

(G,X)-STRUCTURES ET TROUS NOIRS

THIERRY BARBOT

PRÉAMBULE

Pour préparer ces notes, nous avons réemployé (et adapté) les notes du cours de DEA [3]. Le lecteur est invité à consulter ces notes.

Notre ambition dans ce cours est de présenter de manière élémentaire les notions de structures géométriques ((G, X) -structures), pour aboutir à la description en ces termes des (multi-)trous noirs BTZ introduits vers 1992 comme paradigme d'espace-temps en vue d'une meilleure compréhension de la gravitation quantique (nous ne parlerons, faute de compétence, que des aspects "classiques"). Nous nous permettons dans la suite de ce préambule de proférer un commentaire moins élémentaire sur les principes qui nous animent, mais espérons ce faisant ne pas laisser une impression erronée sur les prérequis nécessaires à sa compréhension.

Les espaces-temps sont des objets éminemment géométriques - des variétés lorentziennes. Les outils mathématiques traditionnellement utilisés dans leurs études sont d'une part ceux fournis par l'analyse - les métriques lorentziennes considérées sont des solutions d'une équation aux dérivées partielles particulièrement délicate, l'équation d'Einstein, d'autre part, la géométrie différentielle, les phénomènes locaux étant prééminents, en raison du caractère local des lois et équations physiques. Mais, l'étude des phénomènes globaux, faisant intervenir par exemple la topologie de l'espace total, reste comparativement peu développée, même si elle focalise beaucoup des attentions récentes, en raison des besoins pour établir une quantification de la gravitation. La cosmologie, ainsi que la notion de trou noir, font appel à de telles notions de caractère global - un trou noir ne pouvant être défini de manière générale que comme étant ce qu'on ne peut voir de très loin, ce qu'on formule sous la forme "à l'infini". Pour un développement de ces notions, voir par exemple [4].

La géométrie différentielle traditionnelle, essentielle pour introduire les équations (relativistes) de la physique sous forme géométrique, est assez mal adaptée pour ces aspects globaux. En d'autres termes, l'étude de l'équation d'Einstein dans une carte locale est assez bien comprise, mais comprendre comment de telles cartes s'agencent entre elles est un problème de nature différente - ce genre de question relève, au risque d'être un peu pompeux, de la théorie des faisceaux. Tentant une formule imagée, je dirais que vouloir traiter tous les aspects de la relativité générale en ne travaillant que dans des cartes locales revient à vouloir résoudre tous les problèmes de géométrie euclidienne en les formulant sous leur forme cartésienne (dans des coordonnées cartésiennes), or, les exemples ne manquent pas pour mettre en évidence la maladresse d'une telle démarche si elle devient systématique.

La notion de (G, X) -structure est justement adaptée pour cette étude de recollements de cartes, c'est même son sujet d'étude propre. Elle a l'inconvénient de ne pas considérer les phénomènes locaux - mais un juste traitement consiste à équilibrer aspects locaux et aspects

globaux. Du reste, en dimension $2 + 1$, satisfaire l'équation d'Einstein, dans le vide et avec constante cosmologique, équivaut à être à courbure constante, donc localement modelé sur un espace modèle, c'est-à-dire précisément être une (G, X) -variété pour certains couples (G, X) .

Dans la première séance, dans l'idée de développer avant tout une perception visuelle des notions en jeu, et considérant que la notion de variété n'est pas un prérequis exigible de tout l'auditoire, nous ne traiterons en exemples que des surfaces obtenues en recollant des "polygones" du plan, puis fournirons la définition formelle de (G, X) -structure.

Lors de la deuxième séance, nous présenterons le Théorème du polyèdre fondamental de Poincaré, la notion affiliée de groupe de Schottky et, de manière concomitante, les notions d'application développante et représentation d'holonomie.

Enfin, la dernière séance sera dévolue à la description même des trous noirs BTZ, à la lumière des modèles locaux usuels des trous noirs un peu plus réalistes. Cette séance est moins élémentaires que les deux premières, mais nous avons estimé que les participants auront tous à ce stade de l'école été familiarisés avec les notions courantes de géométrie lorentzienne.

PREMIÈRE SÉANCE : ATELIER DE COLLAGE

1. CONSTRUCTION DE SURFACES COMPACTES

Donnons-nous un¹ polygone P du plan avec un nombre pair $2n$ de côtés, et donc $2n$ sommets (ici, le polygone est considéré fermé, d'intérieur non-vide). Nous supposons ce polygone convexe : ce faisant, nous ne perdons aucune généralité, mais y gagnons beaucoup en facilité de rédaction.

On choisit une involution sans point fixe σ de l'ensemble des arêtes \mathcal{A} . Ceci partitionne \mathcal{A} en paires $(a, \sigma(a))$. On choisit pour chaque arête a un homéomorphisme $\varphi_a : a \rightarrow \sigma(a)$, de sorte que $\varphi_{\sigma(a)} \circ \varphi_a$ soit l'identité de a pour tout a . On identifie pour chaque a chaque élément x de a avec son image $\varphi_a(x)$. Ces identifications, appelées *collages*, engendrent une relation d'équivalence \sim sur P .

L'espace quotient $S = P / \sim$ muni de la topologie quotient est une surface, i.e. une variété de dimension 2 (de classe C^0).

Définition 1.1. *Un espace topologique M est une variété de dimension n si :*

- *tout point admet un voisinage homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^n ,*
- *il est séparable (sa topologie est engendrée par un nombre dénombrable d'ouverts),*
- *il est séparé au sens de Hausdorff : pour toute paire de points distincts x et y , il existe des voisinages respectifs de x et de y qui sont disjoints.*

Vérifier les axiomes de séparabilité et de séparation dans le cas de notre surface S ne présente pas ici de difficulté. Trouver un voisinage homéomorphe à un disque pour un point de S représenté par des points à l'intérieur de P est aussi une partie de plaisir. Un point $[x]$ de S représenté par un élément x de P à l'intérieur d'une arête a n'est guère plus difficile, vu que la classe d'équivalence $[x]$ consiste en deux points x et $\varphi_a(x)$.

La chose se complique légèrement lorsque $[x]$ est représenté par des sommets de P . Définissons pour se faire les *cycles de sommet* : soit s un sommet de P , on le note s_0 . On considère l'arête a_0 de P partant de s dans le sens trigonométrique. $\sigma(a_0)$ est une arête contenant $s_1 = \varphi_{a_0}(s_0)$. Soit a_1 l'autre arête de P contenant s_1 (l'autre signifiant $a_1 \neq \sigma(a_0)$). On définit alors $s_2 = \varphi_{a_1}(s_1)$ et a_2 , l'arête contenant s_2 et différente de $\sigma(a_1)$, etc... Il existe un entier k tel que $(a_k, s_k) = (a_0, s_0)$. On note $k(s_0)$ le plus petit entier non nul vérifiant $(a_k, s_k) = (a_0, s_0)$. La suite $(a_1, a_2, \dots, a_{k(s_0)})$ est alors un *cycle de sommets*.

Un *secteur*, ou *angle*, est un voisinage convexe dans P d'un sommet. Un voisinage dans S de $[s]$ est obtenu en recollant bord sur bord les divers secteurs des sommets apparaissant dans un cycle de sommets. Il apparaît clairement qu'un tel voisinage est homéomorphe au disque.

En résumé, l'espace topologique S est bien une surface. Relevons, sans preuve, que toute surface compacte sans bord, à homéomorphisme près, s'obtient par ce procédé.

¹Nous aurions pu prendre une collection finie de tels polygones, mais nous préférons simplifier l'exposition et les notations au détriment d'une généralité, qui est somme toute facile à reconstituer.

