Actions de groupes sur les 1-variétés non séparées et feuilletages de codimension un

Thierry Barbot

Laboratoire de Topologie U.M.R. 5584

Université de Bourgogne

B.P. 138, 21004 Dijon

Abstract. We give elementary results about homeomorphisms of non-Hausdorff simply-connected 1-manifolds. As an application of these results, we give a short proof of a theorem of W. Thurston about foliations on circle bundles. Then, we give examples of infinite groups which cannot be realized as fundamental groups of manifolds admitting a codimension one analytic foliation.

1 Introduction

Un espace topologique $\mathcal{L}$ est une 1-variété s'il admet un recouvrement par des ouverts homéomorphes à la droite réelle. Nous supposerons toujours que la 1-variété est séparable, i.e. que le recouvrement peut être choisi dénombrable. Nous semblons reprendre la définition usuelle, mais dans ce travail, nous n'imposons pas à la variété d'être séparée au sens de Hausdorff: il peut exister deux éléments de $\mathcal{L}$ tels que tout voisinage de l'un rencontre tout voisinage de l'autre.

Nous supposons toujours la 1-variété $\mathcal{L}$ connexe. Elle est 1-connexe si le complémentaire de chacun de ses points admet deux composantes connexes. Ceci équivaut à ce que tout revêtement connexe de la variété est trivial. Lorsque $\mathcal{L}$ est 1-connexe, elle est orientable. Pour toutes les affirmations faites précédemment, nous renvoyons le lecteur à [7].

La notion de 1-variété est étroitement reliée à celle de feuilletages de codimension un de la manière suivante: étant donné un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension un sur une variété (séparée) M, on considère l'espace des feuilles $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ du feuilletage relevé dans le revêtement universel de M. Lorsque $\mathcal{F}$ n'admet pas de transversale compacte homotopiquement triviale, cet espace quotient est une 1-variété en général non séparée. L'action du groupe fondamental Γ sur le revêtement universel passe naturellement au quotient en une action sur $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$. Cette action recèle beaucoup d'informations sur le feuilletage: le groupoïde des germes d'éléments de Γ aux points de $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ est équivalent au groupoïde d'holonomie transverse du feuilletage (cf. [6]).

Revenons au cas général d'une 1-variété $\mathcal{L}$, provenant ou non d'un feuilletage de codimension un. Soit γ un homéomorphisme de $\mathcal{L}$ préservant l'orientation. Nous disons que γ sépare les points de $\mathcal{L}$ si tout point est séparé de son image par la topologie de $\mathcal{L}$. Nous consacrons une partie de ce travail à montrer que γ admet un axe fondamental (ou axe de translation). Nous définissons précisément cette notion à la section suivante. Nous nous contentons dans cette introduction à décrire un cas particulier: lorsque cet axe est l'image d'un plongement dans $\mathcal{L}$ de la droite réelle. Il est alors préservé globalement par γ, et la restriction de γ à cet axe est conjuguée à une translation de la droite réelle. De plus, cet axe est unique, en un sens que nous précisons plus loin. Le point de vue adopté ici provient d'une analogie avec les automorphismes sans points fixes des arbres simpliciaux ou réels (cf. [12, 15]). Une notion de "cycle fondamental" pour les 1-variétés non séparées dont le groupe fondamental est cyclique a été introduite par E. Ghys dans [4]. Dans ce contexte, l'axe fondamental des automorphismes de revêtement du revêtement universel n'est autre que le relevé de ce cycle fondamental. Cependant, il n'est pas clair *a priori* que les itérés d'un homéomorphisme séparant les points séparent eux aussi les points: on ne peut donc pas appliquer directement l'argument de [4].

Nous illustrerons l'utilité de cette notion en donnant une preuve rapide d'un théorème célèbre de W. Thurston portant sur les feuilletages de classe C^2, de codimension un, sur les fibrés en cercles au dessus d'une surface à caractéristique d'Euler négative (cf. [8, 13]). Ce théorème stipule que si la classe d'Euler du fibré en cercles est strictement supérieure à la valeur absolue de la caractéristique d'Euler de la surface sous-jacente, le feuilletage admet alors une feuille homéomorphe au tore ou à la bouteille de Klein.

Notre preuve est basée, tout comme celle de W. Thurston, sur l'inégalité de Milnor-Wood: si le groupe fondamental Γ du fibré en cercles admet une action sur la droite réelle pour laquelle l'action du générateur du pseudocentre de Γ est libre, alors la caractéristique d'Euler majore en valeur absolue la classe d'Euler. La véracité de l'inégalité de Milnor-Wood énoncée de cette manière est du reste claire au vu de la présentation du groupe fondamental (voir section 4 pour plus de détails). Précisons brièvement dans cette introduction que cette méthode s'étend au cas des fibrés de Seifert, permettant de réobtenir les résultats de [3].

Notre méthode consiste alors à montrer que, sous les hypothèses du théorème, l'espace des feuilles $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ est homéomorphe à la droite réelle, et que l'action du générateur h du pseudocentre sur $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ est libre. Pour y parvenir, nous montrons dans un premier temps que l'action de h sépare les points de $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ et admet donc un axe fondamental. Par unicité de celui-ci, et comme h commute ou anticommute aux autres éléments de Γ, cet axe fondamental est $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ tout entier, qui est donc homéomorphe à la droite réelle. Ce shéma de preuve donne lieu à une démonstration qui n'est guère plus longue, pour peu que soit établie l'existence de l'axe fondamental. Ce shéma de preuve est du reste le même que celui utilisé dans [4] pour montrer qu'un flot d'Anosov sur un fibré en cercles est "produit" (voir aussi [1, 2]).

Il est vrai que l'énoncé donné dans [13] est plus précis que la version à laquelle nous l'avons réduite ici: W. Thurston y montre qu'un feuilletage de classe C^2 sans feuille homéomorphe au tore d'un fibré en cercle sur une surface de genre plus grand que deux est conjugué à la suspension d'une représentation du groupe fondamental de la surface dans le groupe des difféomorphismes du cercle. Etablir ce résultat supplémentaire est plus simple lorsqu'on sait que l'espace des feuilles est homéomorphe à la droite réelle (cf [4]), mais les méthodes requises dépassent nos modestes ambitions. Nous nous contentons ici de remarquer que le résultat partiel établi ici montre pour le moins que le feuilletage initial a le même groupoïde d'holonomie transverse qu'une suspension.

La suite de ce papier (section 5) est consacrée au problème suivant: nous disons qu'une variété compacte est *réfractaire* si tout feuilletage de codimension un sur cette variété admet une transversale fermée homotopiquement triviale. En particulier, une telle variété n'admet pas de feuilletage transversalement analytique. Pour établir l'existence de variétés réfractaires à groupe fondamental infini, nous cherchons des groupes infinis dont toute action sur une 1-variété admet un point fixe commun. Les groupes vérifiant cette propriété sont dits admettre la propriété (FA'). A un indice deux près, une variété compacte est réfractaire dès que son groupe fondamental admet la propriété (FA'). Il s'avère aussi que tout produit semi-direct de deux groupes admettant la propriété (FA') admet lui aussi la propriété (FA'). Nous allons exhiber deux familles de groupes admettant la propriété (FA'):

- les groupes engendrés par un nombre fini d'éléments de torsion tels que tout produit de deux générateurs est lui aussi de torsion (cf. proposition 5.6),
- les sous-groupes d'indice fini de $SL(n, \mathbb{Z})$ pour les entiers n supérieurs à 3 (cf. théorème 5.9) .

Le lecteur averti aura relevé l'analogie avec l'étude faite en [12]. De fait, nous avons choisi la terminologie (FA') par référence à [12] où est traité le cas des actions sur les arbres simpliciaux. Mais nous sommes convaincus que notre propre travail est un peu plus qu'une simple transposition des résultats de [12]. Notamment, l'étude faite dans [12] est basée entre autre sur le fait que pour les actions sur les arbres simpliciaux, si deux homéomorphismes a et b admettent chacun un point fixe, et si leur composé ab admet lui-aussi un point fixe, alors a et b ont un point fixe commun. (cf. corollaire 2 de [12] p. 100). L'analogue de ce résultat dans notre contexte est complètement faux, ne serait-ce que sur la droite réelle.

Notre travail est aussi une généralisation du fait suivant, montré dans [19]: toute action d'un sous-groupe d'indice fini de $SL(n, \mathbb{Z})$ $(n \geq 3)$ sur la droite réelle est triviale.

Il est probable que les résultats sur $SL(n, \mathbb{Z})$ démontrés ici se généralisent de la manière suivante: tout réseau d'un groupe de Lie simple de rang au moins deux vérifie la propriété (FA').

Il est bien sûr utile de rappeler ici que tout groupe de présentation finie peut être réalisé comme groupe fondamental d'une variété compacte de caractéristique d'Euler nulle (par exemple, de dimension paire), et qu'une telle variété admet toujours un feuilletage de codimension un ([14]).

Comme autre exemple d'utilisation fructueuse des notions discutées ici, citons également [9].

Ce texte a énormément bénéficié des observations et corrections du rapporteur. Je l'en remercie vivement.

2 Homéomorphismes de 1-variété 1-connexes

2.1 Généralités

Deux éléments x et y d'une 1-variété 1-connexe $\mathcal{L}$ sont *non séparés* si tout voisinage de l'un rencontre tout voisinage de l'autre. Nous notons $x \approx y$. La relation $\approx$ est symétrique, réflexive, mais en général non transitive. Un *point de branchement* est un élément de $\mathcal{L}$ non séparé d'un autre élément de $\mathcal{L}$. Un ouvert de $\mathcal{L}$ connexe et séparé pour la topologie induite est appelé *intervalle ouvert*. Il est alors homéomorphe à la droite réelle. Deux éléments sont dits *comparables* s'ils appartiennent à un même intervalle ouvert. Une orientation de $\mathcal{L}$ étant fixée, il existe un ordre sur les éléments comparables. Cet ordre sera noté $\prec$. Pour tout élément x de $\mathcal{L}$, nous notons x^+ la composante connexe de $\mathcal{L} \setminus \{x\}$ contenant les éléments supérieurs à x, et x^- l'autre composante connexe. Pour deux éléments quelconques x et y de $\mathcal{L}$, on appelle *pseudointervalle* $]x, y[$ l'ensemble des points z qui les déconnectent, i.e. tels que x et y appartiennent à deux composantes connexes différentes de $\mathcal{L} \setminus \{z\}$. La notation est abusive: $]x, y[$ n'est ouvert que si x et y sont comparables. Nous appelons *pseudointervalle fermé* l'union $[x, y]$ de $]x, y[$ et de $\{x, y\}$. Si x et y sont égaux, nous convenons que $[x, x]$ est le singleton $\{x\}$. Si x et y sont comparables, $[x, y]$ est appelé *intervalle fermé*. Nous donnons à la proposition 2.3 une description générale de ces pseudointervalles.

Nous disons que deux points non séparés x et y le sont *positivement* (respectivement *négativement*) si x^+ et y^+ (respectivement x^- et y^-) sont d'intersection non vide. Remarquons que, bien que la relation $\approx$ ne soit pas transitive, les relations "être non séparés positivement" et "être non séparés négativement", elles, le sont.

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathcal{L}$. Pour tout élément x de la frontière $\partial\Omega$ de Ω, nous notons x^c le complémentaire dans $\mathcal{L}$ de la composante connexe de $\mathcal{L} \setminus \{x\}$ contenant Ω.

Proposition 2.1 *Les x^c sont deux à deux disjoints, et leur union quand x décrit $\partial\Omega$ est le complémentaire de Ω dans $\mathcal{L}$.*

Preuve Soient x et y deux éléments distincts de $\partial\Omega$. L'ouvert $y^c \setminus \{y\}$ ne rencontre pas Ω et ne contient donc pas x. Il est donc contenu dans une des composantes connexes de $\mathcal{L} \setminus \{x\}$. Comme tout voisinage de y rencontre Ω, il s'agit de celle contenant Ω. Par conséquent, x^c et y^c sont disjoints. Considérons un intervalle ouvert voisinage de x. Son intersection avec Ω est un intervalle ouvert de la forme $]z, x[$, et son intersection avec x^c est un connexe de la forme $[x, t[$. On en déduit que l'union U de Ω et de tous les x^c est un ouvert de $\mathcal{L}$. Comme $\mathcal{L}$ est connexe, montrer la proposition revient à montrer que U est fermé. Soit z un élément du complémentaire de U. Comme il n'appartient pas à l'adhérence de Ω, il admet un voisinage ouvert disjoint de Ω qu'on peut supposer être un intervalle I. Etant connexe et disjoint de $\partial\Omega$, si cet intervalle rencontre un des x^c, il y est contenu, ce qui est absurde. On en déduit que le complémentaire de U est ouvert. ∎

Corollaire 2.2 *Considérons deux ouverts connexes disjoints de $\mathcal{L}$. Chacun d'entre eux admet un unique point dans sa frontière qui le déconnecte de l'autre.* ∎

Proposition 2.3 *Tout pseudointervalle fermé $[x, y]$ est une union finie d'intervalles fermés $[x_i, y_i]$ $(i = 0, \ldots, n)$ tels que:*

- pour une orientation convenable de $\mathcal{L}$, chaque y_i est supérieur ou inférieur à x_i selon que i est pair ou impair,

- $x_0 = x$ et $y_n = y$,

- $x_{i+1} \approx y_i$

Les éléments x_i et y_i, ainsi que l'entier n, vérifiant ces propriétés sont uniques.

Dans l'énoncé ci-dessus, certains des pseudointervalles $[x_i, y_i]$ peuvent être réduits à des singletons. Nous notons $d(x, y)$ l'entier n.

