γ_0 . Notons x_- et x_+ les points fixes de γ_0 contenus dans $(p^s)^{-1}(s_-)$ et $(p^s)^{-1}(s_+)$. Comme s_- et s_+ appartiennent à μ_1^s , x_- et x_+ sont de type D. Quitte à remplacer γ_0 par un de ses diviseurs, on peut supposer qu'il engendre les stabilisateurs de x_- et de x_+ . Si un autre élément de Z_1 admet un point fixe dans $]s_-, s_+[$ il doit lui aussi fixer les extrémités de cet intervalle et est donc une puissance de γ_0 . Comme μ_1^s est parfait et que \mathcal{P} en est une partie dense, il existe un point fixe x_1 d'un élément γ_1 de Z_1 tel que:

$$\alpha(x_-) < p^s(x_1) < s_-$$

et tel que γ_0 et γ_1 n'admettent pas de point fixe commun. Regardons la suite des x_n de premier terme x_1 et telle que chaque x_{n+1} est l'unique point fixe de γ_1 contenu dans $\beta(x_n)$. Comme les points fixes de γ_1 dans I_1^s forment un fermé discret, il existe un indice n pour lequel:

$$p^s(x_n) < s_- < p^s(x_{n+1})$$

Donc, quitte à remplacer x_1 par x_n on peut supposer:

$$p^s(x_1) < s_- < \beta(x_1)$$

Or, aucun élément de $]s_-, s_+[$ ne peut être point fixe de γ_1 . Donc:

$$p^s(x_1) < s_- < s_+ < \beta(x_1)$$

Il existe donc une feuille de g^u rencontrant à la fois $(p^s)^{-1}(s_-)$ et $(p^s)^{-1}(s_+)$. Or, si un des points fixes de γ_0 dans $(p^s)^{-1}(]s_-, s_+[)$, disons x_0 , est de type D, il est clair que pour tout élément x de $(p^s)^{-1}(] \alpha(x_0), \beta(x_0) [)$ on a soit $\alpha(x) \geq \alpha(x_0) \geq s_-$, soit $\beta(x) \leq \beta(x_0) \leq s_+$. Contradiction. ■

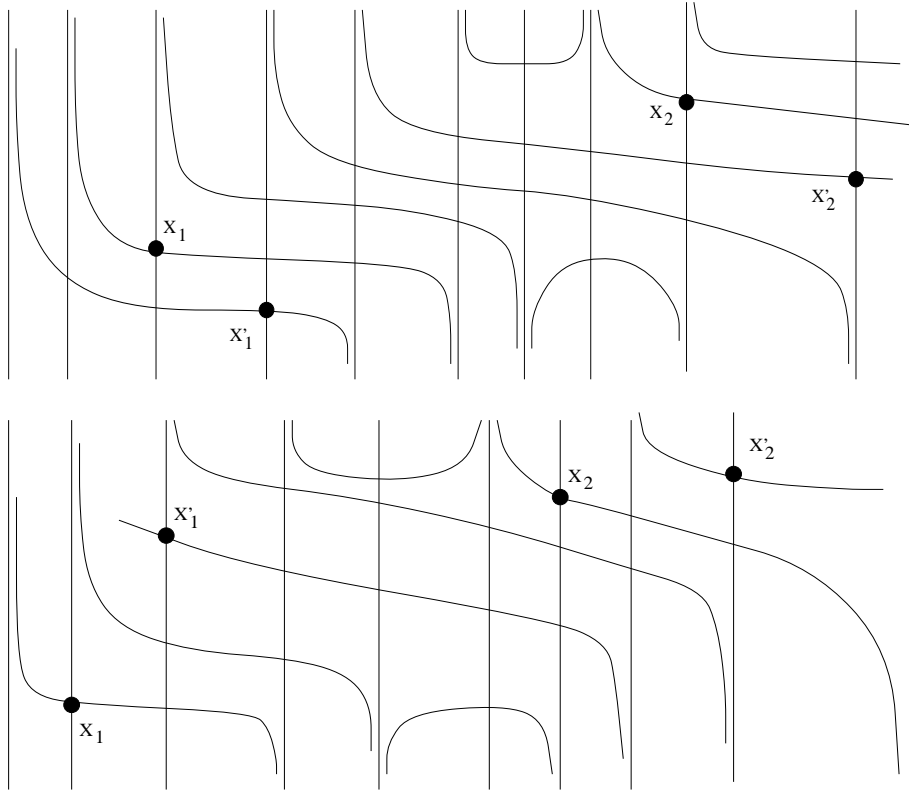
Au vu des deux lemmes précédents, on peut définir τ de la manière suivante: pour tout γ_0 -point fixe x de type D, $\tau(p^s(x))$ est la deuxième feuille parmi celles supérieures à $\tau(p^s(x))$, fixées par γ_0 et dont l'unique point fixe qu'elle contient est de type D.