2. REVÊTEMENT UNIVERSEL

On considère l'ensemble $\widehat{\Gamma}$ des suites finies (a_1, a_2, \dots, a_k) d'éléments de \mathcal{A} de longueur quelconque (éventuellement zéro !). On a une opération simple sur $\widehat{\Gamma}$: la concaténation $*$, définie par $(a_1, a_2, \dots, a_k) * (b_1, b_2, \dots, b_l) = (a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l)$

Nous définissons la relation d'équivalence \sim sur $\widehat{\Gamma}$ engendrée par les deux relations de la manière suivantes (pour tout a de \mathcal{A} , et tout α, β , de $\widehat{\Gamma}$) :

- $\alpha * (a, \sigma(a)) * \beta \sim \alpha * \beta$,
- $\alpha * \gamma * \beta \sim \alpha * \beta$ si $\gamma = (a_{k(s_0)}, \dots, a_2, \dots, a_1)$ avec soit $(a_1, a_2, \dots, a_{k(s_0)})$, soit $(a_{k(s_0)}, \dots, a_1)$ un cycle de sommets.

Nous notons \sim la relation d'équivalence engendrée par ces identifications. La classe d'équivalence d'un élément α de $\widehat{\Gamma}$ sera notée $[\alpha]$.

On note Γ le quotient $\widehat{\Gamma} / \sim$ muni de la topologie discrète.

Proposition 2.1. Γ est un groupe.

Preuve En effet, la concaténation induit une loi de multiplication associative, pour laquelle la classe du mot vide est un élément neutre, et tout élément $[a_1, a_2, \dots, a_k]$ admet un inverse : $[\sigma(a_k), \sigma(a_2), \dots, \sigma(a_1)]$. ■

Sur $P \times \Gamma$ on identifie $(x, [a_1, a_2, \dots, a_k])$ avec $(y, [a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}])$ dès que x appartient à a_{k+1} et $y = \varphi_{a_{k+1}}(x)$ (pourquoi est-ce bien défini ?). Ceci engendre une relation d'équivalence sur $P \times \Gamma$, dont l'espace quotient, muni de la topologie quotient, est noté \widetilde{S} . On peut montrer comme pour S que \widetilde{S} est une surface, et que $(x, [a_1, a_2, \dots, a_k]) \mapsto x$ passe aux quotients en une application $p : \widetilde{S} \rightarrow S$.

Cette application est un homéomorphisme local (voir définition 2.2). Elle est même un peu plus : on peut montrer que tout point de S admet un voisinage ouvert U tel que l'ouvert $p^{-1}(U)$ est homéomorphe au produit $U \times \Gamma$, l'application p correspondant alors à la projection sur le premier facteur $(x, \gamma) \mapsto x$.

Ceci signifie littéralement que p est une *application de revêtement*. Discutons un peu plus cette notion cruciale pour nous : dans tout ce qui suit, E et B désignent des variétés. De plus, B est supposée connexe. Nous conseillons la lecture complémentaire des chapitres VII, VIII et IX de [9], la lecture du présent texte pouvant être redondante (indiquons quand même que Godbillon se place dans le cadre plus général des espaces localement connexes).

Définition 2.2. Une application $p : E \rightarrow B$ est un homéomorphisme local si tout point x de E admet une assiette, i.e. un voisinage ouvert U tel que $p(U)$ soit ouvert et que $p : U \rightarrow p(U)$ soit un homéomorphisme.

Un homéomorphisme local est donc continu et ouvert. Le théorème d'invariance locale énonce qu'un ouvert de \mathbb{R}^n ne peut être homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^p que si $n = p$. Ainsi, l'existence d'un homéomorphisme local entre E et B implique que E et B ont même dimension.

Nous avons le parti pris de ne considérer que des variétés, mais il est bien clair que la notion d'homéomorphisme local s'applique à toute application entre espaces topologiques quelconques. Il est tout aussi clair que si $p : E \rightarrow B$ est un homéomorphisme local entre espaces topologiques séparés au sens de Hausdorff, E est une variété si et seulement si B l'est : tout atlas de B fournit *via* p un atlas sur E , et *vice versa*.

Lorsque (puisque) E et B sont des variétés, une application différentiable $p : E \rightarrow B$ est un homéomorphisme local ssi la différentielle en tout point est inversible (théorème d'inversion locale).

Définition 2.3. *Un homéomorphisme local $p : E \rightarrow B$ est un revêtement si il admet la propriété de relèvement des chemins, i.e. si pour toute application continue \bar{c} de l'intervalle $[0, 1]$ dans B et tout point x de E tel que $p(x) = \bar{c}(0)$, il existe une application $c : [0, 1] \rightarrow E$ telle que $c(0) = x$ et $p \circ c = \bar{c}$.*

L'exemple trivial de revêtement est la projection sur le premier facteur $E = B \times \Lambda \rightarrow B$. Mais il y en a d'autres !

Remarque 2.4. Cette définition n'est sans doute pas la meilleure comme point de départ pour l'exploration des revêtements - car il n'est pas immédiatement évident avec cette définition qu'il existe des revêtements non triviaux ! - mais elle est sans doute celle qu'il est préférable de mémoriser en premier.

Un avantage de cette définition est qu'elle met en évidence le fait qu'une composition d'applications de revêtement est une application de revêtement.

Remarque 2.5. Comme p est un homéomorphisme local, le chemin relevé c est unique : en effet, si c' est un autre chemin relevant \bar{c} à partir de x , les temps t vérifiant $c(t) = c'(t)$ constituent un fermé ouvert du connexe $[0, 1]$, non vide (car contenant 0) : c est donc l'intervalle $[0, 1]$ tout entier.

C'est un bon exercice de montrer que :

Théorème 2.6. *Lorsque B est homéomorphe à \mathbb{R}^n , tout revêtement $p : E \rightarrow B$ est trivial.* ■

La définition de revêtement que nous avons donné ici ne semble pas correspondre à celle que nous avons explicité pour notre application initiale $p : \tilde{S} \rightarrow S$, mais il n'est pas difficile de voir que cette application observe les préceptes de la définition 2.3. Du reste :

Proposition 2.7. *Un homéomorphisme local $p : E \rightarrow B$ est un revêtement si et seulement si il admet la propriété de trivialisatoin locale, i.e. tout point x de B admet un voisinage U tel qu'il existe un homéomorphisme $\varphi : U \times \Lambda \rightarrow p^{-1}(U)$, où Λ est un espace discret non-vide, tel que $p \circ \varphi : U \times \Lambda \rightarrow U$ soit la projection sur le premier facteur.* ■

Notons que la connexité de B implique que l'espace discret Λ ne dépend pas, à homéomorphisme près, du point x .

Il y alors maints exemples faciles de revêtements non-triviaux : par exemple, l'application $t \mapsto e^{it}$ de \mathbb{R} vers le cercle unité du plan euclidien.

Remarque 2.8. L'application exponentielle produit aussi l'exemple le plus simple d'homéomorphisme local surjectif qui n'est pas un revêtement : la restriction de $t \mapsto e^{it}$ à l'intervalle $]0, 2\pi + \epsilon[$ pour tout $\epsilon > 0$.

Il s'avère que certains revêtements sont en quelque sorte maximaux. En un certain sens, ils dépliant totalement la variété base. Cela se formule de la manière suivante :

Définition 2.9. Une variété connexe B est simplement connexe si tout revêtement $p : E \rightarrow B$ est trivial.

Remarque 2.10. Il est équivalent de demander que tout revêtement $p : E \rightarrow B$, où E est connexe, est un homéomorphisme.

Proposition 2.11. Soit $p : E \rightarrow B$ un revêtement, et X une variété simplement connexe. Pour toute application continue $f : X \rightarrow B$, tout point x_0 de X et tout élément y_0 de E tel que $p(y) = f(x)$, il existe une et une seule application $F : X \rightarrow E$ dite relèvement de f , telle que $F(x_0) = y_0$, et telle que $f = p \circ F$.