Pour montrer la proposition 2.3, nous aurons besoin du lemme suivant:

Lemme 2.4 *Pour tout triplet d'éléments x, y et z de $\mathcal{L}$, $[x, y]$ et contenu dans l'union de $[x, z]$ et de $[z, y]$. De plus, si z est un élément de $]x, y[$, les pseudointervalles $]x, z[$ et $]z, y[$ sont disjoints, et leur union est $]x, y[$ privé du point z.*

Preuve Un élément de $\mathcal{L}$ qui ne déconnecte ni x et z, ni z et y ne déconnecte pas x et y. Ceci montre la première affirmation. Supposons maintenant que z appartient à $]x, y[$. Pour une orientation convenable de $\mathcal{L}$, x appartient à z^- et y à z^+. Soit t un élément de $]x, z[$. Soit T_1 la composante connexe de $\mathcal{L} \setminus \{t\}$ contenant x et T_2 celle contenant z. Comme T_1 ne rencontre pas z, est connexe et contient x, il est contenu dans z^-. Il ne contient donc pas y, ce qui montre que t déconnecte x et y. Le pseudointervalle $]x, y[$ contient donc $]x, z[$, et donc aussi $]z, y[$. Aucun élément de $\mathcal{L}$ ne peut déconnecter deux-à-deux trois autres éléments : $]x, z[$ et $]z, y[$ sont donc disjoints. ∎

Preuve de 2.3 On déduit aisément du lemme 2.4 que, à x fixé, l'ensemble des y pour lesquels $[x, y]$ a un nombre fini de composantes connexes est un ouvert fermé, et est donc $\mathcal{L}$ tout entier. Orientons $\mathcal{L}$ de sorte que y appartient à x^+. Soit U le sous-ensemble de x^+ constitué des éléments strictement supérieurs à x. C'est un ouvert connexe. Si y appartient à U, le problème est résolu. Sinon, soit z l'unique élément de ∂U tel que y appartient à z^c. D'après le lemme 2.4, $[x, y]$ est l'union de $[x, z]$ et de $[z, y]$. Soit I un intervalle ouvert voisinage de z: son intersection avec U est un intervalle ouvert. Soit t un élément de cette intersection: $[x, t]$ est un intervalle; son intersection avec I est donc de la forme $]y_0, t]$. Il est clair que z appartient à y_0^+, et que $y_0 \approx z$. Donc, y_0 déconnecte x et z. Donc, $[x, z]$ est l'union de $[x, y_0]$ et de $\{z\}$. On en déduit que $[x, y]$ est l'union de $[x, y_0]$ et de $[z, y]$. On conclut par une récurrence sur le nombre de composantes connexes. ∎

Notons aussi le corollaire suivant du lemme 2.4:

Proposition 2.5 *Si z déconnecte x et y, le nombre $d(x, y)$ est la somme de $d(x, z)$ et de $d(z, y)$.* ∎

2.2 L'axe fondamental

Soit γ un homéomorphisme de $\mathcal{L}$ préservant l'orientation.

Définition 2.6 *L'axe fondamental de γ est l'ensemble des points x pour lesquels $d(x, \gamma x)$ est pair. Il est noté $\mathcal{A}(\gamma)$.*

Il est clair par cette définition que tout homéomorphisme qui commute avec γ (en particulier, γ lui-même) envoie l'axe fondamental de γ sur lui-même.

Proposition 2.7 *Soit x un élément de $\mathcal{L}$ qui n'est pas point fixe de γ. Les trois assertions suivantes sont équivalentes:*

1. *x appartient à l'axe fondamental de γ,*
2. *pour une orientation convenable de $\mathcal{L}$, x^+ contient son image γx^+,*
3. *pour une orientation convenable de γ, γx appartient à x^+, et x à γx^-.*

Preuve

Montrons que la seconde assertion implique la troisième: orientons $\mathcal{L}$ de sorte que x^+ contient son image par γ. Alors, x^- est un ouvert disjoint de γx^+. Comme γx appartient à l'adhérence de ce dernier ouvert, γx n'appartient pas à x^-. Il appartient donc à x^+. On montre que x appartient à γx^- de manière analogue.

Montrons maintenant l'implication inverse: on oriente $\mathcal{L}$ de sorte que γx appartient à x^+ et x à γx^-. Alors, comme γx^+ ne contient pas x, il est contenu soit dans x^+, soit dans x^-. Dans le second cas, le raisonnement utilisé pour la première implication montre que γx appartient à x^-, ce qui est absurde.

Montrons l'équivalence entre la première et la troisième assertion. Pour ce faire, nous allons montrer que pour toute paire d'éléments distincts (x, y), la distance $d(x, y)$ est paire si et seulement si il existe une orientation de $\mathcal{L}$ pour laquelle y appartient à x^+ et x à y^-. Nous faisons cette preuve par récurrence sur $d(x, y)$. La nullité de $d(x, y)$ signifie que x et y sont comparables. Le cas $n = 0$ dans la récurrence est donc clair. Nous supposons donc $n > 0$, et que l'hypothèse de récurrence est vérifiée jusqu'à $n - 1$.

Soit $[x = x_0, y_0] \cup \ldots \cup [x_n, y_n = y]$ la décomposition du pseudointervalle $[x, y]$ définie par la proposition 2.3. Orientons $\mathcal{L}$ de sorte que y appartient à x^+. Nous devons montrer que x appartient à y^- si et seulement si n est pair.

Comme $[x_n, y_n] = [x_n, y]$ ne contient pas x et est connexe, il est contenu dans x^+. Soit I un intervalle ouvert contenant x_n et contenu dans x^+. Il contient y_{n-1} dans son adhérence, ce qui montre que y_{n-1} appartient à x^+, sauf si $n = 1$ et $x = x_0 = y_0$. On montre ainsi de proche en proche que $]x, y[$ est contenu dans x^+. En particulier, si y_0 n'est pas confondu avec x, il lui est supérieur. On en déduit que y_0^+ est contenu dans dans x_0^+ et que x^- est contenu dans y_0^-. Comme x appartient à y_0^-, et que $[x, y] = [x, y_0] \cup [x_1, y]$, le pseudointervalle $[x_1, y]$ est contenu dans y_0^+. Comme x_1 appartient à l'ouvert y_0^+, il existe un intervalle ouvert contenant x_1 et contenu dans y_0^+. Il s'en suit que y_0 et x_1, que l'on savait non séparés, sont plus précisemment non séparés positivement. Donc, y_0 appartient à x_1^+. On en déduit que y_1 appartient à x_1^- puisqu'il est déconnecté de y_0 par x_1. Il s'ensuit que $[x_0, y_0]$ est contenu dans x_1^+, qui lui-même est contenu dans y_1^+.

Ceci traite le cas $n = 1$; supposons donc $n > 1$. Tous les éléments de $[x_1, y_1]$ déconnectent $[x, y_0]$ de $[x_2, y]$. Donc, y appartient à x_1^-. Par hypothèse de récurrence, x_1 appartient à y^- si $n - 1$ est impair, et à y^+ si $n - 1$ est pair. Or, $[x, y_2] \setminus \{y\}$ ne rencontre qu'une des deux composantes connexes de $\mathcal{L} \setminus \{y\}$. Il s'en suit que x appartient à y^- si n est pair, et à y^+ si n est impair. Ceci établit la validité de la récurrence, et achève la preuve de la proposition. ∎

Lemme 2.8 *Si x appartient à $\mathcal{A}(\gamma)$ et n'est pas point fixe de γ, son image γx déconnecte x de $\gamma^2 x$.*

Preuve C'est un corollaire du 3 de la proposition 2.7: pour l'orientation adéquate, x appartient à γx^- et $\gamma^2 x$ à γx^+ puisque γx appartient à x^+. ∎

Proposition 2.9 *L'axe fondamental de γ n'est pas vide.*

Preuve Nous raisonnons par l'absurde en supposant $\mathcal{A}(\gamma)$ vide. Remarquons tout d'abord que ceci implique qu'aucun élément de $\mathcal{L}$ n'est comparable à son image, et donc que tout intervalle est disjoint de son image par γ.

Soit x un élément de $\mathcal{L}$ minimisant $d(x, \gamma x)$. Par hypothèse, $d(x, \gamma x)$ est impair, en particulier non nul. Orientons $\mathcal{L}$ de sorte que γx appartient à x^+. Notons $[x_i, y_i]$ les composantes de $[x, \gamma x]$, l'indexation étant choisie selon les conventions de la proposition 2.3. Alors, x appartient à x_1^+. De plus, γx appartient à x_1^-, sauf si $\gamma x = x_1 = y_1$. Soit I un intervalle ouvert contenant $[x_0, y_0]$. Son image γI est disjointe de I. Elle ne contient donc pas x_1 puisque celui-ci est non séparé de y_0: ceci montre que $x_1 = \gamma x$ est exclu. De plus, γI est contenu dans une des composantes connexes de $\mathcal{L} \setminus \{x_1\}$. Cette composante connexe ne peut être que x_1^- puisque γx appartient à γI et x_1^-. Soit J un intervalle ouvert voisinage de x_1. Lui aussi est disjoint de son image, donc γJ est contenu dans une des composantes connexes de $\mathcal{L} \setminus \{x_1\}$. Comme J rencontre I, cette composante connexe est x_1^-. En particulier, γx_1 appartient à x_1^-, et ne déconnecte donc pas x de x_1. De plus, comme $\mathcal{A}(\gamma)$ est vide, le point 3 de la proposition 2.7 montre que x_1 appartient à γx_1^-. L'ouvert γx_1^- contient donc x. Par ailleurs, x appartient à x_1^+: γx appartient donc à γx_1^+. On en déduit que γx_1 appartient au pseudointervalle $]x, \gamma x[$. Donc, $[x_1, \gamma x_1]$ est strictement contenu dans $]x, \gamma x[$. Plus précisément, $d(x_1, \gamma x_1)$ est strictement plus petit que $d(x, \gamma x)$. Ceci contredit notre choix de x. ∎

Proposition 2.10 *On suppose que γ sépare les points. Pour tout élément x de $\mathcal{A}(\gamma)$, la réunion des $[\gamma^n x, \gamma^{n+1} x]$ quand n prend toutes les valeurs entières est $\mathcal{A}(\gamma)$ tout entier.*

Preuve Pour tout élément x de $\mathcal{A}(\gamma)$ notons I_x la réunion de tous les $[\gamma^n x, \gamma^{n+1} x]$. Soit y un élément de $]x, \gamma x[$. Son image γy déconnecte γx et $\gamma^2 x$, mais ne déconnecte pas x de γx d'après les lemmes 2.8 et 2.4. Elle déconnecte donc x et y de $\gamma^2 x$. Donc:

$$d(x, \gamma^2 x) = d(x, \gamma y) + d(\gamma y, \gamma^2 x)$$

Comme y déconnecte x de γx et ne déconnecte pas γx de $\gamma^2 x$ (lemme 2.4), il déconnecte x de γy, puisque ce dernier appartient à $]\gamma x, \gamma^2 x[$. Donc:

$$d(x, \gamma^2 x) = d(x, y) + d(y, \gamma y) + d(y, \gamma x)$$

D'où:

$$\begin{aligned} d(x, \gamma x) + d(\gamma x, \gamma^2 x) &= d(x, y) + d(y, \gamma y) + d(y, \gamma x) \\ 2d(x, \gamma x) &= d(x, \gamma x) + d(y, \gamma y) \\ d(x, \gamma x) &= d(y, \gamma y) \end{aligned}$$

Ceci montre que y appartient à $\mathcal{A}(\gamma)$. Comme celui-ci est γ-invariant, il contient I_x.

Inversement, soit y un élément de $\mathcal{A}(\gamma)$. Supposons par l'absurde que y n'appartient pas à I_x. D'après le point 3 de 2.7, quitte à remplacer γ par son inverse, il existe une orientation de $\mathcal{L}$ pour laquelle on a:

$$x \in y^+ \quad \gamma y \in y^+ \quad y \in \gamma y^-$$

γx appartient donc à γy^+. Comme γy ne déconnecte pas x et γx, l'ouvert γy^+ contient x. Par conséquent, γy déconnecte x et y. En itérant le procédé, on montre ainsi que tous les $\gamma^n y$ pour n positif appartiennent à $[x, y]$. Ce pseudointervalle étant compact, la suite des $\gamma^n y$ admet une valeur d'adhérence. Cette suite est de plus "monotone", au sens où $\gamma^{n+1} y$ appartient à $[x, \gamma^n y]$. La valeur d'adhérence est donc une limite. Cette limite doit être un point presque fixe de γ: contradiction. ∎

Tous les corollaires suivants sont valides sous l'hypothèse où γ sépare les points de $\mathcal{L}$.

Corollaire 2.11 *L'axe fondamental est soit homéomorphe à la droite réelle, soit une union dénombrable d'intervalles fermés disjoints I_n. Dans le premier cas, la restriction de γ à $\mathcal{A}(\gamma)$ est conjuguée à une translation. Dans le second cas, il existe un entier pair k non nul tel que pour chaque entier n l'image γI_n est I_{n+k}.*

Preuve Evidente. ∎

Corollaire 2.12 *Si γ préserve un intervalle ouvert de $\mathcal{L}$, cet intervalle est confondu avec l'axe fondamental.* ∎

Corollaire 2.13 *Tout élément de la frontière de $\mathcal{A}(\gamma)$ est non séparé d'un élément de $\mathcal{A}(\gamma)$.*

Preuve Soit x un élément de la frontière de $\mathcal{A}(\gamma)$. Soit I un voisinage intervalle ouvert de x. L'intersection entre I et $\mathcal{A}(\gamma)$ est un intervalle de $\mathcal{A}(\gamma)$. Soit x_n une suite d'éléments de $I \cap \mathcal{A}(\gamma)$ convergeant vers x. Si les x_n admettent une limite dans $\mathcal{A}(\gamma)$, cette limite est non séparée de x et nous avons conclu. Sinon, $\mathcal{A}(\gamma)$ est homéomorphe à la droite réelle, et $I \cap \mathcal{A}(\gamma)$ est un intervalle de $\mathcal{A}(\gamma)$ infini d'un côté. Alors, $\gamma I \cap \mathcal{A}(\gamma)$ est lui aussi un intervalle infini d'un côté, et ce, du même côté que $I \cap \mathcal{A}(\gamma)$. On en déduit que x est non séparé de γx, ce qui est absurde. ∎

2.3 Homéomorphismes ne séparant pas les points

Dans ce paragraphe, γ désigne toujours un homéomorphisme de $\mathcal{L}$ préservant l'orientation, mais nous supposons maintenant *qu'il ne sépare pas les points.* Nous appelons *point presque fixe* de γ tout élément de $\mathcal{L}$ non séparé de son image par γ. Un point presque fixe x de γ est dit *négatif* (respectivement *positif*) si x et γx sont non séparés négativement (respectivement positivement).