Lemme 5.10 *Pour toute composante connexe de $I_1^s \setminus \mu_1^s$, le nombre de points fixes de type C qu'elle contient est pair.*

Preuve Si une composante connexe $]s_-, s_+[$ de $I_1^s \setminus \mu_1^s$ contient un nombre impair de points fixes de type C, on voit aisément que pour tout élément x de $(p^s)^{-1}(]s_-, s_+[)$ on a soit $\alpha(x) \geq s_-$, soit $\beta(x) \leq s_+$. On obtient une contradiction comme lors de la preuve du lemme précédent. ■

Nous sommes désormais en mesure de montrer:

Lemme 5.11 *L'application τ est strictement croissante.*



Preuve Soit $s < s'$ deux points fixes de deux éléments γ et γ' de Z_1 . Il nous semble qu'ici quelques figures valent mieux qu'un long discours. Dans les deux figures ci-dessus, x_1 et x_2 désignent les γ -points fixes contenus dans $(p^s)^{-1}(s)$ et $(p^s)^{-1}(\tau(s))$, et x_1' et x_2' désignent les γ' -points fixes contenus dans $(p^{s'})^{-1}(s')$ et $(p^{s'})^{-1}(\tau(s'))$.

■

Notons que $\tau : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ est clairement bijective. Comme τ est strictement croissante, elle se prolonge sur tout μ_1^s en une application croissante de la manière suivante:

$$\tau(s) = \text{Sup}\{\tau(s_0)/s_0 \leq s \mid s_0 \in \mathcal{P}\}$$

L'application τ ainsi prolongée n'est pas nécessairement continue, ni injective, ni même surjective. Pour remédier à cette imperfection, nous nous intéressons à son action sur l'espace quotient μ obtenu en identifiant deux éléments s et s' de μ_1^s si $]s, s'[$ est une composante connexe de $I_1^s \setminus \mu_1^s$. Il est clair que τ passe au quotient en une application $\bar{\tau}$. Il est tout aussi clair que l'action de Z_1 sur μ_1^s passe elle aussi en une action sur μ . Notons enfin que μ , muni de la topologie quotient, est homéomorphe à \mathbb{R} . Alors, $\bar{\tau}$ est une application croissante.

Lemme 5.12 *L'application $\bar{\tau} : \mu \rightarrow \mu$ est continue.*

Preuve Nous raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'un point de discontinuité \bar{s}_0 de $\bar{\tau}$ dans μ : il existe une suite d'éléments \bar{s}_n de μ convergeant vers \bar{s}_0 tels que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{\tau}(\bar{s}_n) \neq \bar{\tau}(\bar{s}_0)$$

En extrayant une sous suite, on peut supposer que \bar{s}_n est strictement monotone.

Premier cas: \bar{s}_n est strictement croissante.

Alors:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{\tau}(\bar{s}_n) < \bar{\tau}(\bar{s}_0)$$

Parmi les représentants de \bar{s}_0 dans μ_1^s nous choisissons le plus petit. Nous le notons s_0 . Pour chaque indice n , nous choisissons un représentant s_n dans μ_1^s de \bar{s}_n . Vu notre choix de s_0 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s_0$$

Par ailleurs, la suite des $\tau(s_n)$ est croissante et majorée par $\tau(s_0)$: elle admet une limite, qui doit être strictement inférieure à $\tau(s_0)$. Vu notre choix de s_0 , il ne peut être extrémité supérieure d'une composante connexe de $I_1^s \setminus \mu_1^s$. On en déduit qu'il en est de même pour $\tau(s_0)$. Par densité de \mathcal{P} , il s'en suit qu'il existe une suite strictement croissante d'éléments s'_p de \mathcal{P} convergeant vers $\tau(s_0)$. Alors, les $s''_p = \tau^{-1}(s'_p)$ forment une sous-suite strictement croissante d'éléments de \mathcal{P} tous strictement inférieurs à s_0 et tels que:

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \tau(s''_p) = \tau(s_0)$$

Pour chaque indice p il existe un entier n_p tel que:

$$s''_p \leq s_{n_p} < s_0$$

D'où:

$$\tau(s_0) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \tau(s''_p) \leq \lim_{p \rightarrow +\infty} \tau(s_{n_p}) < \tau(s_0)$$

Contradiction.