Preuve Définir $E(X) = \{(x, y) \in X \times E / p(y) = f(x)\}$, et $p_X : E(X) \rightarrow X$ par $p_X((x, y)) = x$. Vérifier que p_X est un revêtement. Comme X est supposé simplement connexe, le revêtement p_X est trivial : il existe donc une section $s : X \rightarrow E(X)$ telle que $s(x_0) = (x_0, y_0)$ (cf. preuve de 2.6). L'application F recherchée est $p_2 \circ s$, où $p_2(x, y) = y$. ■

Cette proposition montre que les variétés simplement connexes vérifient la propriété universelle suivante : si $p : X \rightarrow B$ est un revêtement où X est connexe et simplement connexe, alors X revêt tout revêtement de B , i.e. pour tout revêtement $q : E \rightarrow B$ où E est connexe, il existe un revêtement $r : X \rightarrow E$ tel que $q \circ r = p$. En un certain sens, ceci signifie que p recèle toutes les complexités pouvant apparaître parmi les revêtements de B . Nous disons alors que $p : X \rightarrow B$ est un *revêtement universel* de B . Observons aussi que si E est lui-aussi simplement connexe, r doit être un homéomorphisme, i.e. le revêtement universel est unique à homéomorphisme près. Se pose bien sûr le problème d'existence :

Théorème 2.12. Toute variété connexe admet un revêtement universel. ■

Remarque 2.13. Ce Théorème, et la notion de revêtement universel, sont formellement très semblables à la notion de clôture algébrique d'un corps. Cette analogie pourrait même poussée bien plus loin, mais cela dépasse le cadre de nos ambitions pour ce cours.

Plutôt que de démontrer le Théorème 2.12, nous allons nous contenter dans ce cours de voir que le revêtement $p : \tilde{S} \rightarrow S$ est effectivement universel.

Considérons donc un revêtement $q : X \rightarrow \tilde{S}$, où X est une surface connexe, et nous voulons montrer qu'il s'agit d'un homéomorphisme. Pour ce faire, il suffit de démontrer qu'il existe une *section* de q , i.e. une application continue $s : \tilde{S} \rightarrow X$ telle que $q \circ s = id$. Il n'est pas difficile de voir qu'alors s est un homéomorphisme local injectif, d'image un ouvert fermé de X : par connexité de ce dernier, s est un homéomorphisme.

Tout d'abord, notons P_0 l'intérieur de P ; il s'identifie bien sûr à un ouvert dense de S , sur lequel se projette bijectivement chaque $P_0 \times \{\gamma\}$ de $P \times \Gamma$. On fixe un point x_0 de P_0 et donc un point \bar{x}_γ dans chaque $P_0 \times \{\gamma\}$. On fixe un point \tilde{x}_0 de $q^{-1}([\bar{x}_{[\emptyset]})$. Comme P_0 est homéomorphe à \mathbb{R}^2 , la restriction de q à $q^{-1}([P_0 \times \{\emptyset\}])$ est un revêtement trivial : il existe une unique application $s_{[\emptyset]}$ de $[P_0 \times \{\emptyset\}]$ dans X envoyant $[\bar{x}_{[\emptyset]}$ sur \tilde{x}_0 , et vérifiant $p \circ s_{[\emptyset]} = id$. Cette application est du reste facile à définir : c'est l'application qui envoie $(x, [\emptyset])$ sur l'extrémité finale du chemin partant de \tilde{x}_0 , chemin obtenu en relevant par q le segment dans le polygône convexe $[P_0 \times \{\emptyset\}] \approx P_0$ reliant $[\bar{x}_{[\emptyset]}$ à $(x, [\emptyset])$.

Cette description de $s_{[\emptyset]}$ montre d'ailleurs qu'elle s'étend de manière unique en une application, toujours notée $s_{[\emptyset]}$, à l'adhérence de $[P \times \{\emptyset\}]$.

Ce procédé peut être appliqué à chaque $[P \times \{\gamma\}]$, avec γ dans Γ , mais il ne définit pas une seule section $s_\gamma : [P \times \{\gamma\}] \rightarrow X$; il en définit autant qu'il y a d'éléments dans $q^{-1}([(x_0, \gamma)])$. Il s'agit de voir que le choix des s_γ peut être effectué de sorte qu'ils définissent tous ensemble une application bien définie, et, par suite, continue.

Considérons deux polygônes $[P \times \{\gamma\}]$ et $[P \times \{\gamma * [a_i]\}]$ adjacents dans \tilde{S} : ils ont en commun une et une seule arête. On en déduit facilement qu'à chaque choix de s_γ correspond un et un seul choix de $s_{\gamma[a_i]}$ de sorte que l'application qu'ils définissent sur l'union des deux polygônes est bien définie. Ainsi, partant de $s_{[\emptyset]}$, il n'y a qu'un seul choix tolérable pour chacun de ses polygônes voisins $[P \times \{[a_i]\}]$; par effet de capillarité, cette contrainte du choix de la section locale s'étend à chaque $[P \times \{\gamma\}]$.

Mais il se pourrait que toutes ces contraintes soient en définitive incompatibles entre elles. En effet, chaque "chemin" menant de $[P_0 \times \{[\emptyset]\}]$ à $[P_0 \times \{\gamma\}]$ fournit une telle contrainte, et il y a autant de tels "chemins" qu'il y a de mots dans l'alphabet \mathcal{A} représentant γ , i.e. qu'il y a d'éléments de $\hat{\Gamma}$ représentant γ .

Pour montrer que ces divers choix de représentant de γ dans $\hat{\Gamma}$ aboutissent à la même section locale s_γ , il suffit de le faire lorsque ces représentants ne diffèrent que par les identifications élémentaires, à savoir :

- celle provenant d'un aller-retour à travers une arête : $\alpha * (a, \sigma(a)) * \beta \sim \alpha * \beta$,
- celle provenant d'un circuit autour d'un sommet : $\alpha * \delta * \beta \sim \alpha * \beta$, où δ est un cycle de sommet $(a_1, a_2, \dots, a_{k(s_0)})$, ou son inverse $(a_{k(s_0)}, \dots, a_1)$.

Cette vérification est automatique. Contentons-nous ici de dire qu'elle provient, dans le cas d'un aller-retour à travers d'une arête, du fait que les sections compatibles au-dessus de deux polygônes adjacents coïncident au-dessus de l'arête commune. Ce même fait implique que les sections compatibles au-dessus d'une chaîne de polygônes partageant un même sommet commun coïncident forcément au-dessus de ce sommet : ceci induit le cas des identifications le long d'un circuit autour d'un sommet.

Ceci achève la preuve de la simple connexité de \tilde{S} . ■

Corollaire 2.14. *La sphère \mathbb{S}^2 est simplement connexe*

Preuve Construire la sphère en recollant les côtés d'un carré ; on a dans ce cas $\tilde{S} = S$. ■

3. ACTIONS DE GROUPE

3.1. Groupe fondamental. Nous avons auparavant défini un groupe Γ *agissant* sur la surface \tilde{S} , tel qu'en réalité, les fibres de l'application p sont précisément les *orbites* de cette *action*. L'objet de cette section est de définir et expliquer chacun de ces trois termes mis en italique.

Soit X une variété, et Γ un groupe (qu'on pensera le plus souvent discret). On note $\text{Homeo}(X)$ le groupe des homéomorphismes de X .

Définition 3.1. *Une action de Γ sur X est un morphisme $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Homeo}(X)$.*

Remarque 3.2. L'action est dite continue si l'application $\Gamma \times X \rightarrow X$ qu'elle induit est continue.

Le plus souvent, on n'écrit pas le morphisme ρ , c'est-à-dire on note $\gamma.x$, γx ou $\gamma(x)$ ce que, si on était plus scrupuleux, on devrait noter $\rho(\gamma)(x)$.

Définition 3.3. Une action est effective si le morphisme ρ est injectif.

Pour tout élément x de X , on appelle *orbite de x sous Γ* l'ensemble des γx où γ décrit Γ . On note cet ensemble par $\Gamma.x$. On dit aussi que $\Gamma.x$ est une orbite de l'action de Γ sur X , ou de manière plus condensée, que $\Gamma.x$ est une orbite de Γ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'action considérée.

Toute action sur X définit une relation d'équivalence sur X , dont les classes d'équivalence sont les orbites de l'action. L'espace quotient de cette relation d'équivalence, muni de la topologie quotient, est appelé *espace des orbites*. On le note $\Gamma \backslash X$.