Nous distinguons deux cas différents, selon que γ admette ou non des points fixes.

Proposition 2.14 *Si γ n'admet pas de point fixe, il existe un et un seul intervalle ouvert γ-invariant. La restriction de γ à cet intervalle est conjuguée aux translations de la droite réelle.*

Preuve Soit x un point presque fixe de γ. Quitte à changer l'orientation de $\mathcal{L}$, nous pouvons supposer qu'il est négatif. Il existe alors un élément y de x^- comparable à son image par γ. L'union des $[\gamma^n y, \gamma^{n+1} y]$ est donc un intervalle ouvert γ-invariant. Nous le notons I_0. Soit I un autre intervalle ouvert γ-invariant. S'il est disjoint de I_0, comme I et I_0 sont connexes, il existe un unique élément x de ∂I_0 déconnectant I et I_0 (cf. lemme 2.2). L'itéré γx vérifie alors la même propriété et doit donc être égal à x: contradiction. Donc, $J = I \cap I_0$ est non-vide. Comme $\mathcal{L}$ est simplement connexe, J est un sous-intervalle ouvert de I_0 préservé par γ. Ses extrémités dans I_0, si elles existent, sont des points fixes de γ. Donc, J et I_0 sont confondus. De même, $J = I$. Donc, I et I_0 sont confondus. ∎

Lorsque γ est sans point fixe, nous notons I_γ l'intervalle ouvert défini par la proposition précédente. La dynamique de γ sur $\mathcal{L}$ se décrit alors de la manière suivante:

Proposition 2.15 *La frontière de I_γ se scinde en trois parties (chacune pouvant être vide):*

- *l'ensemble des points presques fixes positifs de γ,*
- *l'ensemble des points presques fixes négatifs de γ,*
- *l'ensemble des points non séparés d'un élément de I_γ.*

Les points presque fixes positifs (respectivement négatifs) de γ sont non séparés les uns des autres. Si x est un élément de la troisième partie, les itérés de x^c sont deux-à-deux disjoints.

Nous rappelons que la notation x^c a été introduite à la proposition 2.1.

Preuve La dernière phrase découle de manière évidente de la proposition précédente. Soit X_+ l'ensemble des points presque fixes positifs de γ, et X_- celui des points presque fixes négatifs de γ. Soit x un élément de ∂I_γ. Soit J un intervalle ouvert voisinage de x: il rencontre I_γ. Deux cas se présentent:

- soit on peut choisir J de telle sorte que $J \cap I_\gamma$ est à extrémités finies: alors une de ces extrémités dans I_γ est non-séparée de x.
- soit, quelque soit le choix de J, une des extrémités de $J \cap I_\gamma$ est infinie.

Dans le second cas, $J \cap I_\gamma$ rencontre son image par γ. Ceci montre que tout élément de ∂I_γ est soit non séparé d'un élément de I_γ, soit appartient à X_+ ou X_-.

Inversement, pour tout élément x de X_+, il existe un élément y de x^+, proche de x et comparable à sa propre image. Comme γ est sans point fixe, y est différent de γy. L'union des intervalles $[\gamma^n y, \gamma^{n+1} y]$ est un intervalle ouvert γ-invariant. C'est donc I_γ. On en déduit que tout intervalle ouvert voisinage J de x rencontre $I_\gamma \cap x^+$, ce qui montre déjà que x appartient à la frontière de I_γ. De plus, quitte à inverser γ, on peut supposer que γ envoie $J \cap I_\gamma$ dans lui-même. Donc, $J \cap I_\gamma$ contient un bout infini de I_γ. Ce bout est toujours le même quelque soit l'élément x de X_+: les éléments de X_+ sont donc non séparés positivement les uns des autres. On raisonne de manière analogue pour X_-. ∎

Corollaire 2.16 *L'intervalle I_γ n'est autre que l'axe fondamental de γ.*

Preuve L'inclusion de I_γ dans $\mathcal{A}(\gamma)$ est évidente. Inversement, soit x un élément de $\mathcal{L}$ hors de I_γ. Il existe un unique élément z de ∂I_γ tel que z^c contient x. L'itéré γz^c contient γx. Donc, z et γz appartiennent à $[x, \gamma x]$. D'après le lemme 2.4, $[x, \gamma x] = [x, z] \cup [z, \gamma z] \cup [\gamma z, \gamma x]$. Dans le cas où z et γz sont non séparés, $[x, \gamma x]$ est l'union de $[x, z]$ et de $[\gamma z, \gamma x]$. On en déduit l'égalité $d(x, \gamma x) = 2d(x, z) - 1$. Ceci montre comme voulu que z n'appartient pas à $\mathcal{A}(\gamma)$. Il reste à traiter le cas où z est non séparé d'un élément y de I_γ: orientons $\mathcal{L}$ de sorte que x appartient à z^+. Quitte à inverser γ, on peut supposer $y \prec \gamma y$ (observons que $I_\gamma = I_{\gamma^{-1}}$ et $\mathcal{A}(\gamma) = \mathcal{A}(\gamma^{-1})$). Alors, γx appartient à γz^+ qui est contenu dans y^+. On en déduit l'égalité entre $d(y, \gamma x)$ et $d(\gamma z, \gamma x)$. On obtient les égalités $d(x, \gamma x) = d(x, z) + 1 + d(y, \gamma x) = d(x, z) + d(\gamma z, \gamma x) + 1 = 2d(x, z) + 1$. Là encore, $d(x, \gamma x)$ est impair, ce qui conclut. ∎

Nous considérons maintenant le cas où γ admet un point fixe. Pour tout point fixe x de γ, soit I_x le *bassin d'action* de x, i.e. l'ensemble des points y dont l'orbite par γ contient x dans son adhérence (nous avons choisi ce terme par contraction de "répulsion" et "d'attraction").

Lemme 2.17 *Le bassin d'action d'un point fixe de γ est un intervalle.*

Preuve Soit y un élément de $I_x \setminus \{x\}$. Soit I un intervalle ouvert contenant x. L'intersection $J = I \cap \gamma^{-1} I$ est un voisinage de x. Il existe un entier n tel que J contient $\gamma^n y$. Alors, $\gamma^{n+1} y$ appartient à I. Quitte à inverser l'orientation, on peut supposer $x \prec \gamma^n y$. Alors, $x \prec \gamma^{n+1} y$. Deux cas de figure peuvent se présenter: soit $x \prec \gamma^{n+1} y \prec \gamma^n y$, soit $x \prec \gamma^n y \prec \gamma^{n+1} y$. Quitte à inverser γ, on peut supposer être dans le premier cas. Comme γ préserve l'ordre $\prec$ et que x est point fixe de γ, on en déduit: $x \prec \gamma y \prec y$. Donc, les itérés positifs de γ envoient l'intervalle $[x, y]$ dans lui-même. La suite des itérés positifs de y est monotone dans l'intervalle $[x, y]$. Comme elle admet x comme valeur d'adhérence, elle l'admet pour limite. On en déduit que $[x, y]$ est contenu dans I_x.

Si z est un autre élément de $I_x \setminus \{x\}$, ou bien $z \prec x$, auquel cas $z \prec y$; ou bien $x \prec z$, et il existe un itéré $\gamma^n z$ dans $[x, y]$. Quitte à itérer davantage, on peut supposer dans le second cas n positif. Alors, $\gamma^n y$ est dans $[x, y]$ et est donc comparable à $\gamma^n z$. On en déduit que dans tous les cas, y et z sont comparables.

Ceci conclut. ∎

Nous notons $\mathcal{E}(\gamma)$ l'union des bassins d'action des points fixes de γ.

Lemme 2.18 *L'ensemble $\mathcal{E}(\gamma)$ est exactement l'ensemble des éléments de $\mathcal{L}$ comparables à leur image par γ.*

Preuve D'après le lemme 2.17, tout élément de $\mathcal{E}(\gamma)$ est comparable à son image par γ. Inversement: soit x un élément comparable à son image. Il n'y a rien à montrer si x est point fixe de γ. Sinon: soit x_0 un point fixe de γ. Il est clair que x_0 ne déconnecte pas x de γx: plus précisement, l'intervalle $[x, \gamma x]$ ne contient aucun point fixe de de γ. Soit I l'union des itérés par γ de $[x, \gamma x]$: c'est un intervalle ouvert qui ne contient aucun point fixe de γ et qui est γ-invariant. Soit z l'unique élément de ∂I tel que z^c contient x_0. Il doit être point fixe de γ. S'il est non séparé d'un élément de I, ce dernier devrait être point fixe de γ, ce qui est absurde. Il s'en suit que qu'il existe un intervalle ouvert J contenant z et tel que $J \cup I$ est un intervalle. Quitte à remplacer γ par son inverse et échanger x avec γx, on peut supposer que γx appartient à l'intervalle $]x, z[$. Alors, la suite des $\gamma^n x$ pour les entiers n positifs est croissante et converge vers z, ce qui montre que x appartient au bassin d'action de z, donc à $\mathcal{E}(\gamma)$. ∎

Proposition 2.19 *L'ensemble $\mathcal{E}(\gamma)$ est un ouvert connexe. Ses points de branchement pour la topologie induite sont tous points fixes de γ.*

Preuve Soit y un élément de $\mathcal{E}(\gamma)$. Si y n'est pas point fixe de γ, il est d'après le lemme 2.17 contenu dans l'intervalle ouvert $]\gamma^{-1}y, \gamma y[$ qui lui-même est contenu dans tout bassin d'action contenant y. Si y est point fixe de γ, soit J un intervalle ouvert voisinage de y. L'ouvert non vide $J \cap \gamma^{-1}J$ est contenu dans $\mathcal{E}(\gamma)$ d'après le lemme 2.18. L'ensemble $\mathcal{E}(\gamma)$ est donc ouvert. Soient y et y' deux éléments de $\mathcal{E}(\gamma)$. Soient x et x' deux points fixes de γ dont les bassins d'action contiennent respectivement y et y'. Le pseudointervalle fermé $[x, x']$ est γ-invariant. Il découle aisément de la proposition 2.3 que chacune de ses composantes connexes est un intervalle γ-invariant. Chaque composante connexe est donc contenue dans $\mathcal{E}(\gamma)$ d'après le lemme 2.18. Comme $\mathcal{E}(\gamma)$ est ouvert, il existe donc un chemin continu reliant x à x' dans $\mathcal{E}(\gamma)$. D'après le lemme 2.17, ce chemin peut être rallongé en un chemin reliant y à y'. L'ouvert $\mathcal{E}(\gamma)$ est donc connexe. Il nous reste à montrer l'affirmation sur les points de branchements. Soit x l'un d'entre eux. Supposons qu'il n'est pas point fixe de γ. Soit y un élément de $\mathcal{E}(\gamma)$ auquel il soit non séparé: pour la bonne orientation, x et y sont non séparés négativement. Quitte à inverser γ, on suppose que γx appartient à x^+. Comme x et γx sont comparables, il s'en suit que γy appartient à x^+. Ceci contredit le fait que y et γy sont comparables. ∎

L'ouvert $\mathcal{E}(\gamma)$ est le "coeur" de la dynamique de γ. Si γ est à points fixes isolés (par exemple, s'il est analytique), la proposition précédente montre que les points de branchements de $\mathcal{E}(\gamma)$ sont isolés: $\mathcal{E}(\gamma)$ ressemble alors très fortement à un arbre simplicial.

Corollaire 2.20 *Soit γ un homéomorphisme de $\mathcal{L}$ préservant l'orientation. On suppose qu'il existe un élément x de $\mathcal{L}$ tel que $d(x, \gamma x)$ est pair et non nul. Alors, γ sépare les points de $\mathcal{L}$ et x appartient à l'axe fondamental de γ.*

Preuve D'après les hypothèses, x appartient à l'axe fondamental de γ. Supposons que γ admet un point fixe: alors, d'après le lemme 2.18, x ne peut appartenir à $\mathcal{E}(\gamma)$. Soit z l'unique élément de $\partial\mathcal{E}(\gamma)$ tel que z^c contient x. Pour une orientation convenable de $\mathcal{L}$, z^c contient x^+. Comme $\mathcal{E}(\gamma)$ est γ-invariant, γx ne peut pas appartenir à z^c: sinon, z serait point fixe de γ, ce qui est absurde. Donc, γx n'appartient pas à x^+: il appartient à x^-. Comme $d(x, \gamma x)$ est pair, on en déduit que x appartient à γx^+. Donc, $\gamma^{-1}x$ appartient à x^+, donc à z^c. Ceci est absurde puisque $\mathcal{E}(\gamma) = \mathcal{E}(\gamma^{-1})$.