Deuxième cas: \bar{s}_n est strictement décroissante.

Alors:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{\tau}(\bar{s}_n) > \bar{\tau}(\bar{s}_0)$$

On choisit s_0 comme étant le plus grand des représentants de \bar{s}_0 dans μ_1^s . Comme précédemment, on voit que si s_n est une suite de représentants dans μ_1^s des \bar{s}_n , elle converge vers s_0 , et les $\tau(s_n)$ admettent une limite strictement supérieure à $\tau(s_0)$. Nous notons $s_1 = \tau(s_0)$ si $\tau(s_0)$ n'est pas extrémité inférieure d'une composante connexe de $I_1^s \setminus \mu_1^s$, et $s_1 = s_+$ si $]\tau(s_0), s_+[$ est une composante connexe de $I_1^s \setminus \mu_1^s$. Dans les deux cas, s_1 représente $\bar{\tau}(\bar{s}_0)$, et il existe une suite strictement décroissante d'éléments s'_p de \mathcal{P} convergeant vers s_1 . Les $s''_p = \tau^{-1}(s'_p)$ forment une suite décroissante d'éléments de \mathcal{P} . En raisonnant comme lors du premier cas, on obtient:

$$\tau(s_0) < \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau(s_n) \leq \lim_{p \rightarrow +\infty} \tau(s''_p) = s_1$$

Or, comme $\tau(s_0)$ et s_1 représentent tous les deux $\bar{\tau}(\bar{s}_0)$, ceci implique que les $\bar{\tau}(\bar{s}_n)$ convergent vers $\bar{\tau}(\bar{s}_0)$. Contradiction. ■

Lemme 5.13 *L'application $\bar{\tau}$ est un homéomorphisme.*

Preuve Comme τ est croissante et que sa restriction à \mathcal{P} est bijective, l'application $\bar{\tau}$, qui est continue, est surjective. Il s'agit donc de montrer que $\bar{\tau}$ est injective. Soient s_0 et s_1 deux éléments de μ_1^s ne représentant pas le même élément de μ . Par densité de \mathcal{P} , et comme $]s_0, s_1[$ rencontre μ_1^s , il existe trois éléments s , s' et s'' de \mathcal{P} tels que:

$$s_0 < s < s' < s'' < s_1$$

Alors:

$$\tau(s_0) \leq \tau(s) < \tau(s') < \tau(s'') \leq \tau(s_1)$$

Donc $\tau(s_0)$ et $\tau(s_1)$ ne bordent pas une composante connexe de $I_1^s \setminus \mu_1^s$, ce qui montre qu'ils ne représentent pas le même élément de μ . ■

Sachant que $\bar{\tau}$ est un homéomorphisme, on voit aisément, en s'inspirant de la preuve de la proposition 3.17:

Lemme 5.14 *Il existe un entier k tel que l'action de h_1 sur μ coïncide avec celle de $\bar{\tau}^k$.* ■

Le quotient \bar{S} de μ par l'action de $\bar{\tau}$ est homéomorphe au cercle. Nous sommes désormais en mesure de montrer:

Proposition 5.15 *Si $h_1^p s_1^q$ est un élément indivisible de H admettant un point fixe dans Q^s alors $p = \pm 1$ ou $(p, q) = (0, \pm 1)$.*

Preuve Rappelons (cf. lemme 5.6) que $\gamma_0 = h_1^p s_1^q$ est au signe près l'unique élément de H vérifiant cette propriété. D'après le lemme 5.14, l'action de γ_0 sur \bar{S} coïncide avec celle de s_1^q . Par ailleurs, cette action est manifestement de type hyperbolique ou parabolique, i.e. admet au plus deux points fixes. Il en est donc de même pour celle de s_1 . En tant qu'homéomorphisme de μ , s_1 s'écrit donc sous la forme $s_1 = s_0 \bar{\tau}^\epsilon$ où s_0 admet des points fixes isolés et où ϵ est un entier. Mais comme s_1 est un commutateur d'éléments de Z_1 qui commutent avec $\bar{\tau}$, on doit avoir $|\epsilon| \leq 1$. Or:

$$s_1^k = h_1^\epsilon s_0^k$$

Ceci montre que $(p, q) = (\epsilon, -k)$ si ϵ est non-nul, ou $(p, q) = (0, 1)$ si ϵ est nul, convient. ■