La projection naturelle $X \rightarrow \Gamma \backslash X$ est appelée projection canonique (ou projection naturelle).

Soit M une variété connexe. On y sélectionne une fois pour toute un point x_0 , dit *point base*. On dit aussi que le couple (M, x_0) est une variété pointée.

On note $p : (\widetilde{M}, \tilde{x}_0) \rightarrow (M, x_0)$ un revêtement universel de M .

Théorème 3.4. Il existe un groupe qui agit sur \widetilde{M} , de sorte que :

- cette action est effective,
- ses orbites sont exactement les fibres de p .

De plus, il n'existe à isomorphisme près qu'un seul groupe vérifiant ces deux propriétés. On l'appelle *groupe fondamental de M* , et le note $\pi_1(M, x_0)$.

Ceci est loin d'être la définition traditionnelle du groupe fondamental, mais elle a l'avantage d'être adaptée à nos besoins. Nous serions bien en peine de démontrer ce théorème sans en revenir à la définition usuelle, mais qu'il nous suffise ici de remarquer que ce théorème est visiblement valide dans le contexte $p : \widetilde{S} \rightarrow S$ dans lequel nous nous sommes placés.

3.2. Actions de groupe proprement discontinues. Nous allons maintenant refermer le cercle : toute variété s'identifie à l'espace des orbites d'une action de groupe sur une variété simplement connexe. Examinons le problème inverse : à quelle condition l'espace des orbites de l'action d'un groupe Γ sur une variété M est-il une variété, et à quelle condition la projection canonique $q : M \rightarrow \Gamma \backslash M$ est-elle une application de revêtement ?

Il s'avère qu'il est plus judicieux de se poser les questions suivantes, qui suffisent à nos besoins :

- *Question 1 : à quelle condition la projection canonique q est-elle un homéomorphisme local ?*

La réponse à cette question est évidente : il faut et il suffit que tout point x de M admette un voisinage ouvert U tel que pour tout élément γ de $\Gamma \setminus \{e\}$ (où e est l'élément neutre de Γ) on a $\gamma U \cap U = \emptyset$. Un tel ouvert U disjoint de ses Γ -itérés est dit *Γ -errant* (ou errant tout court s'il n'y a pas ambiguïté). On dit aussi que l'action est *errante* si tout point de M admet un voisinage errant, i.e. si q est un homéomorphisme local.

Observons qu'une action errante est *libre*, i.e. aucun élément γ de $\Gamma \setminus \{e\}$ n'admet de *point fixe* dans M , i.e. $\gamma x \neq x$ pour tout x .

Exercice 3.5. Exhiber une action non-libre du groupe à deux éléments sur \mathbb{R}^2 dont l'espace des orbites est une variété.

Il semble qu'avoir répondu à la question 1 clôt la question. En effet, il semble que lorsque l'action est errante, la projection canonique est un revêtement puisqu'elle admet la propriété

de trivialisations locales : en effet, si U est un ouvert Γ -errant, $q^{-1}(q(U))$ est homéomorphe à $q(U) \times \Gamma$. Si vous avez cru cela, ou si vous ne voyez toujours pas le problème, c'est que vous êtes tombés dans une erreur classique !

Exercice 3.6. Le contre-exemple typique :

Prendre $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, et considérer l'action de $\Gamma = \mathbb{Z}$ sur M définie par $n.(x, y) = (2^n x, 2^{-n} y)$. Montrer que cette action est errante, mais que l'espace des orbites n'est pas une variété.

Question 2 : à quelle condition l'espace des orbites d'une action errante est-il séparé au sens de Hausdorff ?

La réponse à la question est là encore évidente : il faut que pour toute paire de points distincts x, y de points de M n'ayant pas la même Γ -orbite, il existe deux voisinages respectifs U et V tels que pour tout élément γ de Γ , $\gamma U \cap V = \emptyset$. Une action satisfaisant ce critère sera dite *séparante*. (Ce n'est pas une terminologie répandue, je ne l'ai vue que dans le présent texte et dans [3]).

En résumé, la projection canonique d'une action de groupe est une application de revêtement si et seulement si l'action est errante et séparante.

Ceci n'est pas le critère le plus pratique (et donc pas le plus courant !). Il est plus commun d'utiliser le suivant :

Définition 3.7. L'action est proprement discontinue si pour tout compact K de M , il n'y a qu'un nombre fini d'éléments γ de Γ tels que $\gamma K \cap K \neq \emptyset$.

Proposition 3.8. La projection canonique est une application de revêtement si et seulement si l'action est libre et proprement discontinue.

Preuve Supposons que l'action est errante et séparante. Tout d'abord, il est clair qu'elle est libre. Supposons *a contrario* qu'elle n'est pas proprement discontinue. Il existe alors un compact K et une suite infinie d'éléments γ_n de Γ tels que $\gamma_n K \cap K \neq \emptyset$. Il existe alors pour chaque entier n un élément x_n de K tel que $y_n = \gamma_n x_n$ appartient à K . Comme K est compact, quitte à extraire une sous-suite, il existe deux éléments x et y de K , limites respectives des x_n et des y_n . Alors, si U et V sont des voisinages respectifs quelconques de x et de y , tous les x_n (resp. y_n) à partir d'un certain rang appartiennent à U (resp. V). Ceci contredit manifestement le fait que l'action est supposée séparante.

Inversement, supposons que l'action est libre et proprement discontinue. Montrons tout d'abord qu'elle est alors nécessairement errante. Pour tout x , soit U_n une suite décroissante de voisinages ouverts de x d'adhérences compactes, d'intersection réduite à $\{x\}$. Pour chaque n , soit Γ_n l'ensemble des éléments de Γ envoyant U_n sur un ouvert qui n'en soit pas disjoint. Par hypothèse, chaque Γ_n est fini. De plus, la suite des Γ_n est décroissante pour l'inclusion. Si l'intersection des Γ_n est réduite à $\{e\}$, alors les Γ_n sont réduits à $\{e\}$ à partir d'un certain rang. Les U_n pour n grand sont alors des voisinages Γ -errants. Sinon, il existe un élément γ de Γ et une suite d'éléments x_n de M tels que :

- les x_n convergent vers x ,
- les $y_n = \gamma x_n$ convergent vers x .

Alors, comme M est séparé, x est point fixe de γ : contradiction.

Nous avons ainsi montré que l'action est errante. Le fait que l'action soit aussi séparante se montre de manière analogue : soit x et y deux points de M tels que $\Gamma.x \neq \Gamma.y$.

Considérons deux suites décroissantes U_n, V_n d'ouverts relativement compacts d'intersections respectives $\{x\}$ et $\{y\}$, on peut les supposer errants. Considérons Γ_n , l'ensemble des éléments γ de Γ pour lesquels $\gamma U_n \cap V_n \neq \emptyset$. Comme l'action est proprement discontinue, et que $\bar{U}_n \cup \bar{V}_n$ est compact, les Γ_n sont finis. On a une dichotomie analogue à la précédente : si l'intersection des Γ_n contient un élément non-trivial γ , alors $y = \gamma x$. Cette contradiction montre que $\gamma U_n \cap V_n = \emptyset$ pour tout n assez grand et tout γ non trivial. ■

4. STRUCTURES GÉOMÉTRIQUES

Nous avons fait un peu le tour des aspects topologiques de la surface S essentiels à notre propos. Notre objectif est désormais d'habiller cette surface de propriétés géométriques.

4.1. Métriques. Une métrique, au sens général, sur une espace X , est la donnée d'une fonction distance $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :

- l'inégalité triangulaire $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$,
- $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$.

Le premier exemple d'espace métrique est le plan euclidien. Nous considérerons aussi la sphère ronde, ainsi que le disque de Poincaré (dit aussi demi-plan de Poincaré, ou plan hyperbolique, ou encore - surtout en Russie - plan de Lobatchevski).

Nous considérons que toutes ces notions sont bien connues, et conviendrons dans toute la suite que la topologie sur X est celle induite par la métrique.