Donc, γ est sans point fixe. Supposons qu'il admet un point presque fixe. D'après le corollaire 2.16, x appartient à l'intervalle I_γ: il est comparable à son image par γ. Contradiction. Donc, γ sépare les points de $\mathcal{L}$. ∎

Corollaire 2.21 *Soit γ un homéomorphisme de $\mathcal{L}$ préservant l'orientation et admettant au moins un point fixe. Alors, $\mathcal{E}(\gamma)$ est exactement l'axe fondamental de γ.*

Preuve D'après 2.20, l'axe fondamental est exactement dans ce cas l'ensemble des points x tels que $d(x, \gamma x)$ est nul. D'après 2.18, ce dernier ensemble est exactement $\mathcal{E}(\gamma)$. ∎

L'une des principales applications du corollaire 2.20 qu'on utilisera par la suite est la forme suivante du lemme du ping-pong:

Proposition 2.22 *Soit A et B deux ouverts connexes disjoints de $\mathcal{L}$. Soit α (respectivement β) l'unique élément de ∂A (respectivement ∂B) qui déconnecte A de B. On suppose qu'il existe des homéomorphismes a et b qui préservent l'orientation, et qui préservent respectivement A et B. On suppose de plus que α n'est pas point fixe de a, et que β n'est pas point fixe de b. Alors, ab, ab^{-1}, $a^{-1}b$ et $a^{-1}b^{-1}$, ainsi que leurs inverses, séparent chacun les points de $\mathcal{L}$.*

Preuve Par symétrie du problème, il suffit de montrer que ab sépare les points. Comme $a\alpha^c$ est disjoint de α^c, il est disjoint de B et ne contient pas β. Comme il contient $a\alpha$, il rencontre β^c. On en déduit que $a\alpha^c$ est strictement contenu dans β^c. De manière analogue, $b\beta^c$ est strictement contenu dans α^c. Donc, $ab\beta^c$ est strictement contenu dans $a\alpha^c$, qui lui-même est contenu dans β^c. Il s'en suit que β appartient à l'axe fondamental de ab (cf. proposition 2.7), et qu'il n'est pas point fixe de ab.

Supposons que β et $ab\beta$ sont comparables, disons $\beta \prec ab\beta$. Nous distinguons deux cas, selon que $\alpha = \beta$ ou non. Dans le premier cas, comme A est contenu dans β^c mais ne contient α que dans son adhérence, il doit rencontrer $]ab\beta, \beta[$. Dans le deuxième cas, β appartient à $\alpha^c \setminus \{\alpha\}$. Comme $ab\beta$ appartient à $a\alpha^c$ qui est disjoint de α^c, les points β et $ab\beta$ sont déconnectés par α. Là encore, A doit rencontrer $]ab\beta, \beta[$. Or, comme $ab\beta$ appartient à $a\alpha^c$, l'unique élément de ∂A qui déconnecte $ab\beta$ de A est $a\alpha$. Donc, $a\alpha$ appartient à $]ab\beta, \beta[$. Comme α est soit égal à β, soit appartient à $]ab\beta, \beta[$, on en déduit que α et $a\alpha$ sont comparables. Or, comme a préserve l'orientation, ceci implique que α^c rencontre son image par a. Ceci est absurde: nous avons donc montré que $d(\beta, ab\beta)$ est un entier pair non-nul. Ceci achève la preuve de la proposition d'après le corollaire 2.20. ∎

2.4 Homéomorphismes renversant l'orientation

Cette section est entièrement consacrée à la preuve du fait suivant:

Proposition 2.23 *Un homéomorphisme de $\mathcal{L}$ qui renverse l'orientation admet un point fixe.*

La description de la dynamique d'un tel difféomorphisme devient alors aisée: le point fixe est nécessairement unique, et les deux composantes connexes du complémentaire sont échangées.

Nous commençons la preuve de 2.23. Soit γ un homéomorphisme de $\mathcal{L}$ renversant l'orientation. Nous notons γ' le carré γ^2: il préserve l'orientation. Si γ' sépare les points, il admet un axe fondamental $\mathcal{A}$. Etant unique, cet axe est γ-invariant. Si cet axe est homéomorphe à la droite réelle, la restriction de γ à cette droite en renverse l'orientation et y admet donc un point fixe: contradiction, puisqu'on a supposé γ' sans point fixe. Sinon, $\mathcal{A}$ est une union d'intervalles fermés I_n (cf. corollaire 2.11). Ces intervalles sont naturellement ordonnés entre eux, et γ les permute en renversant cet ordre. Or, une permutation de $\mathbb{Z}$ renversant l'ordre est nécessairement une involution, et, d'autre part, l'entier k apparaissant au corollaire 2.11 est toujours non nul. Contradiction.

Nous avons donc montré que γ' admet nécessairement des points presque fixes. S'il n'admet pas de point fixe, il admet un unique intervalle ouvert invariant (cf. proposition 2.14). Etant unique, cet intervalle doit être γ-invariant, et doit donc admettre un point fixe de γ': absurde. Donc, γ' admet un point fixe x. Si x est point fixe de γ, nous avons fini. Sinon, le pseudointervalle $[x, \gamma x]$ est γ-invariant. Notons $[x, \gamma x] = [x_0, y_0] \cup \ldots \cup [x_n, y_n]$ sa décomposition donnée par la proposition 2.3. Par unicité de cette décomposition, et par invariance de $[x, \gamma x]$ par γ, nous avons: $\gamma x_i = y_{n-i}$ et $\gamma y_i = x_{n-i}$. On peut supposer $\mathcal{L}$ orienté de sorte que y_0 est supérieur à $x_0 = x$. Alors, comme γ renverse l'orientation, x_n est inférieur à $y_n = \gamma x$. Il s'ensuit d'après la proposition 2.7 (plus précisément, de la propriété qui est établie par récurrence lors de sa preuve) que n est pair: il est de la forme $n = 2k$. Alors, $\gamma x_k = y_k$ et $\gamma y_k = x_k$: l'intervalle $[x_k, y_k]$ contient un (le) point fixe de γ. Ceci achève la preuve de la proposition 2.23.

3 Feuilletages de codimension un

Soit M une variété fermée munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension un et de classe C^r $(r \geq 1)$. Soit $\pi : \widetilde{M} \to M$ un revêtement universel de M, et Γ le groupe fondamental de M. Soit $\widetilde{\mathcal{F}}$ le relevé de $\mathcal{F}$ dans $\widetilde{M}$. On note $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ l'espace des feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}$.

Proposition 3.1 *$\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ est une 1-variété 1-connexe si et seulement si $\mathcal{F}$ n'admet pas de lacet transverse homotopiquement trivial.*

Preuve Si $\mathcal{F}$ admet un lacet transverse homotopiquement trivial, celui-ci se relève en un lacet transverse à $\widetilde{\mathcal{F}}$. Il existe alors une feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}$ qui ne déconnecte pas $\widetilde{M}$. Inversement, supposons que $\widetilde{\mathcal{F}}$ n'admet pas de lacet transverse. Alors, chaque transversale rencontre chaque feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}$ en au plus un point. Les transversales munissent donc $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ d'une structure de 1-variété séparable. De plus, par un argument classique, chaque feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}$ est fermée dans $\widetilde{M}$. Elle déconnecte donc $\widetilde{M}$, ce qui montre que $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ est 1-connexe. ∎

La liste suivante est une liste de feuilletages de codimension un satisfaisant l'hypothèse de la proposition 3.1:

- Les feuilletages analytiques ou transversalement analytiques (théorème de Haefliger),

- Les feuilletages en dimension 3 sans composante de Reeb (théorème de Novikov),

- Les feuilletages en dimension 3 sans feuille torique (i.e. homéomorphe au tore).

Pour cette liste d'affirmations, nous renvoyons le lecteur à [5]. Le troisième cas est bien sûr un corollaire du deuxième. Notons que cette liste donne des conditions suffisantes pour que $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ soit une 1-variété 1-connexe, mais non nécessaires: penser au feuilletage de $S^2 \times S^1$ obtenu en recollant deux composantes de Reeb.

L'action du groupe fondamental Γ sur $\widetilde{M}$ passe naturellement en une action sur $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$. Beaucoup de propriétés de $\mathcal{F}$ s'interprètent dans $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$. Par exemples, les feuilles de $\mathcal{F}$ correspondent aux Γ-orbites, et une feuille est compacte si la Γ-orbite correspondante est fermée et discrète. Les fermés de M saturés par $\mathcal{F}$ correspondent aux fermés de $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ qui sont Γ-invariants. L'action de Γ recèle aussi toute l'information sur les holonomies de lacets dans des feuilles de $\mathcal{F}$: soit c un lacet dans une feuille F de $\mathcal{F}$. Soit x un élément de $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ correspondant à un relevé de F. Si l'holonomie de $\mathcal{F}$ le long de c est non triviale, il existe un lacet transverse au feuilletage librement homotope à c. Donc, c est homotope à un élément γ de Γ non trivial et qui fixe x, et l'holonomie de $\mathcal{F}$ le long de c est conjuguée à l'action de γ près de x. Notons aussi (cf. théorème IV.3.3 de [5], l'hypothèse classe C^2 n'est pas nécesssaire) que si $\mathcal{F}$ est "sans cycle évanouissant" (ce qui, lorsque M est de dimension 3, équivaut à ce que $\mathcal{F}$ est sans composante de Reeb (cf. théorème IV.3.18 de [5])), le groupe fondamental de chaque feuille s'injecte dans Γ. Dans ce cas, le groupe fondamental d'une feuille correspond au stabilisateur de l'action de Γ en un point de $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$. Les correspondances évoquées ci-dessus consiste à prendre les projections dans $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ des relevés dans $\widetilde{M}$ de feuilles de $\mathcal{F}$.

Nous énonçons la traduction dans $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ de plusieurs théorèmes classiques sur les feuilletages de codimension un. Nous supposons bien sûr toujours que ces feuilletages n'admettent pas de lacet transverse homotopiquement trivial.

Théorème 3.2 *Tout fermé non vide Γ-invariant de $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ contient un fermé Γ-invariant minimal pour ces propriétés. Ce fermé est soit discret, soit tout $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$, soit localement homéomorphe à l'ensemble de Cantor. Dans le dernier cas, le minimal est dit exceptionnel.* ∎

Théorème 3.3 *(Sacksteder) Si l'action de Γ sur $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ est libre, alors $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ est homéomorphe à la droite réelle, et l'action de Γ sur $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ est semi-conjuguée à une action par translations. Si $\mathcal{F}$ est de classe C^2, cette semi-conjugaison est une conjugaison.*

Dans cet énoncé, "l'action de Γ est libre" signifie que l'ensemble des points fixes de chaque élément de Γ est soit vide, soit ouvert. On peut ajouter dans la conclusion de ce théorème que le feuilletage admet une mesure transverse invariante, et que la variété ambiante fibre sur le cercle.

Preuve Sous ces hypothèses, le feuilletage est sans holonomie. Voir les théorèmes IV.2.1, IV.2.6 et IV.2.7 de [5]. ∎

Théorème 3.4 *(Sacksteder) Si $\mathcal{F}$ est de classe C^2, et si l'action de Γ sur $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ admet un minimal exceptionnel, il existe un élément de Γ admettant dans ce minimal exceptionnel un point fixe hyperbolique.*

Dans cet énoncé, point fixe hyperbolique signifie que la dérivée au point fixe est de norme différente de 1.

Preuve C'est une traduction du théorème IV.1.18 de [5]. ∎

4 Preuve du théorème de Thurston

Notre but désormais est de montrer le théorème suivant, dû à W. Thurston.

Théorème 4.1 *Soit $p : M \to \Sigma$ un fibré en cercles sur une surface de caractéristique d'Euler négative. On suppose que la variété M est orientable. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage sur M de classe C^2 sans feuille homéomorphe au tore ou à la bouteille de Klein. Alors, la valeur absolue de la caractéristique d'Euler du fibré majore la classe d'Euler du fibré $p : M \to \Sigma$.*

Dans cet énoncé, le fibré M est supposé orientable simplement pour pouvoir parler de sa classe d'Euler. Il existe bien sûr un résultat similaire même lorsque M n'est pas orientable, mais d'énoncé inélégant. Notre énoncé est du reste suffisant à revêtements doubles près. Nous aurions pu aussi choisir un énoncé plus général, incluant tous les fibrés de Seifert pour retrouver les résultats de [3], mais la discussion nécessaire pour ceci nous parait hors de propos.

Soit $(M, \mathcal{F})$ un feuilletage vérifiant les hypothèses de ce théorème. Si la surface sous-jacente Σ est non orientable, on considère son revêtement double des orientations. En prenant le tiré en arrière par ce revêtement, on obtient un feuilletage sur un fibré en cercles orientable sur une surface orientable. Cette opération double à la fois la caractéristique d'Euler de la surface et la classe d'Euler de la surface, et le feuilletage sur le revêtement double admet une feuille homéomorphe au tore ou à la bouteille de Klein si et seulement si il en de même pour $\mathcal{F}$. On peut donc supposer que la surface Σ est orientable.

Le groupe fondamental de M admet alors la présentation suivante:

$$< a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g, h \quad | \quad [a_i, h] = 1 \ , \ [b_i, h] = 1 \ , \ [a_1, b_1] \ldots [a_g, b_g] = h^e >$$

L'entier g est le genre de la surface Σ, et e la classe d'Euler du fibré. L'élément h de Γ engendre le centre H de Γ. Notons $\bar{\Gamma}$ le quotient de Γ par H: il est isomorphe au groupe fondamental de Σ.

Comme il a été vu précédemment, $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ est une 1-variété 1-connexe. De plus, $\mathcal{F}$ est sans cycle évanouissant. Montrer le théorème 4.1 équivaut à montrer le théorème suivant:

Théorème 4.2 *L'espace des feuilles $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ est homéomorphe à la droite réelle, l'action de Γ sur $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ préserve l'orientation, et celle de H est libre.*

En effet, le théorème 4.1 est alors un corollaire de l'inégalité de Milnor-Wood (cf. [17]).