Preuve de 5.1 Soit donc:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

une matrice de déterminant -1 pour laquelle M_A admet un flot d'Anosov Φ^t . Si h_1 n'admet pas de point fixe, alors d'après les lemmes 5.6 et 5.15 soit il existe un entier k_1 non-nul tel que les seuls éléments de H admettant un point fixe dans Q^s sont les $h_1^{n_1} s_1^{k_1}$, soit les seuls éléments de H admettant un point fixe dans Q^s sont les puissances de s_1 . De même, si h_2 n'admet pas de point fixe, les seuls éléments de H admettant des points fixes sont soit les puissances de s_2 , soit les puissances de $h_2 s_2^{k_2}$ pour un certain entier k_2 . Enfin, si h_i ($i = 1, 2$) admet un point fixe dans Q^s , ses puissances sont les seuls éléments de H admettant des points fixes. Notons par ailleurs que nous avons:

$$h_2 = h_1^\alpha s_1^\gamma \quad s_2 = h_1^\beta s_1^\delta$$

D'après ce qui précède et le lemme 5.3 il n'y a que les quatres possibilités suivantes:

1. Ni h_1 , ni h_2 n'admet de point fixe dans Q^s :

D'après le théorème B, le flot est alors un exemple de Handel-Thurston généralisé. Il existe alors un entier ϵ de valeur ± 1 tel que:

$$h_1 s_1^{k_1} = (h_2 s_2^{k_2})^\epsilon$$

Notons en effet qu'en observant de près les morceaux de flots géodésiques sur S , on voit que ni s_1 ni s_2 ne peut dans ce cas admettre de point fixe. De l'égalité précédente on obtient:

$$\alpha + k_2 \beta = \epsilon$$

Donc, si β est non-nul, il divise $\alpha \pm 1$, et s'il est nul, nous avons $\alpha = \epsilon = -\delta$.

2. h_2 et s_1 admettent des points fixes dans Q^s , mais pas h_1 :

Dans ce cas, $\alpha = 0$, $\gamma = \pm 1 = \beta$. Ainsi, β divise $\alpha \pm 1$.

3. h_2 admet des points fixes dans Q^s , mais pas h_1 ni s_1 :

Nous avons alors:

$$h_2^\epsilon = h_1 s_1^{k_1}$$

pour un entier ϵ valant ± 1 . Alors α vaut ± 1 .

4. h_1 admet des points fixes dans Q^s mais pas h_2

En échangeant les indices 1 et 2, i.e. en inversant la matrice A , on se ramène à un des deux cas précédents. Donc, soit β divise $\alpha \pm 1$, soit δ vaut ± 1 . On peut aussi dire que soit δ est nul, soit il vaut ± 1 .

La première partie du théorème est ainsi démontrée: en regardant chaque cas, on voit que si M_A admet un flot d'Anosov, soit β est nul, auquel cas $|\alpha|$ vaut 1, soit β divise $\alpha \pm 1$, soit $|\delta|$ vaut un.

De plus, si on exclut les cas où $|\alpha|$ ou $|\delta|$ vaut 0 ou 1, seul le premier cas parmi les quatre précédents est possible. En d'autres termes, dans ce cas de figure tout flot sur la variété est un exemple de Handel-Thurston généralisé.

Nous n'avons plus qu'à traiter la dernière affirmation du théorème, i.e. le cas:

- $|\alpha| \neq 0, 1$,
- $\alpha + \delta = 0$,
- β divise $\alpha - \epsilon$.

Notons alors que $|\delta| \neq 0, 1$ puisque $\delta = -\alpha$. Dans ce cas, tout flot d'Anosov sur M_A est un exemple de Handel-Thurston généralisé. De plus:

$$\alpha + k_2\beta = \epsilon$$

En inversant A et en échangeant les indices 1 et 2:

$$-\delta + k_1\beta = \epsilon$$

Comme $\alpha = -\delta$, et comme β est non-nul, on en déduit que les entiers k_1 et k_2 sont égaux.