Lorsque X est une variété (on la note M), il est judicieux de s'en tenir aux métriques de longueur, i.e. définies de la manière suivante :

- on se fixe une classe \mathcal{C} de chemins², dits chemins rectifiables, suffisamment nombreux pour que pour toute paire (x, y) dans $M \times M$, il existe un élément de \mathcal{C} reliant x à y . On demande en outre que \mathcal{C} soit stable par composition : si $c : [0, 1] \rightarrow M$ et $c' : [0, 1] \rightarrow X$ sont deux chemins dans \mathcal{C} , vérifiant $c(1) = c'(0)$, alors le chemin $c'' = c.c'$, défini par $c''(t) = c(2t)$ si $0 \leq t \leq 1/2$, et $c''(t) = c'(2t - 1)$ si $1/2 \leq t \leq 1$, doit lui aussi appartenir à \mathcal{C} . Par exemple, si M est de classe C^r ($r \geq 1$), on peut prendre comme \mathcal{C} l'ensemble \mathcal{C}_1 des chemins de classe C^1 par morceaux.

- À chaque élément c de \mathcal{C} on affecte une "longueur" $l(c)$, de sorte que si c'' est la composition de deux chemins c, c' , alors $l(c'') \leq l(c) + l(c')$.

- Enfin, pour toute paire de points x, y , on définit $d_l(x, y)$ comme étant la borne inférieure des longueurs $l(c)$ de chemins c joignant x à y .

Il n'est pas vrai que toute paire (\mathcal{C}, l) , l'application d_l est bien une fonction distance : en effet, si l'inégalité triangulaire est bien vraie, il se peut que d_l s'annule sur des paires de points distincts. Mais il est notoirement connu que le plan euclidien, la sphère et le plan de Lobatchevski sont des espaces de longueur (entre autres); en fait, ce sont des variétés riemanniennes et, de manière générale, les fonctions distance sur les variétés riemanniennes sont définies par ce procédé, avec $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1$, la longueur des chemins étant calculée en intégrant la norme des vecteurs tangents.

²Pour nous, un chemin n'est pas exactement une application $c : [0, 1] \rightarrow M$ continue sur M , mais une classe d'équivalence de telles applications pour la relation d'équivalence qui identifie c et c' s'il existe un homéomorphisme $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tel que $c' = c \circ \varphi$.

C'est surtout dans le cadre des variétés riemanniennes que nous nous placerons. En évoquant les espaces de longueur généraux, nous voulons insister sur la manière dont la fonction distance est définie sur les variétés riemanniennes, et mettre en évidence par exemple qu'une isométrie locale entre variétés riemanniennes, i.e. application différentiable préservant la norme des vecteurs tangents, ne préserve pas les distances entre points. Nous aurons aussi à considérer aussi des métriques de longueur sur S qui ne sont pas *stricto sensu* des métriques riemanniennes.

Rappelons aussi la notion de complétude pour une variété riemannienne : d'après le théorème de Hopf-Rinow, toutes les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) (Complétude de Cauchy) toute suite de Cauchy est convergente.
- (2) (Compacité des boules) les boules fermées sont toutes compactes (étant entendu qu'une boule fermée, de rayon r , est le lieu des points de X à distance inférieure ou égale à r d'un point donné de X).
- (3) (complétude géodésique) toute paire de points est extrémité d'une géodésique globale (une géodésique globale est un chemin c dans \mathcal{C} dont la longueur réalise la distance entre ses deux extrémités).

Une variété riemannienne vérifiant l'une de ses conditions (et donc toutes) est dite complète. Notez que d'après (1), tout revêtement (en particulier, le revêtement universel) d'un espace métrique complet est complet. D'après (2), toute variété riemannienne compacte est complète.

Nous allons ici tout de suite appliquer ces notions à notre surface S , en prenant comme classe \mathcal{C}_0 celle des chemins qui sont des compositions $c = c_1.c_2.\dots.c_k$, où chaque c_i est représentable par un *segment* dans P . Puisque P est un polygône dans \mathbb{R}^2 , chaque c_i a bien une longueur euclidienne (bien sûr, on se fixe au préalable la structure euclidienne usuelle de \mathbb{R}^2). Ceci définit une fonction longueur l_0 sur \mathcal{C}_0 , et par suite, une distance sur S .

Posons nous maintenant la

Question : (S, d_0) est-elle localement isométrique au plan euclidien ?

Pour répondre à la question, il faut d'abord bien s'assurer de notre accord sur son sens :

Définition 4.1. *Une isométrie entre deux espaces métriques (X, d) et (Y, d') est une application $f : X \rightarrow Y$ qui préserve les distances : $d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$ pour tout x, y .*

Une isométrie locale de (X, d) vers (Y, d) est une application $f : X \rightarrow Y$ telle que tout point x de X admet un voisinage ouvert U telle que la restriction de f à U est une isométrie sur son image.

Une isométrie locale n'est pas toujours une isométrie, car pas forcément bijective ! Il existe par exemple une isométrie locale entre le plan euclidien et le cylindre de révolution dans \mathbb{R}^3 .

En général, si (X, l) est un espace de longueur et Y un ouvert de X , la restriction de l aux chemins contenus dans Y définit une distance de longueur sur Y et, en général, l'inclusion de Y dans X n'est pas une isométrie (prendre X le plan euclidien, et Y le complémentaire dans X d'une boule unité). Cette inclusion n'est même pas nécessairement une isométrie locale. Ceci motive la définition suivante :

Définition 4.2. *Un espace de longueur (X, l) est localement convexe si tout point admet un voisinage ouvert Y tel que, si Y est équipé de la métrique de longueur induite par l sur les chemins contenus dans Y , l'inclusion $Y \subset X$ est une isométrie.*

Dans ce cas, pour tout ouvert Y d'un espace de longueur X localement convexe, l'inclusion $Y \subset X$ est une isométrie locale.

Il nous importe surtout de savoir ici que le plan euclidien, le plan de Lobatchevski et la sphère sont chacun localement convexes (comme toute variété riemannienne) : ceci découle de la convexité géodésique des petites boules.

Définition 4.3. Soit X un espace de longueur localement convexe. Un espace de longueur Y est dit localement isométrique à X si tout point de Y admet un voisinage isométrique à un ouvert de X .

Exercice 4.4. Un espace de longueur localement isométrique à un espace de longueur localement convexe est lui-même localement convexe.

Revenons-en à notre surface S , équipée de sa fonction longueur. Nous pensons qu'il doit être clair pour le lecteur qu'en raison de la locale convexité du plan euclidien :

Proposition 4.5. L'inclusion $P_0 \subset S$ est une isométrie locale. ■

Mais, bien entendu, cette inclusion est loin d'être une isométrie ! Par exemple, si s et s' sont deux sommets de P identifiés au quotient, la distance entre des points, l'un proche de s , l'autre de s' , est minorée dans P_0 , mais peut être arbitrairement petite dans S . Mais cela importe peu pour répondre à la question ci-dessus.

Plus important est le fait suivant : si on veut que S soit localement isométrique au plan euclidien, il faut que les applications de recollement d'arêtes φ_a soient des isométries. En particulier, il faut que les arêtes a et $\sigma(a)$ aient même longueurs.

Supposons que ce soit le cas, il est alors facile de montrer que la surface épointée S^* , i.e. S privée de la projection des sommets, est localement isométrique au plan euclidien. Mais la chose se complique (un peu) au voisinage des sommets. Soit s_1, s_2, \dots, s_k un cycle de sommets. Chacun d'entre eux définit un secteur de P . Fixons un petit nombre réel positif ϵ , et notons $S_i(\epsilon)$ la zone dans chacun de ces secteurs à distance inférieure à ϵ de s_i . Chaque $S_i(\epsilon)$ est isométrique à un secteur de la boule euclidienne de rayon ϵ , il est déterminé à isométrie près par l'angle α_i au sommet s_i . En recollant bord à bord ces secteurs, on obtient un voisinage du point $[s_i]$ de S . Si on veut que $S^* \cup \{[s_i]\}$ soit localement isométrique au plan euclidien, il faut manifestement (et il suffit !) que ce voisinage soit isométrique au disque de rayon ϵ dans le plan euclidien, ce qui équivaut à ce que la somme des α_i soit égale à 2π .