Nous consacrons ce paragraphe à la preuve du théorème 4.2. Nous commençons par la remarque suivante:

Lemme 4.3 *Si h admet un point fixe dans $\mathcal{L}_\mathcal{F}$ ce point fixe n'est fixé que par les puissances de h.*

Preuve Ce point fixe correspond à une feuille F de $\mathcal{F}$. Notons P le groupe fondamental de F. Comme $\mathcal{F}$ est sans composante de Reeb, P est isomorphe au stabilisateur du point fixe de h pour l'action de Γ. On en déduit que le centre de P est infini. Or, les seules surfaces dont le groupe fondamental est à centre infini sont l'anneau, le ruban de Möbius, le tore où la bouteille de Klein. Comme F n'est pas homéomorphe au tore ou à la bouteille de Klein, et comme h n'admet pas de diviseur dans Γ, le lemme est démontré. ∎

Proposition 4.4 *L'action de h sur $\mathcal{L}_\mathcal{F}$ préserve l'orientation et sépare les points.*

Preuve Si h renverse l'orientation de $\mathcal{L}_\mathcal{F}$ il y admet d'après la proposition 2.23 un unique point fixe. Comme chaque élément de Γ commute avec h, ce point fixe est fixé par tout Γ, ce qui contredit le lemme 4.3. Donc, h préserve l'orientation. Notons E l'ensemble des points fixes de h, et E_0 l'ensemble des points presque-fixes de h. Nous supposons par l'absurde que E_0 est non vide. Soit enfin Δ la différence $E_0 \setminus E$. Soit I un intervalle ouvert de $\mathcal{L}_\mathcal{F}$. Nous affirmons que I contient au plus deux éléments de Δ. En effet: supposons par l'absurde qu'il en contient trois, qu'on note x, y et z. Supposons:

$$x \prec y \prec z$$

Comme x est non séparé de son image par h, y^- rencontre son image par h. On en déduit que y^+ est disjoint de son image par h, or, y^+ contient z. Ceci contredit $z \approx \gamma z$. Donc, si Δ est non vide, c'est un fermé discret. Comme h commute avec tous les éléments de Γ, Δ est Γ-invariant: il correspond donc à des feuilles compactes de $\mathcal{F}$. Notons F une de ces feuilles compactes. Soit $\tilde{F}$ un relevé de F. Il se projette dans $\mathcal{L}_\mathcal{F}$ sur un élément de Δ. Comme Δ est discret, il existe dans $\widetilde{M}$ un chemin $\tilde{c}$ reliant un point $\tilde{y}$ proche de $\tilde{F}$ au point $h(\tilde{y})$ qui est proche de $h(\tilde{F})$ et dont la projection dans $\mathcal{L}_\mathcal{F}$ ne rencontre pas Δ. Alors, $\tilde{c}$ se projette par π sur un lacet librement homotope aux fibres de p mais qui ne rencontre pas F. Le groupe fondamental du complémentaire de ce lacet est isomorphe au produit d'un groupe libre L et du sous-groupe cyclique H engendré par les fibres. Le groupe fondamental de F s'injecte dans ce groupe produit et ne contient pas d'éléments de H puisque son centre est trivial. Sa projection sur le premier facteur L est donc injective. Or, un groupe libre ne peut pas contenir un groupe de surface compacte. Contradiction.

Donc, Δ est vide, ce qui montre que E et E_0 sont confondus. En particulier, E est un fermé Γ-invariant. Soit $\mathcal{M}$ un fermé Γ-invariant minimal contenu dans E. Il y a trois cas à distinguer:

- $\mathcal{M}$ est un fermé discret,
- $\mathcal{M}$ est un minimal exceptionnel,
- $\mathcal{M}$ est $\mathcal{L}_\mathcal{F}$ tout entier.

Le premier cas est impossible: il implique en effet que $\mathcal{F}$ admet une feuille compacte dont le groupe fondamental est à centre infini, et est donc un tore ou une bouteille de Klein.

Dans le deuxième cas, il découle du théorème de Sacksteder (théorème 3.4) qu'il existe un élément γ de Γ fixant un élément x de $\mathcal{M}$ hyperbolique en ce point, i.e. dont la dérivée en x est différente de un en valeur absolue. Comme x est point fixe de h, γ doit être une puissance de h d'après le lemme 4.3. Or, comme $\mathcal{M}$ est sans point isolé, x ne peut pas être point fixe hyperbolique d'une puissance de h. Contradiction.

Il reste donc le troisième cas, celui où h agit trivialement sur $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$. D'après l'autre théorème de Sacksteder (théorème 3.3), $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ est homéomorphe à la droite réelle et l'action de Γ est conjuguée à une action par translations. De plus, l'action de Γ sur $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ induit une action de $\bar{\Gamma}$ sur la droite réelle par translations. Chacune de ces translations est non triviale d'après le lemme 4.3. Or, $\bar{\Gamma}$ n'est pas abélien: contradiction. ∎

Lemme 4.5 *Le feuilletage $\mathcal{F}$ est orientable et transversalement orientable.*

Preuve Comme M est orientable, montrer ce lemme équivaut à montrer que chaque élément de Γ préserve l'orientation de $\mathcal{F}$. Supposons *a contrario* que Γ contient un élément γ renversant l'orientation. D'après la proposition 2.23, γ admet un unique point fixe. Comme h commute avec γ, il doit lui aussi fixer ce point fixe. Ceci contredit la proposition précédente. ∎

Puisque h sépare les points de $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ il admet un axe fondamental $\mathcal{A}$. Cet axe est de plus préservé par chaque élément de Γ. Supposons que $\mathcal{A}$ soit homéomorphe à la droite réelle. Il suffit d'appliquer l'inégalité de Milnor-Wood à la restriction de Γ à $\mathcal{A}$. Mais il n'est pas difficile de compléter notre étude de ce cas en montrant que $\mathcal{A}$ est $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ tout entier: considérons l'ouvert $\widetilde{U}$ de $\widetilde{M}$, ensemble des points de $\widetilde{M}$ se projetant dans $\mathcal{A}$. C'est un ouvert de $\widetilde{M}$ saturé par $\widetilde{\mathcal{F}}$ et Γ-invariant. Comme $\widetilde{\mathcal{F}}$ est un feuilletage par plans, $\widetilde{U}$ est homéomorphe à R^3 d'après un théorème de Palmeira ([10]). Le quotient U de $\widetilde{U}$ par Γ est un $K(\Gamma, 1)$, tout comme M. Comme M est compact, on en déduit que U est compact. Par ailleurs, l'application de revêtement $\pi : \widetilde{M} \to M$ induit une injection ouverte de U dans M. Comme M est connexe, l'image de cette injection est M tout entier, ce qui conclut.

Traitons maintenant l'autre cas: celui où $\mathcal{A}$ est une union d'intervalles I_n indexés suivant la convention du corollaire 2.11. On peut alors définir l'application $k : \Gamma \to \mathbb{Z}$ qui à un élément γ de Γ associe l'unique entier k tel que $\gamma(I_n) = I_{n+k}$. L'application k est un morphisme. Comme $\mathbb{Z}$ est abélien et que h^e est un produit de commutateurs, son image par k doit être nul. Or, $k(h)$ est non-nul: on en déduit que e est nul, i.e. que la fibration de M sur Σ est triviale. Cette remarque est d'ores et déjà suffisante pour compléter la preuve du théorème 4.1. Nous allons néanmoins continuer la preuve du théorème 4.2 en montrant que ce cas est impossible.

Considérons deux extrémités x et y de deux intervalles successifs non séparées l'une de l'autre. Par un argument qui nous est devenu classique, on voit que x et y correspondent à deux feuilles compactes F_1 et F_2 de $\mathcal{F}$. De plus, ces feuilles sont distinctes. Comme x et y ont le même stabilisateur pour l'action de Γ, F_1 et F_2 ont même groupe fondamental. Enfin, F_1 et F_2 sont incompressibles et leur nombre d'intersection avec les fibres de p sont non-nuls. D'après Waldhausen (cf. [18]), quitte à prendre un revêtement d'indice fini de M, les feuilles F_1 et F_2 peuvent être isotopées en des sections de p. Elles délimitent donc dans M deux variétés à bord M_1 et M_2, chacune homéomorphe au produit $F_1 \times [0, 1]$. Soit X un champ de vecteur transverse à $\mathcal{F}$. On vérifie aisément que comme x et y sont non séparés, X est rentrant dans M_1 ou M_2. Mais un champ de vecteurs sans singularité rentrant de $F_1 \times [0, 1]$ doit être d'indice nul, ce qui n'est possible que si F_1 est un tore, ce qui est exclu par hypothèse. ∎

5 Variétés sans feuilletages analytiques

Le but de cette section est de donner des exemples de variétés compactes à groupe fondamental infini telles que tout feuilletage de codimension un sur une d'entre elles admet nécessairement un lacet transverse homotopiquement trivial. Nous appellerons *réfractaire* une telle variété. Nous dirons qu'une variété est *partiellement réfractaire* si cette propriété n'est vérifiée que pour les feuilletages transversalement orientables.

Reprenant et généralisant la terminologie de [12], nous dirons qu'un groupe *admet la propriété (FA')* si toute action de ce groupe sur une 1-variété 1-connexe, Hausdorff ou non, admet un point fixe commun. Nous ne continuons pas entièrement l'analogie avec la théorie de Bass-Serre sur un point: en théorie de

Bass-Serre, une action sur un arbre simpliciale est dite triviale si elle admet un point fixe commun. Dans tout ce qui suit, une action sur une 1-variété est dite *triviale* si tous les points de la variété sont point fixe commun de l'action.

Proposition 5.1 *Si un groupe admet la propriété (FA'), toute action de ce groupe sur la droite réelle préservant l'orientation est triviale.*

Preuve Cette proposition est une simple remarque: si l'action n'est pas triviale, on obtient une contradiction en considérant la restriction de l'action à une composante connexe du complémentaire de l'ensemble des points fixes communs. ∎

Proposition 5.2 *L'ensemble des points fixes d'une action d'un groupe admettant la propriété (FA') sur une 1-variété 1-connexe est soit un ouvert connexe, soit réduit à un point, selon que cette action préserve ou non l'orientation.*

Preuve Soit Γ un groupe admettant la propriété (FA') agissant sur une 1-variété 1-connexe $\mathcal{L}$. L'ensemble Ω des points fixes de Γ est non vide. Comme un homéomorphisme de $\mathcal{L}$ renversant l'orientation n'a qu'un seul point fixe, le cas où Γ ne préserve pas l'orientation est trivial. Sinon: soient x et y deux éléments de Ω. Le pseudointervalle $[x, y]$ est Γ-invariant: chacune de ses composantes connexes l'est aussi. D'après la proposition 5.1, on en déduit que $[x, y]$ est contenu dans Ω. Soit X_- l'ouvert formés des éléments $\prec$-comparables inférieurement à x. C'est une 1-variété 1-connexe Γ-invariante. Elle admet donc un point fixe z de Γ. En raisonnant de même avec l'union des éléments $\prec$-comparables supérieurement à x, on trouve un élément t de Ω tel que x appartient à l'intérieur de $[z, t]$. Comme $[z, t]$ est contenu dans Ω, il s'en suit que Ω est ouvert, et le même fait montre aussi que cet ouvert est connexe. ∎

Corollaire 5.3 *La classe des groupes admettant la propriété (FA') est stable par extension, i.e., si Γ_1 est un groupe admettant la propriété (FA'), et si Γ est un groupe admettant un sous-groupe distingué isomorphe à Γ_1 tel que le quotient Γ_2 de γ par Γ_1 admet la propriété (FA'), alors Γ admet lui aussi la propriété (FA').*

Preuve On considère une action de Γ sur une 1-variété 1-connexe $\mathcal{L}$. Si Γ_1 renverse l'orientation de $\mathcal{L}$, il y admet un unique point fixe qui est alors point fixe de Γ. Sinon, d'après la proposition 5.2, l'ensemble Ω des points fixes de Γ_1, qui est Γ-invariant, est une 1-variété 1-connexe. De plus, l'action de Γ sur Ω passe au quotient en une action de Γ_2, et y admet donc un point fixe. ∎

Proposition 5.4 *Une variété compacte dont le groupe fondamental admet la propriété (FA') est partiellement réfractaire. Elle est réfractaire si de plus tout sous-groupe d'indice deux de son groupe fondamental admet la propriété (FA').*

Preuve La deuxième partie de l'énoncé n'est bien sûr qu'un simple corollaire de la première partie.

Soit donc $\mathcal{F}$ un feuilletage transversalement orientable sur une variété M dont le groupe fondamental Γ admet la propriété (FA'). Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\mathcal{L}_\mathcal{F}$ est une 1-variété. Soit Ω l'ensemble des éléments de $\mathcal{L}_\mathcal{F}$ fixés par tous les éléments du groupe fondamental Γ. L'hypothèse de la proposition 5.4 revient à supposer que Ω est non vide. D'après la proposition 5.2, Ω est un ouvert connexe. Soit x un élément de la frontière de Ω (s'il en existe!). C'est un point presque fixe de chaque élément de Γ. Donc, si un élément γ de Γ envoie x en un point comparable, c'est que x est point fixe de γ. On en déduit que l'orbite de x est un fermé discret, et donc correspond à une feuille compacte F_0 du feuilletage. L'intersection entre un intervalle ouvert voisinage de x et Ω doit être non-vide, ouverte, connexe et contenir x dans son adhérence. C'est donc un intervalle admettant x comme extrémité. Donc, l'holonomie de $\mathcal{F}$ le long de F_0 est triviale d'un côté. D'après le théorème de stabilité locale de Reeb (cf. théorème II.2.16 de [5]), il existe donc un voisinage de F_0 homéomorphe à $]-1, +1[\times F_0$ tel que $\{0\} \times F_0$

correspond à F_0, et tel que les feuilles de la restriction de $\mathcal{F}$ à $]-1,0] \times F_0$ soient les $\{t\} \times F_0$ où t est négatif. De plus, la partie correspondant à $\mathcal{F}$ à $]-1,0[\times F_0$ est contenue dans $\bar{\Omega}$. On en déduit que l'image dans Γ du groupe fondamental de F_0 est la même que celles des $\{t\} \times F_0$, et est donc Γ tout entier. Ceci contredit le fait que F_0 n'appartient pas à Ω. Donc, Ω n'a pas de frontière et est $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ tout entier. La projection de $\widetilde{M}$ sur $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ passe donc au quotient en une application continue surjective de M sur $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$. Ceci est absurde puisque M est compacte et que $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ ne l'est pas. ∎

Dans les parties à suivre, nous donnons deux exemples de groupes admettant la propriété (FA'), procurant ainsi des exemples de variétés réfractaires.