Soit c_0 une des orbites périodiques contenues dans T_A . On peut la choisir de sorte qu'elle représente l'élément $s_1 h_1^{k_1}$ de H . Son nombre d'intersection dans T_A avec h_1 est, au signe près k_1 , et son nombre d'intersection avec h_2 est $k_2 = k_1$. Ainsi, en effectuant une chirurgie de Dehn-Goodman adéquate, on peut se ramener à une variété $M_{A'}$ qui fibre en cercles sur la surface orientable Σ de genre 2. La matrice:

$$A' = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$$

s'obtient à partir de A par multiplication à droite par un twist de Dehn le long de c_0 , i.e. par une matrice de la forme:

$$\begin{pmatrix} 1 - k_1 p & p \\ -p k_1^2 & 1 + k_1 p \end{pmatrix}$$

où p est l'ordre de la chirurgie de Dehn effectuée le long de c_0 .

La variété $M_{A'}$ est un fibré en cercles sur Σ et admet un flot d'Anosov. D'après le théorème 4.9, elle doit être un revêtement fini du fibré unitaire tangent à Σ . Or, la caractéristique d'Euler de Σ est -2 . Donc, l'indice de ce revêtement doit diviser 2, i.e. être égal à 1 ou 2. Nous notons η cet indice. la matrice A' est donc de la forme:

$$A' = \begin{pmatrix} \epsilon & \epsilon' \frac{2}{\eta} \\ 0 & -\epsilon \end{pmatrix}$$

où ϵ et ϵ' valent ± 1 .

De plus, le flot sur $M_{A'}$ est un revêtement d'indice η du flot géodésique de Σ . On en déduit que l'entier k_1 vaut $\pm \eta$. Sachant que A' envoie $(1, k_1)$ sur lui-même ou son opposé, on voit que k_1 vaut plus précisément $-\epsilon \epsilon' \eta$.

Donc, A est de la forme:

$$A = \begin{pmatrix} \epsilon - \epsilon' p\eta & -p\epsilon + \epsilon' \frac{2}{\eta} \\ \epsilon p\eta^2 & -\epsilon + \epsilon' p\eta \end{pmatrix}$$

Ceci montre comme voulu que A est de la forme:

$$\begin{pmatrix} \epsilon + \beta\eta\epsilon' & \beta \\ -\beta\eta^2 - 2\eta\epsilon\epsilon' & -\epsilon - \epsilon'\eta\beta \end{pmatrix}$$

où η vaut 1 ou 2 et où ϵ et ϵ' valent ± 1 . ■

Comme dernière remarque, il convient de signaler que le théorème C est loin d'être optimal. Nous ne savons pas encore à vrai dire si tout flot d'Anosov sur une variété M_A est un exemple de Handel-Thurston au sens de [23] ou non. Notons aussi que les techniques que nous avons mises en oeuvre sont susceptibles d'être employées dans un cadre plus général. Nous n'avons pas cherché à atteindre le plus haut degré de généralité: ceci serait vain tant que l'existence éventuelle d'exemples de Handel-Thurston généralisés qui ne sont pas au sens de [23] n'est pas éclaircie.

Références

- [1] D.V. Anosov, *Geodesic flows on closed riemannian manifolds with negative curvature*, Proc. Steklov Inst. Math. AMS Translations (1969).
- [2] T. Barbot, *Géométrie transverse des flots d'Anosov*, Thèse (1992).
- [3] T. Barbot, *Caractérisation des flots d'Anosov en dimension 3 par leurs feuilletages faibles*, Ergod. Th & Dynam. Sys., **15** (1995), 247-270.
- [4] T. Barbot, *Mise en position optimale de tores par rapport à un flot d'Anosov*, Comment. Math. Helv., **70** (1995), 113-160.
- [5] T. Barbot, *Flots d'Anosov sur les variétés graphées au sens de Waldhausen I: Morceaux fibrés de bifeuilletages d'Anosov*, prépublication Université de Bourgogne, (1994).
- [6] T. Barbot, *Flots d'Anosov sur les variétés graphées au sens de Waldhausen II: Caractérisation des exemples de Handel-Thurston*, prépublication Université de Bourgogne, (1994).
- [7] A.F. Beardon, *The geometry of discrete groups*, Springer-Verlag, **91** (1983).
- [8] C. Bonatti et R. Langevin, *Un exemple de flot d'Anosov transitif transverse à un tore et non conjugué à une suspension*, Ergod. Th. & Dynam. Sys., **14** (1994), 633-643.
- [9] R. Bowen, *On Axiom A diffeomorphisms*, A.M.S. Providence, **35** (1970).
- [10] M. Brunella, *On the discrete Godbillon-Vey invariant and Dehn surgery on geodesic flows*, Ann. Fac. Sciences de Toulouse, **3** (1994), 335-344.
- [11] A. Casson et D. Jungreis, *Convergence groups and Seifert fibered 3-manifolds*, Invent. Math., **118** (1994), 441-456.
- [12] S.R. Fenley, *Anosov flows in 3-manifolds*, Ann. of Math., **139** (1994), 79-115.
- [13] S.R. Fenley, *Quasigeodesic Anosov flows and homotopic properties of flow lines*, Jour. Diff. Geom., **41** (1995), 479-514.
- [14] S.R. Fenley, *The structure of branching in Anosov flows of 3-manifolds*, preprint.