Remarquons que cette condition - pour chaque cycle de sommets, la somme des angles α_i doit être égale à 2π - est la réponse complète à notre question, et qu'elle se calcule sans difficulté à partir de la donnée initiale. Par exemple, nous pouvons en déduire :

Proposition 4.6. Supposons que le polygone P est strictement convexe, i.e. que chaque angle au sommet α_i est strictement plus petit que π . Si la surface S est orientable et localement isométrique au plan euclidien, alors P est un parallélogramme ou un hexagone dont les côtés opposés ont même longueur. En particulier, S est homéomorphe au tore.

Preuve On indexe les sommets s_1, \dots, s_{2n} selon le sens de parcours trigonométrique du bord ∂P . Demander que S soit orientable équivaut à demander que chaque φ_a renverse l'orientation des cotés : si $a = [s_i, s_{i+1}]$ et $\varphi_a(s_{i+1}) = s_j$, alors $\varphi_a(s_i) = s_{j+1}$.

Soit k le nombre de sommets de S , i.e. de cycles de sommets. Pour chacun, la somme des angles au sommet associé est 2π et chacun de ces angles est strictement plus petit que π :

on en déduit que chaque cycle de sommets doit contenir au moins 3 sommets. Donc, $3k$ doit être plus petit que $2n$, le nombre de sommets de P . On en déduit aussi, comme chaque φ_a renverse l'orientation, que a et $\sigma(a)$ ne sont jamais des arêtes ayant un sommet en commun : ce sommet commun serait sinon un cycle de sommets à lui tout seul.

Par ailleurs, comme P est convexe, la somme de *tous* ses angles au sommet est $2(n-1)\pi$. Mais cette somme se décompose en la somme de k sous-sommes correspondant aux cycles de sommets, chacune de ces sous-sommes valant 2π . Donc, $2k\pi = 2(n-1)\pi$, i.e. $n = k+1$. Ainsi, l'inégalité $3k \leq 2n$ implique $k \leq 2$.

Si $k = 1$, alors $n = 2$: P est un quadrilatère. Comme a et $\sigma(a)$ ne peuvent être adjacents, ce sont des côtés opposés du quadrilatère. De plus, ces côtés opposés doivent être de même longueur : P est donc un parallélogramme. La surface S est obtenue en identifiant les côtés opposés : il est bien connu qu'on obtient ainsi, du point de vue topologique, un tore !

Si $k = 2$, $n = 3$: P est un hexagone. Nous affirmons que σ apparie alors les côtés opposés. En effet, supposons au contraire que, par exemple, σ envoie le côté $[s_1, s_2]$ sur $[s_4, s_3]$. Alors, σ ne peut envoyer $[s_4, s_5]$ sur $[s_6, s_5]$ (sinon $\{s_5\}$ serait un cycle de sommet), ni sur $[s_1, s_6]$ (sinon, $\{s_1, s_4\}$ serait un cycle de sommets de longueur 2). Donc, $\sigma([s_4, s_5]) = [s_3, s_2]$. Mais alors, les côtés délaissés qu'il reste à appairer ont un sommet en commun : ce sont $[s_6, s_1]$ et $[s_5, s_6]$.

Cette contradiction montre qu'effectivement l'appariement σ envoie chaque côté sur son opposé. On vérifie que là encore, la surface S obtenue est homéomorphe au tore. ■

Remarque 4.7. Pour un hexagone, il est équivalent d'avoir des côtés opposés le même longueur et d'avoir des côtés opposés parallèles.

Remarque 4.8. Cette proposition n'est qu'un cas particulier d'un Théorème plus général, selon lequel le tore et la bouteille de Klein sont les seules surfaces compactes (sans bord) admettant une métrique localement isométrique au plan euclidien. Pour les plus savants, ce Théorème découle de la Formule de Gauss-Bonnet, qui énonce que l'intégrale de la courbure sur toute la surface (donc, ici, 0 puisque la courbure du plan euclidien est nulle) est égale à la caractéristique d'Euler de la surface...

Mais nous allons voir d'autres manières de montrer ce résultat.

Remarque 4.9. Tout ce que nous avons discuté ici se transpose sans changement dans le cadre sphérique ou hyperbolique : il suffit de considérer P comme étant un polygône de la sphère ou du disque de Lobatchevski (étant entendu qu'un polygône est un domaine bordé par une ligne brisée formée de portions géodésiques). Tout, sauf... la proposition 4.6 ! Car il n'est plus vrai dans ce cas, même lorsque le polygône est convexe, que la somme de tous les α_i soit $2(n-1)\pi$. En fait, dans ce cas, on a :

$$\sum_i \alpha_i = 2(n-1)\pi + \epsilon \text{Aire}(P)$$

où ϵ vaut $+1$ dans le cas de la sphère, et -1 dans le cas du plan de Lobatchevski.

Dans le cas de la sphère, ceci renforce l'argument utilisé dans la preuve de la proposition 4.6, au point de montrer qu'on ne peut obtenir de surface localement isométrique à la sphère par identifications de côtés de polygônes sphériques strictement convexes. De fait, les seules surfaces compactes localement sphériques sont la sphère ronde elle-même et le plan

projectif, muni de la métrique adéquate (la seule pour laquelle la projection de la sphère sur le plan projectif soit une isométrie locale).

Quant au cas hyperbolique, l'argument tel quel devient inopérant. Mais le lecteur pourra chercher à voir quand même que dans ce cas, on ne peut pas obtenir de surface homéomorphe à la sphère ou au tore.

Remarque 4.10. Nous verrons que, dans tous les cas, toute surface compacte localement isométrique au plan euclidien s'obtient en identifiant les côtés opposés d'un parallélogramme (Corollaire 6.6) et que, de même, toute surface compacte localement isométrique au disque de Poincaré s'obtient en identifiant (judicieusement) deux à deux les côtés de polygones convexes du disque de Poincaré (Corollaire 6.9).

4.2. Structures affines. On peut reformuler la question qui nous a occupé la section précédente de la manière suivante : existe-t'il un recouvrement de S par des ouverts U_i tel que :

- (1) il existe pour chaque i un homéomorphisme $f_i : U_i \rightarrow V_i$, où V_i est un ouvert du plan euclidien,
- (2) si $U_{ij} = U_i \cap U_j$ est non-vide, l'application $f_i \circ f_j^{-1} : f_j(U_i \cap U_j) \rightarrow f_i(U_i \cap U_j)$ est la restriction d'une isométrie g_{ij} du plan euclidien,
- (3) la collection U_i contient la projection de P_0 dans S , l'application f_i associée étant l'application inverse de cette projection.

Les versions sphériques et hyperboliques s'obtiennent en remplaçant le plan euclidien par la sphère ronde ou le disque de Poincaré, et en affectant aux isométries de la sphère ou du disque de Poincaré le rôle dévolu auparavant aux isométries euclidiennes.

En omettant la condition (3), on observe qu'on peut formuler une notion similaire sur toute variété (de dimension 2 puisque les f_i doivent être des homéomorphismes) - et même que tout espace topologique séparé au sens de Hausdorff accueillant une telle donnée est nécessairement une variété.

D'une manière plus générale, on peut remplacer le plan euclidien par un espace X (le plus souvent, homogène) et le groupe des isométries euclidiennes par un groupe G agissant continûment sur X . Cependant, pour ne pas trop sortir du cadre, il convient de demander que l'action de G sur X soit *analytique* :

Définition 4.11. L'action de G sur X est analytique si deux éléments g et g' de G coïncidant sur un ouvert non-vide de X sont nécessairement égaux dans G .

Définition 4.12. Une (G, X) -structure sur une variété M est la donnée (dite (G, X) -atlas) d'un recouvrement de M par des ouverts U_i , et des homéomorphismes $f_i : U_i \rightarrow V_i \subset X$ vérifiant les points (1) et (2) ci-dessus, où les g_{ij} sont des restrictions d'éléments de G .