5.1 Eléments de torsion

Un homéomorphisme γ de $\mathcal{L}$ est dit de torsion si une de ses puissances γ^n est l'identité. Le fait que $\mathcal{L}$ n'est pas supposé Hausdorff devient ici important: en effet, il n'est plus vrai comme pour R que l'identité est le seul homéomorphisme de torsion préservant l'orientation.

Proposition 5.5 *Soit γ un homéomorphisme de torsion préservant l'orientation d'une 1-variété $\mathcal{L}$. L'ensemble de ses points fixes est un ouvert connexe non vide.*

Preuve Comme γ est de torsion, un élément x de $\mathcal{L}$ tel que $d(x, \gamma x)$ est pair est nécessairement point fixe de γ. En effet, les $\gamma^n x^+$ sont sinon des ouverts emboités les uns dans les autres. Il s'en suit d'après la proposition 2.9 que γ admet des points fixes. D'après le lemme 2.18, l'ouvert $\mathcal{E}(\gamma)$ est exactement l'ensemble des points fixes de γ. ∎

Proposition 5.6 *Soit Γ un groupe engendré par un nombre fini $a_1 \ldots a_n$ d'éléments de torsion. On suppose de plus que pour toute paire d'indices (i,j), un des produits $a_i a_j$ ou $a_i a_j^{-1}$ est lui aussi de torsion. Alors, Γ admet la propriété (FA').*

Preuve Nous traitons d'abord le cas où un des a_i renverse l'orientation. Supposons qu'il s'agit de a_1. Pour tout indice i supérieur à 1, on pose $b_i = a_i^{\pm 1}$ si a_i renverse l'orientation où le signe ± 1 est choisi de sorte que $a_1^{-1} b_i$ est de torsion. Observons qu'on peut toujours le faire: en effet, on sait par hypothèse que soit $a_i a_1$, soit $a_i a_1^{-1}$ est de torsion. Dans le premier cas, l'inverse $a_1^{-1} a_i^{-1}$ est de torsion: le choix du signe -1 convient. Sinon, dans le deuxième cas, le conjugué $a_1^{-1} a_i$ est de torsion: on choisit le signe $+1$.

Si a_i préserve l'orientation, on pose $b_i = a_1 a_i^{\pm 1}$, où le signe ± 1 est choisi pour que b_i soit de torsion. Alors, tous les b_i renversent l'orientation, sont de torsion et leur union engendre Γ. Soient x et y_i les points fixes de a_1 et de b_i. Si x et y_i sont différents, x déconnecte y_i de $a_1^{-1} y_i$, puisque a_1 échange les composantes connexes du complémentaire de x. Alors:

$$\begin{aligned} d(y_i, a_1^{-1} b_i y_i) &= d(y_i, a_1^{-1} y_i) \\ &= d(y_i, x) + d(x, a_1^{-1} y_i) \\ &= 2d(x, y_i) \end{aligned}$$

L'homéomorphisme $a_i^{\pm 1} = a_1^{-1} b_i$ est de torsion et préserve l'orientation. Comme $d(y_i, a_1^{-1} b_i y_i)$ est pair, y_i est égal à $a_1^{-1} b_i y_i = a_1^{-1} y_i$. Contradiction.

Nous supposons donc désormais que chaque a_i préserve l'orientation. Nous raisonnons par récurrence sur l'entier n. Le cas $n = 1$ correspond à la proposition 5.5. Supposons le théorème établi pour $n-1$: alors, le groupe engendré par $a_1, \ldots, a_{n-1}$ admet au moins un point fixe. Notons A l'ensemble de ses points fixes, et B l'ensemble des points fixes de a_n. D'après 5.5, ce sont des ouverts connexes. On veut montrer qu'ils se rencontrent; nous supposons donc par l'absurde qu'ils sont disjoints. Soient α et β les uniques éléments de ∂A et ∂B déconnectant A de B. Comme α n'appartient pas à A, il existe un indice k pour lequel a_k ne fixe pas α. Pour une raison analogue, β n'est pas point fixe de a_n. Nous sommes dans le cadre de la proposition 2.22: tous les $a_k^{\pm 1}a_n^{\pm 1}$ séparent les points de $\mathcal{L}$. Ceci est absurde puisque l'un d'entre eux doit être de torsion. Contradiction. ∎

Remarque Si on se restreint aux actions préservant l'orientation, la preuve ci-dessus montre que l'hypothèse sur Γ peut être affaiblie: il suffit en effet de supposer que les générateurs a_i sont de torsion, et que pour toute paire d'indices $i < j$, un des $a_i^{\pm 1}a_j^{\pm 1}$ est de torsion.

Corollaire 5.7 *Tout groupe contenant un sous-groupe d'indice fini admettant la propriété (FA') admet lui-même la propriété (FA').*

Preuve Soit Γ un groupe contenant un sous-groupe d'indice fini Γ' admettant la propriété (FA'). Nous considérons une action de Γ sur une 1-variété $\mathcal{L}$.

Supposons dans un premier temps que Γ' ne préserve pas l'orientation: il admet un unique point fixe commun x. Soit a un élément de Γ' renversant l'orientation, et γ un élément quelconque de Γ. Soit b le conjugué $\gamma a \gamma^{-1}$: b renverse l'orientation et son point fixe est γx. Supposons que γx est différent de x. Alors, γx déconnecte x de $bax = bx$, i.e.: $[x, bax] = [x, \gamma x] \cup [\gamma x, bx]$. On en déduit que $d(x, bax)$ est paire: x appartient à l'axe fondamental de ba. Si ba sépare les points, il découle du corollaire 2.11 qu'aucune puissance positive de ba ne fixe x. Si ba n'admet pas de point fixe mais admet des points presque fixes, il découle de la proposition 2.14 et du corollaire 2.16 que, là encore, aucune puissance positive de ba ne fixe x. Or, ba admet une puissance positive appartenant dans Γ', donc fixant x. Ceci montre que ba admet des points fixes, et que x appartient à $\mathcal{E}(ba)$ (cf. corollaire 2.21). Comme nous supposons que x n'est pas point fixe de ba, on voit que même dans ce cas x ne peut être fixé par une puissance positive de ba, puisqu'il appartient au domaine d'action d'un point fixe de ba. Cette contradiction finale montre que γx est égal à x. Ceci achève le cas où Γ' ne préserve pas l'orientation.

Nous supposons désormais que Γ' préserve l'orientation de $\mathcal{L}$. Soit Ω'_0 l'ensemble des points fixes de Γ'. C'est un ouvert connexe non vide (cf. proposition 5.2). Supposons que Γ' n'est pas un sous-groupe normal de Γ. Soit γ un élément de Γ qui ne normalise pas Γ'. Nous notons Γ'_1 le groupe engendré par Γ' et $\gamma\Gamma'\gamma^{-1}$. L'ensemble des points fixes Ω'_1 de Γ'_1 est l'intersection entre Ω'_0 et $\gamma\Omega'_0$. Supposons que cette intersection soit vide: il existe un élément α de $\partial\Omega'_0$ tel que α^c contient $\gamma\Omega'_0$, et un élément β de $\gamma\partial\Omega'_0$ pour lequel β^c contient Ω'_0. Comme α n'appartient pas à Ω'_0, i.e. n'est pas fixé par tous les éléments de Γ', il existe un élément a de Γ' tel que $a\alpha$ est différent de α. Il existe aussi un élément b de $\gamma\Gamma'\gamma^{-1}$ qui ne fixe pas β. D'après la proposition 2.22, ab sépare les points de $\mathcal{L}$. Or, une de ses puissances positives appartient à Γ', et doit donc fixer un point de Ω'_0. Cette contradiction montre que l'intersection Ω'_1 est non vide. Comme $\mathcal{L}$ est simplement connexe, cette intersection est un ouvert connexe. Si Γ'_1 n'est pas distingué dans Γ, on itère le raisonnement si dessus en prenant un élément γ_1 dans Γ qui ne le normalise pas. On construit de proche en proche des sous-groupes Γ'_i dont les points fixes forment des ouverts connexes emboîtés les uns dans les autres. Ce procédé a une fin, puisque les indices des Γ'_i dans Γ sont strictement décroissants. Donc, un des Γ'_i est distingué dans Γ. L'ensemble de ses points fixes est un ouvert connexe non vide Γ-invariant. L'action de Γ sur cet ouvert se résume à une action d'un groupe fini. D'après la proposition 5.6, elle admet un point fixe. ∎

Corollaire 5.8 *Toute variété dont le groupe fondamental vérifie les hypothèses de la proposition 5.6 est réfractaire.*

Preuve D'après 5.6 et 5.4, nous savons déjà qu'une telle variété est partiellement réfractaire. Nous devons donc juste traiter le cas où le groupe Γ agit sur $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ en renversant l'orientation. Nous notons Γ_0 le sous-groupe d'indice deux formé des éléments de Γ qui préservent l'orientation. L'action de Γ_0 sur $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ correspond au feuilletage relevé au revêtement de M associé à Γ_0. Si on montre que l'ensemble Ω des points fixes communs de Γ_0 forment un ouvert (connexe), on conclut aisément grâce aux arguments de la proposition 5.4.

Quitte à modifier les indices, on peut supposer que a_1 renverse l'orientation. Pour tous les indices i supérieurs à deux, on pose $a'_i = a_i$ si a_i préserve l'orientation, $a'_i = a_i a_1^{\pm 1}$ sinon, où le signe ± 1 est choisi pour que a_i' soit de torsion. Les a_i' appartiennent tous à Γ_0. On note A' le sous-groupe de Γ_0 qu'ils engendrent. Soit x un point fixe commun de Γ_0. Nous voulons montrer que Γ_0 agit trivialement sur un voisinage de x. Soit I un voisinage ouvert de x. Si x est point fixe de a_1, il est point fixe de Γ et appartient donc à l'intérieur de Ω. Sinon, on peut supposer que I est disjoint de son image par a_1. Comme les a_i' et a_1^2 sont de torsion et fixent x, quitte à diminuer I on peut supposer que A' et a_1^2 agissent trivialement sur I. Comme $a_1 x$ est lui aussi point fixe de Γ_0, quitte à diminuer encore I, on peut supposer aussi que A' et a_1^2 agissent trivialement sur $I' = a_1 I$. Tout élément de Γ_0 s'écrit sous la forme $\gamma = b_1 a_1^{k_1} \dots a_1^{k_{n-1}} b_n$ où chaque chaque b_i est un élément de A', chaque k_i un entier, et où la somme des k_i est paire. Or, comme A' agit trivialement sur I et I', et que a_1 échange I et I', il est immédiat de voir qu'un tel γ agit trivialement sur I et I'. Nous avons bien montré comme voulu que Γ_0 agit trivialement sur I. ∎

Les groupes de Coxeter donnent des exemples de groupes satisfaisant les hypothèses du corollaire 5.6 sans être finis!

5.2 Groupes arithmétiques

Nous consacrons cette section à la preuve du théorème suivant:

Théorème 5.9 *Pour tout entier $n \geq 3$, tout sous-groupe d'indice fini de $SL(n, \mathbb{Z})$ admet la propriété (FA').*

Corollaire 5.10 *Toute variété compacte dont le groupe fondamental est isomorphe à un sous-groupe d'indice fini de $SL(n, \mathbb{Z})$ est réfractaire.* ∎

Nous notons Γ^n le groupe $SL(n, \mathbb{Z})$. Nous fixons l'entier n, ce qui nous permet d'omettre parfois l'indice n de Γ^n. Nous notons $\mathcal{I}$ l'ensemble des couples d'entiers (i, j) $1 \leq i \neq j \leq n$. Pour tout élément $\alpha = (i, j)$ de $\mathcal{I}$, nous notons $-\alpha$ l'élément (j, i) de $\mathcal{I}$.

Pour chaque élément $\alpha = (i, j)$ de $\mathcal{I}$, nous notons A_α la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux sur la diagonales qui valent un, et celui de la i-ème ligne, j-ème colonne qui vaut lui aussi un.

Proposition 5.11 *Les A_α lorsque α parcourt $\mathcal{I}$ engendrent Γ.* ∎

Pour tout entier p, nous notons $\Gamma(p)$ ou $\Gamma(p)^n$ le sous-groupe de Γ engendré par les A_α^p où α décrit $\mathcal{I}$. Il est clair que tout sous-groupe d'indice fini de Γ contient un $\Gamma(p)$ pour p suffisament grand.

Théorème 5.12 *(Tits, [16]) Pour tout entier p, le sous-groupe $\Gamma(p)$ est d'indice fini dans Γ.* ∎

Soient $\alpha = (i, j)$ et $\alpha' = (k, l)$ deux éléments de $\mathcal{I}$, p et q deux entiers quelconques. On vérifie aisément les formules suivantes (nous rappelons que le commutateur de deux éléments a et b d'un groupe est $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$):

- Si $\{i, j\}$ et $\{k, l\}$ sont disjoints, alors A_α et $A_{\alpha'}$ commutent.
- Si $k = j$ et $i \neq l$, alors $[A_\alpha^p, A_{\alpha'}^q] = A_{\alpha''}^{pq}$ où $\alpha'' = (i, l)$.