- [15] J. Franks et R. Williams, *Anomalous Anosov flows*, Global theory of dynamical systems, SLN 819, Springer-Verlag, New York (1980).
- [16] D. Fried, *Transitive Anosov flows and pseudo-Anosov maps*, Topology, **22** (1983), 299-304.
- [17] D. Gabai, *Convergence groups are Fuchsian groups*, Ann. of Math., **136** (1992), 447-510.
- [18] E. Ghys, *Flots d'Anosov sur les 3-variétés fibrées en cercles*, Ergod. Th. & Dynam. Sys., **4** (1984), 67-80.
- [19] S. Goodman, *Dehn surgery on Anosov flows*, SLN 1007, Springer, New York (1983).
- [20] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, in "Essays in group theory" édité par S.M. Gersten, M.S.R.I. Publ. **8**, Springer, (1987), 75-263.
- [21] M. Gromov, *Three remarks on geodesic dynamics and fundamental group*, texte non publié, S.U.N.Y., vers 1977.
- [22] A. Haefliger, *Groupoïdes d'holonomie et classifiants*, Astérisque, **116** (1984), 70-97.
- [23] M. Handel et W. Thurston, *Anosov flows on new 3-manifolds*, Inv. Math., **59** (1980), 95-103.
- [24] G. Hector et U. Hirsch, *Geometry of foliations, part B*, Aspects of Math., (1987) 2nd édition.
- [25] J. Hempel, *3-manifolds*, Ann. of Math Studies Number 86.
- [26] W. Jaco, *Lectures on three manifold topology*, C.B.M.S. Regional Conference Series in Mathematics Number 43.
- [27] S. Matsumoto, *Codimension one foliations on solvable manifolds*, Comment. Math. Helv., **68** (1993), 633-652.
- [28] G. Mess, *Centers of 3-manifolds groups and groups which are coarse quasi isometric to planes*, Preprint.
- [29] C.F.B Palmeira, *Open manifolds foliated by planes*, Ann. of Math., **107** (1978), 109-131.
- [30] J.F. Plante, *Anosov flows, transversely affine foliations, and a conjecture of Verjovskiy*, J. London Math. Soc. (2), **23** (1981), 359-362.
- [31] J.F. Plante, *Solvable groups acting on the line*, Trans. Amer. Math. Soc., **278** (1983), 401-414.
- [32] J.F. Plante et W.P. Thurston, *Anosov flows and the fundamental group*, Topology, **11** (1972), 147-150.
- [33] P. Scott, *Strong annulus and torus theorem and the enclosing property of characteristic submanifolds of 3-manifolds*, Quat. J. Math, **35** (1984), 485-506.
- [34] P. Scott, *There are no fake Seifert fibered spaces with infinite π_1* , Ann. of Math. **117**, (1983), 35-70.
- [35] J.P. Serre, *Arbres, amalgames, SL_2* , Astérisque, **46** (1977).
- [36] W.P. Thurston, *The geometry and topology of 3-manifolds Chap. 13*, Princeton Lect. Notes (1977).
- [37] F. Waldhausen, *Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. I*, Invent. Math., **3** (1967), 308-333.
- [38] F. Waldhausen, *Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. II*, Invent. Math., **4** (1967), 87-117.
- [39] F. Waldhausen, *On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large*, Ann. of Math. **87**, 56-88.