Définition 4.13. Un morphisme de (G, X) -structures est une application $f : M \rightarrow N$ entre deux variétés munies de (G, X) -structures, telle que les expressions de f dans les cartes définissant ces structures sont des restrictions d'éléments de G .

Deux (G, X) -structures sur M sont dites égales si l'application identité est un (G, X) -morphisme de l'une dans l'autre. Elles sont dites équivalentes s'il existe un homéomorphisme de M dans M isotope à l'identité qui est un (G, X) -morphisme entrant ces deux (G, X) -structures.

Une (G, X) -variété est une classe d'équivalence de (G, X) -structures sur une variété donnée.

Pour digérer cette notion, nous allons considérer le cas où X est la droite affine complexe \mathbb{C} , et G le groupe des transformations affines complexes, et essayer de voir à quelle condition l'inverse de la projection $P_0 \rightarrow S$ fait partie d'un (G, X) -atlas sur tout S (on parle dans ce cas de structure affine complexe).

Les transformations affines complexes préservent les angles des secteurs : on peut donc reproduire l'argument ci-dessus et on obtient que la somme des angles sur un cycle de sommets doit toujours valoir 2π : la preuve de la proposition 4.6 se réapplique à la virgule près, et on voit qu'un polygône de $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ se recolle en une surface affine complexe si et seulement si P est un parallélogramme ou un hexagone à côtés opposés parallèles. De fait, on pourrait montrer que la seule surface orientable compacte admettant une structure affine complexe est le tore - mais il y a plus de structures affines complexes sur le tore que de structures euclidiennes.

Évoquons pour finir cette première session le cas des structures affines réelles, i.e. $X = \mathbb{R}^2$ et G le groupe des transformations affines réelles. C'est beaucoup plus délicat, car on ne peut plus définir la notion d'angle des secteurs : les transformations affines ne préservent pas les angles ! Les arguments de la proposition 4.6 deviennent alors inopérants, et j'invite le lecteur à méditer de lui-même sur la chose... Nous verrons à la prochaine séance quelques outils pour traiter de genre de situation, mais aujourd'hui, si nous disposons du temps, je donnerai une preuve orale que le tore est la seule surface fermée admettant une structure affine réelle (Théorème de Benzécri [5]) (argument de Sullivan, [15]) accessible à tout auditeur connaissant la formule de l'indice des champs de vecteurs sur une surface...

DEUXIÈME SÉANCE : DOMAINES FONDAMENTAUX ET GROUPES DE SCHOTTKY

5. APPLICATION DÉVELOPPANTE, HOLONOMIE

Un exemple évident de (G, X) -variété est la variété X elle-même, où les $f_i : U_i \rightarrow V_i$ sont les restrictions de l'application identité. Si N est une (G, X) -variété et $f : M \rightarrow N$ un homéomorphisme local, il existe une (G, X) -structure sur M , unique à (G, X) -isomorphisme près, de sorte que f soit un (G, X) -morphisme : le cas $N = X$ fournit donc une autre famille d'exemples.

Enfin, si Γ est un groupe de (G, X) -isomorphismes d'une (G, X) -variété M , qui de plus agit librement et proprement sur M , l'espace quotient $\Gamma \backslash M$ admet une (G, X) -structure, unique à équivalence près, de sorte que l'application de projection soit un (G, X) -morphisme.

Ces remarques ajoutées les unes aux autres aboutissent au fait suivant : si $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ est un revêtement universel, de groupe fondamental Γ , $\mathcal{D} : \widetilde{M} \rightarrow X$ un homéomorphisme local et $\rho : \Gamma \rightarrow G$ un morphisme tel que :

$$\forall \gamma \in \Gamma, \quad \mathcal{D} \circ \gamma = \rho(\gamma) \circ \mathcal{D}$$

il existe alors des (G, X) -structures sur M et \widetilde{M} , uniques à égalité près, telles que p et \mathcal{D} soient des (G, X) -morphisms.

Le point est que cette construction fournit tous les exemples possibles :

Proposition 5.1. *Soit M une (G, X) -variété, $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ le revêtement universel et Γ le groupe fondamental de M . Il existe alors un homéomorphisme local $\mathcal{D} : \widetilde{M} \rightarrow X$ - dit application développante - et une représentation $\rho : \Gamma \rightarrow G$ - dite représentation d'holonomie - de sorte que :*

- si \widetilde{M} est équipé d'une (G, X) -structure pour laquelle l'application p est un (G, X) -morphisme, alors \mathcal{D} est un (G, X) -morphisme,
- l'application \mathcal{D} est équivariante :

$$\forall \gamma \in \Gamma, \quad \mathcal{D} \circ \gamma = \rho(\gamma) \circ \mathcal{D}$$

Remarquons que pour tout élément g de G , les (G, X) -structures définies par les paires (\mathcal{D}, ρ) et $(g \circ \mathcal{D}, g\rho g^{-1})$ sont égales.

Nous n'allons pas montrer la proposition 5.1 en toute généralité, mais nous allons considérer le cas particulier $M = S$ et $\widetilde{M} = \widetilde{S}$, avec $X = \mathbb{R}^2$, G étant le groupe des isométries euclidiennes. On suppose aussi que P est un polygône convexe de \mathbb{R}^2 , de sorte que l'inclusion $P \subset X$ est un (G, X) -morphisme.

Soit a un côté de P et $a' = \sigma(a)$ son appariement. Soit x un point à l'intérieur de a et $x' = \varphi_a(x)$ son acolyte sur a' . Tout voisinage \bar{U} de $[x]$ dans S est obtenu de la manière suivante : il existe un voisinage U de x et un voisinage U' de x' dans X tels que \bar{U} est la projection dans S de $U \cap P$ et $U' \cap P$. Pour un \bar{U} convenable, U et U' peuvent être choisis connexes, ainsi que $U \cap P, U' \cap P$.

Par ailleurs, pour un \bar{U} approprié, il existe un homéomorphisme $\bar{f} : \bar{U} \rightarrow V \subset X$, tel que la composition de \bar{f} avec la projection de $P \subset X$ dans S soit, là où elle est définie,

localement la restriction d'un élément de G . Notons f et f' les restrictions à respectivement $U \cap P$ et $U' \cap P$, de \bar{f} avec la projection de P dans S : d'après ce qui précède et comme $U \cap P$, $U' \cap P'$ sont connexes, il existe deux éléments g et g' de G tels que f et f' soient en définitive les restrictions de g et g' à respectivement $U \cap P$ et $U' \cap P$. On peut donc considérer gU et $g'U'$: U et U' peuvent être choisis de sorte que $gU = g'U' = V$. On note $\hat{\rho}(a) = g'^{-1}g$: c'est un élément de G qui envoie U sur U' . Il envoie aussi $a \cap U$ sur $a' \cap U'$; comme \bar{f} est un homéomorphisme, l'image par $\hat{\rho}(a)$ de $U \cap P_0$ est disjointe de $U' \cap P_0$.

Du fait que G agit analytiquement sur X , i.e. deux éléments de G sont égaux dès qu'ils coïncident sur un ouvert non vide de X , on obtient que $\hat{\rho}(a)$ ne dépend pas du choix de $[x] = [x']$. De plus, il envoie toute l'arête a sur exactement a' . Pour la même raison, on a : $\hat{\rho}(\sigma(a)) = \hat{\rho}(a)^{-1}$.

À présent soit $[s]$ un sommet de P dans S , c'est-à-dire, un cycle de sommets (a_1, \dots, a_k) , $[s]$ étant représenté par $s_i \in a_i$. L'ouvert \bar{U} désigne maintenant un voisinage de $[s]$ dans S : il est obtenu en recollant des secteurs S_i de P , de sommets s_i , ceci, du point de vue topologique. Du point de vue (G, X) -structure, l'union (des projections dans S) de S_i et de S_{i+1} est (G, X) -isomorphe à l'union de S_{i+1} et de $\hat{\rho}(a_i)S_i$. L'union de S_{i-1} , S_i et S_{i+1} est donc (G, X) isomorphe à l'union de S_{i+1} et de l'image par $\hat{\rho}(a_i)$ de $S_i \cup \hat{\rho}(a_{i-1})(S_{i-1})$. De proche en proche, on en déduit que le produit $\hat{\rho}(a_k)\hat{\rho}(a_{k-1})\dots\hat{\rho}(a_1)$ doit être l'application identité de S_1 et donc, l'élément neutre de G . Ceci signifie que $\hat{\rho}$ est compatible avec les relations sur $\hat{\Gamma}$: il induit un morphisme $\rho : \Gamma \rightarrow G$. Nous avons obtenu la représentation d'holonomie.