On déduit de la deuxième formule que $\Gamma(p^2)$ est contenu dans le groupe des commutateurs de $\Gamma(p)$.

Soit k un entier compris entre 1 et n, et p un autre entier. On note $H_k(p)$ (respectivement $H_k(p)^*$, respectivement $S_k(p)$) le sous-groupe engendré par les A_α^p où α décrit l'ensemble des éléments de $\mathcal{I}$ de la forme (i, k) (respectivement (k, j), respectivement (i, j) avec $i \neq k$ et $j \neq k$).

Proposition 5.13 *Les groupes $H_k(p)$ et $H_k(p)^*$ sont chacun isomorphe à $\mathbb{Z}^{n-1}$. Le groupe engendré par leur réunion contient $\Gamma(p^2)$. Chacun d'entre eux est stable par conjugaison par les éléments de $S_k(p)$. Le groupe $S_k(p)$ est isomorphe à $\Gamma(p)^{n-1}$, et son action sur $H_k(p)$ et $H_k(p)^*$ par conjugaison est conjuguée à l'action naturelle de $\Gamma(p)^{n-1} \subset SL(n-1, \mathbb{Z})$ sur $\mathbb{Z}^{n-1}$. Tout sous-groupe non trivial de $H_k(p)$ (respectivement $H_k(p)^*$) stable par conjugaison par les éléments de $S_k(p)$ est d'indice fini dans $H_k(p)$ (respectivement $H_k(p)^*$).*

Preuve Ces faits sont aisés à vérifier. Pour montrer la dernière affirmation on peut tensoriser par R. Si le sous-groupe considéré n'est pas d'indice fini dans $H_k(p)$, son tensorisé par R est un sous-espace propre du tensorisé R^{n-1} de $H_k(p)$ préservé par l'action de $SL(n-1, \mathrm{R})$. Contradiction. ∎

Théorème 5.14 *(Witte, [19]) Toute action de $\Gamma(p)$ sur la droite réelle préservant l'orientation est triviale.*

Notre preuve de 5.9 contient bien sûr une preuve de ce théorème (voir deuxième cas de la troisième étape). Il doit bien être entendu que le cadre de [19] est plus général que celui que nous nous sommes donné ici.

Ces observations étant faites, nous en venons à la preuve même du théorème 5.9:

Preuve de 5.9 Comme tout sous-groupe d'indice fini de $SL(n, \mathbb{Z})$ contient un $\Gamma(p)$, pour montrer le théorème 5.9 il suffit d'après le théorème 5.12 et le corollaire 5.7 de montrer que toute action de $\Gamma(p)$ sur une 1-variété 1-connexe $\mathcal{L}$ admet un point fixe commun.

Considérons une telle action. Le premier groupe dérivé contient $\Gamma(p^2)$: l'action de ce dernier préserve donc l'orientation.

Lemme 5.15 *Pour indice k, si il existe un intervalle ouvert I dans $\mathcal{L}$ préservé par $H_k(p^2)$ et $S_k(p^2)$, alors $H_k(p^2)$ admet un point fixe commun dans I.*

Preuve Il est clair qu'un groupe abélien de type fini agissant sur R de sorte que chacun de ses générateurs admette un point fixe admet lui-même un point fixe: c'est un exercice que nous laissons au lecteur. Montrer le lemme revient donc à montrer que chaque élément de $H_k(p^2)$ admet un point fixe.

Soit H_0 l'ensemble des éléments de $H_k(p^2)$ qui admettent un point fixe dans I. Comme I est homéomorphe à la droite réelle, et que $H_k(p^2)$ est abélien, H_0 est un sous-groupe de $H_k(p^2)$. Il est clair que H_0 est invariant pour la conjugaison par $S_k(p^2)$. D'après la proposition 5.13, H_0 est soit réduit à l'élément neutre, soit d'indice fini dans $H_k(p^2)$. Dans le deuxième cas, on obtient que chaque élément de $H_k(p^2)$ admet un point fixe dans I, ce qui conclut. Dans le premier cas, l'action de $H_k(p^2)$ sur I est libre, et est donc semi-conjuguée à une action par translations (cf. [11]). De plus, comme $H_k(p^2)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^{n-1}$ avec n supérieur à 3, cette semi-conjugaison est unique à un facteur multiplicatif près. On en déduit que l'action du groupe engendré par $H_k(p^2)$ et $S_k(p^2)$ est semi-conjuguée à une action affine. Enfin, chaque générateur de $S_k(p^2)$ commute avec au moins un élément non trivial de $H_k(p^2)$: ceci montre que chaque élément de $S_k(p^2)$ correspond par la semi-conjugaison à une translation et non pas à une homothétie. On en déduit que chaque commutateur $[h, s]$ où h appartient à $H_k(p^2)$ et s à $S_k(p^2)$ agit trivialement sur I, ce qui est absurde car le sous-groupe qu'ils engendrent est d'indice fini dans $H_k(p^2)$ (c'est $H_k(p^4)$!). ∎

Première étape: Montrons que chaque $A_\alpha^{p^2}$ $(\alpha \in \mathcal{I})$ admet un point fixe.

Supposons que l'un des $A_\alpha^{p^2}$ $(\alpha \in \mathcal{I})$ sépare les points. Il admet alors un axe fondamental $\mathcal{A}$. Nous choisissons un indice k pour lequel $A_\alpha^{p^2}$ appartienne à $H_k(p^2)$. L'axe $\mathcal{A}$ est $H_k(p^2)$-invariant. De plus, si s est un élément quelconque de $S_k(p^2)$, le conjugué $sA_\alpha^{p^2}s^{-1}$ commute avec $A_\alpha^{p^2}$ et sépare les points de $\mathcal{L}$: on en déduit qu'il admet $\mathcal{A}$ pour axe fondamental. On en déduit que $\mathcal{A}$ est $S_k(p^2)$-invariant. D'après le lemme 5.15, cet axe ne peut pas être homéomorphe à la droite réelle. Il est donc une union d'intervalles fermés disjoints. On construit alors un homomorphisme $\rho : G \to \mathbb{Z}$ exactement comme lors de la preuve du théorème 4.1, où G est le groupe engendré par $H_k(p^2)$ et $S_k(p^2)$: ce morphisme consiste à associer à tout élément γ de G l'entier $\pm d(x, \gamma x)$ où x appartient à $\mathcal{A}$. Soit N le noyau de la restriction de ρ à $H_k(p^2)$. C'est un sous-groupe invariant par conjugaison par $S_k(p^2)$ ne rencontrant aucune puissance de $A_\alpha^{p^2}$: ceci contredit la proposition 5.13.

Donc, aucun des $A_\alpha^{p^2}$ $(\alpha \in \mathcal{I})$ ne sépare les points. Supposons que l'un d'entre eux n'admet pas de point fixe. D'après la proposition 2.14 il admet un unique intervalle I invariant. Donc, I est l'unique intervalle $H_k(p^2)$-invariant (nous avons encore choisi k pour que $A_\alpha^{p^2}$ appartienne à $H_k(p^2)$). Comme $S_k(p^2)$ normalise $H_k(p^2)$, on en déduit que I est $S_k(p^2)$-invariant. Ceci contredit le lemme 5.15.

Deuxième étape: Chaque $H_k(p^2)$ admet un point fixe commun.

Pour un indice k fixé, nous notons a_i $(1 \leq i \leq n-1)$ les générateurs de $H_k(p^2)$. Pour chaque indice j entre 1 et $n-1$, nous notons G_j le sous-groupe de $H_k(p^2)$ engendré par les j premiers a_i. Nous montrons par récurrence sur j que G_j admet un point fixe commun. Cette affirmation est vraie pour $j = 1$: c'est le résultat de la première étape. Supposons la vraie pour $j-1$. Soit $\mathcal{E}_j$ l'intersection de tous les $\mathcal{E}(a_i)$ pour i inférieur à $j-1$ (cf. proposition 2.19). C'est un ouvert connexe, non vide puisqu'il contient les points fixes de G_{j-1}. Il est $H_k(p^2)$-invariant. Supposons que a_j ne fixe pas de points dans $\mathcal{E}_j$: alors, s'il ne sépare pas les points de $\mathcal{E}_j$, il admet un unique intervalle invariant dans $\mathcal{E}_j$ (cf. 2.14). Mais même s'il sépare les points, son axe invariant est un intervalle d'après le corollaire 2.20. Donc, a_j admet un unique intervalle invariant I dans $\mathcal{E}_j$. Cet intervalle est *a fortiori* l'unique intervalle $H_k(p^2)$-invariant dans $\mathcal{E}_j$ et donc dans $\mathcal{L}$, puisque tout intervalle $H_k(p^2)$-invariant doit appartenir à $\mathcal{E}_j$ d'après le lemme 2.18. A ce titre, il est $S_k(p^2)$-invariant. Ceci contredit une nouvelle fois le lemme 5.15. Donc, a_j fixe un point dans $\mathcal{E}_j$. Supposons qu'aucun point fixe de a_j n'est fixé par tous les éléments de G_{j-1}. D'après 2.19, aucun de ces points fixes n'est un point de branchement dans $\mathcal{E}_j$. L'intersection entre $\mathcal{E}_j$ et $\mathcal{E}(a_j)$ est donc un intervalle ouvert non vide $H_k(p^2)$-invariant. Notons le J. Tout intervalle ouvert G_j-invariant devant être contenu dans J d'après le lemme 2.18, on en déduit que J est l'unique intervalle dans $\mathcal{L}$ qui est $H_k(p^2)$-invariant. A ce titre, il est $S_k(p^2)$-invariant. Là encore, le lemme 5.15 amène à une contradiction: a_j et G_{j-1} admettent un point fixe commun.

Ceci montre l'hérédité de l'hypothèse de récurrence, et achève la deuxième étape.

Troisième étape: points fixes communs de $\Gamma(p^8)$.

Soit $\mathcal{E} = \mathcal{E}_n$ l'intersection des $\mathcal{E}(h)$, où h décrit $H_k(p^2)$. C'est un ouvert connexe $H_k(p^2)$-invariant. D'après le lemme 2.18, c'est l'ensemble des points de $\mathcal{L}$ qui sont comparables avec tous leurs $H_k(p^2)$-itérés. Il est donc $S_k(p^2)$-invariant.

De manière analogue, nous construisons un ouvert connexe $\mathcal{E}^*$ qui est $H_k^*(p^2)$ et $S_k(p^2)$-invariant.

Nous distinguons désormais deux cas:

Premier cas: $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}^*$ sont disjoints:

Soient β et β^* les uniques éléments de $\partial\mathcal{E}$ et de $\partial\mathcal{E}^*$ déconnectant $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}^*$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^* & \subset & (\beta)^c \\ \mathcal{E} & \subset & (\beta^*)^c \end{array}$$

Comme $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}^*$ sont $S_k(p^2)$-invariants, β et β^* sont des points fixes de $S_k(p^2)$. $H_k(p^2)$ ne peut pas fixer β puisque β n'appartient pas à $\mathcal{E}$. Il existe donc un indice $\alpha = (i_0, k) \in \mathcal{I}$ pour lequel $h_0 = A_\alpha^{p^2}$ ne fixe pas β. Alors, pour tout $j \neq i_0, k$, si on note h_j^* l'élément $A_{(k,j)}^{p^2}$ de $H_k^*(p^2)$, le commutateur $[h_0, h_j^*]$ est l'élément $A_{(i_0,j)}^{p^4}$ de $S_k(p^4)$. Il fixe donc β^*. Supposons que h_j^* ne préserve pas β^*. Alors, $(h_j^*)^{-1}\beta^*$ est dans une composante connexe de $\mathcal{L} \setminus \mathcal{E}^*$ autre que $(\beta^*)^c$. Il est donc contenu à l'intérieur de β^c. De manière analogue, on montre que $h_0^{-1}(h_j^*)^{-1}\beta^*$ appartient à l'intérieur de $(\beta^*)^c$. En appliquant deux nouvelles fois ce raisonnement, on obtient que $[h_0, h_j^*]\beta^*$ appartient à l'intérieur de $(\beta^*)^c$, ce qui contredit le fait que β^* est point fixe de ce commutateur. Nous avons donc montré par l'absurde que tous les h_j^* pour j différent de k et de i_0 fixent β^*. Il s'en suit que $A_{(k,i_0)}^{p^2}$ ne fixe pas β^* puisque celui-ci ne peut pas être fixé par tout

$H_k^*(p^2)$. Donc, de manière analogue, tous les $A_{(i,k)}^{p^2}$ pour i différent de i_0 et de k fixent β. Or, pour un tel indice i, $A_{(i_0,i)}^{p^2}$ est un élément de $S_k(p^2)$ et fixe donc β. Le commutateur $[A_{(i_0,i)}^{p^2}, A_{(i,k)}^{p^2}] = A_{(i_0,k)}^{p^4} = h_0^{p^2}$ fixe donc β. On en déduit que β est point fixe de $H_k(p^4) \subset H_k(p^2)$. Il en découle également que β est un point presque fixe de h_0: en effet, si β n'est pas un point presque fixe de h_0, il est non séparé d'un point y de $\mathcal{E}$. Ce point y n'est pas point fixe de h_0 (sinon β serait presque fixe) et vérifie donc $y \prec h_0 y$ pour une orientation convenable. On obtient la contradiction $\beta \approx y \prec h_0^{p^2} y \approx h_0^{p^2} \beta = \beta$.

Comme $h_0^{-1}(\beta^*)$ appartient à $h_0^{-1}(\beta^c)$, le pseudointervalle $[\beta^*, h_0^{-1}\beta^*]$ contient β ainsi que $h_0^{-1}(\beta)$. Nous venons de voir que β et $h_0^{-1}(\beta)$ sont non séparés: ceci n'est possible que s'ils sont l'un comme l'autre extrémité d'une des composantes connexes de $[\beta^*, h_0^{-1}\beta^*]$. Mais, pour tout indice $j \neq i_0, k$ le commutateur $[h_0, h_j^*]$ fixant β^*, on voit que $h_0^{-1}\beta^*$ est point fixe de h_j^*. Comme β^* est lui aussi point fixe des h_j^*, il s'en suit que β est point fixe de chaque h_j^*. On en déduit comme pour $H_k(p^4)$ que β est point fixe de $H_k^*(p^4)$. Donc, β est point fixe de $\Gamma(p^8)$.

Deuxième cas: $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}^*$ se rencontrent:

Nous remarquons d'abord que ce cas est celui qui se produit lorsque $\mathcal{L}$ est Hausdorff, c'est-à -dire homéomorphe à la droite réelle. En effet, dans ce cas $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}^*$ sont $\mathcal{L}$ tout entier.

Dans le cas général, l'intersection $\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^*$ est un ouvert connexe non vide. S'il admet des points de branchement, ceux-ci sont d'après 2.19 des points fixes communs à $H_k^*(p^2)$ et $H_k(p^2)$. Ceci achève la preuve de la troisième étape dans ce cas puisque ces deux groupes engendrent $\Gamma(p^4)$ (cf. 5.13).

Nous supposons donc désormais que $\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^*$ est un intervalle ouvert, que nous notons I. Cet intervalle est $S_k(p^2)$-invariant, mais n'a pas de raison *a priori* d'être $H_k(p^2)$-invariant. C'est ce que nous allons pourtant montrer maintenant.

Supposons que I ne contient pas de point fixe de $H_k(p^2)$. Soit J l'union des intervalles ouverts contenus dans $\mathcal{E}$ qui contiennent I, mais qui ne contiennent pas de points fixes communs de $H_k(p^2)$. C'est un ouvert connexe qui est préservé par $S_k(p^2)$ puisque celui-ci préserve I, $\mathcal{E}$ et l'ensemble des points fixes de $H_k(p^2)$. D'après 2.19, il est Hausdorff. C'est donc un intervalle ouvert. Sa frontière dans $\mathcal{E}$ est non-vide: soit x un élément de cette frontière. Soit K un intervalle voisinage ouvert de x. Toujours d'après 2.19, x est séparé de tous les points de J. Donc, l'union de J et de K est un intervalle ouvert. Vu la définition de J, ceci n'est possible que si x est point fixe de $H_k(p^2)$. Pour tout élément h de $H_k(p^2)$, l'intervalle J rencontre son itéré par h. Comme J ne contient pas de point de branchement de $\mathcal{E}$, on en déduit que J est contenu dans hJ, ou vice-versa. Dans le premier cas, la maximalité de J implique son égalité avec hJ. Dans le deuxième cas, $h^{-1}J$ contient J, ce qui montre là encore par maximalité de J que celui-ci est h-invariant. Donc, J, qu'on sait déjà être $S_k(p^2)$-invariant, est aussi $H_k(p^2)$-invariant. D'après le lemme 5.15, il doit contenir des points fixes de $H_k(p^2)$, ce qui contredit sa définition.

Donc, I doit contenir des points fixes de $H_k(p^2)$. Il rencontre donc tous ses itérés par les éléments de $H_k(p^2)$: soit $\tilde{I}$ l'union de tous ces itérés. C'est un ouvert connexe contenu dans $\mathcal{E}$ qui est invariant par $S_k(p^2)$ et $H_k(p^2)$. Les seuls points fixes de $H_k(p^2)$ qu'il contient sont ceux qui étaient déjà dans I. D'après 2.19, il est donc Hausdorff pour la topologie induite. Supposons que I n'est pas $\tilde{I}$ tout entier. Soit x une de ses extrémités dans $\tilde{I} \simeq \mathrm{R}$. Si on oriente convenablement, x est une borne inférieure de I. L'intervalle $]-\infty, x[$ n'admet aucun point fixe de $H_k(p^2)$, puisque ceux-ci appartiennent à I. Soit $\bar{x}$ la borne supérieure dans $\tilde{I}$ de l'orbite par $H_k(p^2)$ de x. Alors, $]-\infty, \bar{x}[$ est un intervalle ouvert $H_k(p^2)$-invariant qui ne contient aucun point fixe commun de $H_k(p^2)$. Comme I et $\tilde{I}$ sont $S_k(p^2)$-invariants, x est un point fixe de $S_k(p^2)$. On en déduit que $\bar{x}$ est un point fixe de $S_k(p^2)$. On obtient alors une contradiction avec 5.15 appliqué à l'intervalle $]-\infty, \bar{x}[$.

Ainsi, $I = \tilde{I}$, ce qui montre que I est $H_k(p^2)$-invariant. De manière analogue, il est également $H_k^*(p^2)$-invariant. Il est donc préservé par $\Gamma(p^2)$ tout entier. Pour achever la troisième étape, nous devons donc juste démontrer le théorème 5.14, ce à quoi nous consacrons la fin de la troisième étape.

D'après la proposition 5.1, il suffit de montrer que toute action de $\Gamma^n(q)$ (pour q entier positif) sur R préservant l'orientation admet un point fixe. Voyons tout d'abord qu'il suffit de le montrer pour $n = 3$. On peut alors en effet le montrer pour les autres entiers n par récurrence sur ce même entier: s'il est établi pour $n-1$, alors l'action de chaque $S_k^n(q) \simeq \Gamma(q)^{n-1}$ doit être triviale. Or, les $S_k^n(q)$ engendrent Γ_q^n.

Nous supposons désormais $n = 3$. Nous prenons les notations suivantes: $a = A^q_{(1,2)}$, $a' = A^q_{(2,1)}$, $b = A^q_{(1,3)}$, $b' = A^q_{(3,1)}$, $s = A^q_{(2,3)}$ et $s' = A^q_{(3,2)}$. D'après tout ce qui précède, chacun de ces six générateurs admet des points fixes. En fait, a et b admettent un point fixe commun, et a' et b' admettent eux-aussi un point fixe commun. Comme a, a', b et b' engendrent $\Gamma(q^2)$, il suffit de montrer qu'ils admettent un point fixe commun (il convient de remarquer qu'un point fixe commun pour un sous-groupe d'indice fini de $\Gamma(q)$ est nécessairement un point fixe commun pour $\Gamma(q)$). Nous raisonnons par l'absurde et supposons qu'aucun point de R n'est fixé simultanément par a, b, a' et b'.

Soit x un point fixe commun à a et b, y un point fixe commun à a' et b'. On peut supposer que y est supérieur à x. Soit y_0 le plus petit point fixe commun à a' et b' supérieur à x, et x_0 le plus grand point fixe commun à a et b inférieur à y_0. Nous avons $x_0 < y_0$, et l'intervalle $]x_0, y_0[$ ne contient aucun point fixe commun à a et b, ou à a' et b'. Cette propriété montre que s, qui préserve par conjugaison les groupes engendrés respectivement par a, b, et a', b', ne peut envoyer x_0 ou y_0 dans $]x_0, y_0[$. Donc, soit les itérés par s de $]x_0, y_0[$ sont deux-à-deux disjoints, soit ils sont tous égaux à $]x_0, y_0[$. Dans le premier cas, comme s admet des points fixes, on voit que les itérés par s où s^{-1} de x_0 et de y_0 admettent une limite commune, qui est alors un point fixe commun à a, b, a', b' et s: contradiction.

Donc, s préserve $]x_0, y_0[$. De même, s' préserve $]x_0, y_0[$. En d'autres termes, x_0 (respectivement y_0) est un point fixe commun à a, b, s et s' (respectivement a', b', s et s').

On applique maintenant le raisonnement précédent mais en faisant permuter cycliquement les rôles de a, b, s, a', b' et s': on note y_1 le plus petit point fixe commun à b' et s' supérieur à x_0, et x_1 le plus grand point fixe commun à b et s inférieur à y_1. On voit alors que soit b, s, b' et s' admettent un point fixe commun, ce qui conclut; soit $x_0 < x_1 < y_1 < y_0$, et x_1, y_1 sont des points fixes de a et de a'. Ceci est absurde: x_1 serait un point fixe commun à a et b appartenant à $]x_0, y_0[$.

Quatrième et ultime étape: point fixe de $\Gamma(p)$.

Soit Γ' l'intersection de tous les conjugués de $\Gamma(p^8)$ dans $\Gamma(p)$. C'est un sous-groupe normal d'indice fini de $\Gamma(p)$, et comme il est contenu dans $\Gamma(p^8)$, il admet des points fixes. Soit Ω' l'ensemble de ses points fixes. Il est $\Gamma(p)$-invariant. Soient x et y deux éléments de Ω'. Chaque composante connexe de $[x, y]$ est Γ'-invariante. D'après le théorème 5.14, le fait que Γ' contient un $\Gamma(q)$ d'indice fini, et que toute action préservant l'orientation d'un groupe fini sur R est triviale, on voit que Ω' contient $[x, y]$. Le problème est que Ω' n'a pas de raison *a priori* d'être ouvert.

Soit q un entier positif tel que Γ' contient $\Gamma(q)$. Soit Γ'' l'intersection des conjugués dans $\Gamma(p)$ de $\Gamma(q^8)$. Il est contenu dans Γ'. Notons Ω'' l'intérieur de l'ensemble des points fixes de Γ''. C'est un ouvert $\Gamma(p)$-invariant (remarquons que nous ne savons pas encore qu'il est non vide). Il admet une propriété de convexité analogue à celle de Γ': tout *intervalle* dont les extrémités appartiennent à Ω'' est contenu dans Ω''. Soit x un élément de Ω'. En considérant l'action de $\Gamma(q) \subset \Gamma'$ sur les ouverts des éléments de $\mathcal{L}$ qui sont respectivement $\prec$-supérieurs et $\prec$-inférieurs à x, on obtient, d'après tout ce qui précède, que chacun de ses deux ouverts contient un point fixe de Γ''. Ces points fixes sont extrémités d'un intervalle contenant x en son intérieur. Donc, x appartient à Ω''. Nous affirmons davantage: Ω' est contenu dans une même composante connexe de Ω''. Soient en effet x et y deux éléments de Ω'. Nous avons observé précédemment que $[x, y] = [x_0, y_0] \cup \ldots \cup [x_n, y_n]$ est contenu dans Ω' (et donc dans Ω''). Pour tout indice i, les extrémités x_{i+1} et y_i sont non séparées. Comme Ω'' est ouvert, il s'en suit que x_{i+1} et y_i appartiennent à la même composante connexe de Ω''. Ceci établit notre affirmation.

Notons Ω''_0 la composante connexe de Γ'' contenant Ω'. C'est un ouvert connexe $\Gamma(p)$-invariant puisque Ω' et Ω'' sont $\Gamma(p)$-invariants. Or, Γ'' agit trivialement sur Ω'' et est d'indice fini dans $\Gamma(p)$. L'action de $\Gamma(p)$ sur Ω''_0 transite donc par l'action d'un groupe fini. Elle admet donc un point fixe. ∎

Références

[1] T. Barbot, *Géométrie transverse des flots d'Anosov,* Thèse, Lyon (1992).

[2] T. Barbot, *Flots d'Anosov sur les variétés graphées au sens de Waldhausen,* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **46** (1996), 1451-1517.

[3] D. Eisenbud, U. Hirsch et W. Neumann, *Transverse foliations of Seifert bundles and self homeomorphism of the circle,* Comment. Math. Helv. **56** (1981), 638-660.

[4] E. Ghys, *Flots d'Anosov sur les 3-variétés fibrées en cercles,* Ergod. Th. & Dynam. Sys. **4** (1984), 67-80.

[5] C. Godbillon, *Feuilletages, études géométriques,* Progress in Math. **98** (1991), Birkhäuser.

[6] A. Haefliger, *Groupoïdes d'holonomie et classifiants,* Astérisque **116** (1984), 70-97.

[7] A. Haefliger et G. Reeb, *Variétés (non séparées) à une dimension et structures feuilletées du plan,* Ens. Math.**3** (1957), 107-125.

[8] G. Levitt, *Feuilletages des variétés de dimension trois qui sont des fibrés en cercles,* Comment. Math. Helv. **53** (1978), 572-594.

[9] S. Matsumoto, *Codimension one foliations on solvable manifolds,* Comment. Math. Helv. **68** (1993), 633-652.

[10] C. F. B. Palmeira, *Open manifolds foliated by planes,* Ann. Math. **107** (1978), 109-131.

[11] J.F. Plante, *Solvable groups acting on the line,* Trans. Amer. Math. Soc. **278** (1983), 401-414.

[12] J.P. Serre, *Arbres, amalgames, SL_2,* Astérisque **46** (1977)

[13] W. Thurston, *Foliations on 3-manifolds which are circle bundles,* Thèse, Berkeley (1972).

[14] W. Thurston, *Existence of codimension-one foliations,* Ann. Math., **104** (1976), 249-268.

[15] J. Tits, *A "theorem of Lie-Kolchin" for trees,* Contribution to Alg., Academic Press (1977), 377-388.

[16] J. Tits, *Systèmes générateurs de groupes de congruence,* C.R. Acad. Sc. Paris **283** (1976), 693-695.

[17] J. Wood, *Bundles with totally disconnected structure group,* Comment. Math. Helv. **46** (1971), 257-273.

[18] F. Waldhausen, *Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. I,* Invent. Math., **3** (1967), 308-333.

[19] D. Witte, *Arithmetic groups of higher* $\mathbf{Q}$*-rank cannot act on* 1*-manifolds,* Trans. Amer. Math. Soc. **345** (1994), no.2, 577-594.