On peut alors définir l'application de $P \times \Gamma$ dans X , qui envoie (x, γ) sur $\rho(\gamma)(x)$. Il est facile de voir que cette application est compatible avec la relation $(x, [a_1, a_2, \dots, a_k]) \sim (\varphi_{a_{k+1}}(x), [a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}])$: elle induit donc une application $\mathcal{D} : \tilde{S} \rightarrow X$: nous avons obtenu l'application développante.

6. DOMAINES FONDAMENTAUX

Définition 6.1. Soit Γ un groupe agissant continûment sur un espace X . Un domaine fondamental de cette action est un ouvert Ω de X tel que :

- l'union des $\gamma\Omega$, où $\bar{\Omega}$ est l'adhérence de Ω et γ décrit tout Γ , est X tout entier,
- si $\gamma \neq \gamma'$, l'intersection entre $\gamma\Omega$ et $\gamma'\Omega$ est vide.

Au vu de la construction détaillée à la première séance, la proposition suivante est assez évidente :

Proposition 6.2. Soit \tilde{S} le revêtement universel d'une surface S obtenue en recollant 2 à 2 les côtés d'un polygone P . Alors, $[P_0, [\emptyset]]$ est un domaine fondamental de l'action du groupe fondamental Γ de S . ■

Mais l'action de Γ sur \tilde{S} n'a guère d'autre propriété... A l'opposé, trouver un domaine fondamental pour une action préservant une structure géométrique sur un espace X est une question délicate...

6.1. Théorème de Poincaré.

Théorème 6.3 (Théorème du polyèdre fondamental de Poincaré, cas dimension 2). Soit P un polyèdre convexe de X , où X est soit la sphère, soit le plan, soit le disque de Poincaré.

Soit σ un appariement des côtés de P , on suppose que pour tout côté a , a et $\sigma(a)$ ont même longueur : il existe alors une unique isométrie γ_a de X préservant l'orientation et envoyant a sur $\sigma(a)$. On note Γ le groupe engendré par tous les γ_a . On suppose aussi que la somme des angles de tout cycle de sommet de (P, σ) est 2π . Alors P est un domaine fondamental de l'action de Γ sur X .

Ce théorème est un corollaire de :

Proposition 6.4. *Soit M une (G, X) -variété, où X est une variété riemannienne simplement connexe et G un groupe d'isométrie de X . On suppose que M , munie de la métrique de longueur provenant de X est complète. Alors, l'application développante est un homéomorphisme de \widetilde{M} sur X et $\rho : \Gamma \rightarrow G$ est un morphisme injectif, d'image discrète, agissant proprement discontinûment sur X .*

En effet, sous les hypothèses du Théorème de Poincaré, la surface S obtenue en recollant P selon les γ_a est une (G, X) -surface compacte. Elle est compacte, donc complète. S vérifie donc toutes les hypothèses de la proposition 6.4. Donc, l'application développante identifie l'action de Γ sur \widetilde{S} avec celle de $\rho(\Gamma)$ sur X . Le théorème de Poincaré en découle puisque $[P_0, [\emptyset]]$ est un domaine fondamental de l'action de Γ sur \widetilde{S} .

Preuve de 6.4 Il s'agit de démontrer que l'application développante est une application de revêtement : ceci montrera la proposition puisque X est simplement connexe (l'affirmation sur ρ en découle, puisque l'action de Γ sur \widetilde{M} est libre, effective et proprement discontinue). Pour ce faire, nous montrons que \mathcal{D} a la propriété de relèvement des chemins et il suffit de montrer que, pour tout point \tilde{x}_0 de \widetilde{M} et pour tout chemin $c : [0, T] \rightarrow X$ vérifiant $c(0) = x_0 = p(\tilde{x}_0)$ (et paramétré pas sa longueur, i.e. tel que tous les vecteurs tangents $c'(s)$ sont de norme 1), il existe un chemin $\tilde{c} : [0, T] \rightarrow \widetilde{M}$ tel que $\tilde{c}(0) = \tilde{x}_0$ et $c = \mathcal{D} \circ \tilde{c}$. Soit I l'ensemble des temps t dans $[0, T]$ tel qu'il existe une application $\tilde{c}_t : [0, t] \rightarrow \widetilde{M}$ telle que :

- $\tilde{c}_t(0) = \tilde{x}_0$,
- $c(s) = \mathcal{D}(\tilde{c}_t(s))$ pour tout s dans $[0, t]$.

Comme \mathcal{D} est un homéomorphisme local, I est un ouvert non-vide, il est de plus connexe, i.e. s'il n'est pas tout $[0, T]$ (auquel cas nous avons fini), il est de la forme $[0, t_0[$. Par unicité locale des chemins relevant c , il existe un chemin $\tilde{c}' : [0, t_0[\rightarrow \widetilde{M}$ partant de \tilde{x}_0 et relevant la restriction de c à $[0, t_0[$. Or, comme M est complète, il en est de même pour son revêtement universel, la boule de rayon t_0 centrée en \tilde{x}_0 est donc compacte. On en déduit que les $\tilde{c}'(s)$ convergent, lorsque s tend vers t_0 , vers un point de \widetilde{M} : en affectant ce point comme valeur de $\tilde{c}'(t_0)$, on prolonge continûment \tilde{c} jusqu'en t_0 et on peut prolonger un peu au delà puisque \mathcal{D} est un homéomorphisme local. Ceci contredit la définition de t_0 : c'est donc en définitive que I est $[0, T]$ tout entier. ■

Remarque 6.5. Il y a plusieurs manières naturelles de généraliser le Théorème de Poincaré : on peut l'étendre aux dimensions supérieures, au cas où la somme des angles le long d'un cycle de sommets est un sous-multiple entier de 2π , considérer le groupe engendré par les symétries par rapport aux côtés (et donc sans appariements de côtés) etc... Pour un compte-rendu complet et détaillé, incluant une revue de la littérature sur le sujet, voir [8], qui nous semble la meilleure référence.

Corollaire 6.6. *Toute surface compacte orientable localement euclidienne s'obtient en recollant les côtés opposés d'un parallélogramme.*

Preuve L'application développante $\mathcal{D} : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est dans ce cas un homéomorphisme et l'application d'holonomie est injective. Son image est un groupe discret d'isométries du plan agissant librement et proprement discontinûment et préservant l'orientation. Les seules isométries euclidiennes directes sans points fixes sont les translations : on obtient donc que $\rho(\Gamma)$ est un sous-groupe de \mathbb{R}^2 . Il est de plus discret : c'est donc soit le groupe trivial, soit un groupe cyclique (engendré par une seule translation), soit le groupe engendré par deux translations dont les vecteurs de translations forment une base de \mathbb{R}^2 . Par ailleurs, S est compacte et homéomorphe au quotient de \mathbb{R}^2 par $\rho(\Gamma)$: la seule possibilité pour $\rho(\Gamma)$ est donc la dernière : il est engendré par deux translations de vecteurs v_1, v_2 linéairement indépendants. Il suffit de prendre le parallélogramme de côtés v_1, v_2 . ■

6.2. Domaine de Dirichlet. Nous considérons ici une forme de problème inverse : soit Γ un sous-groupe de G agissant librement et proprement discontinûment sur X - nous ne considérons ici que le cas où X est le disque de Poincaré et $G \approx \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \approx \text{SO}_0(1, 2)$ le groupe des isométries directes. On suppose que le quotient de X par Γ est compact : nous disons alors que Γ est un *réseau cocompact* de G et nous précisons sans torsion lorsque Γ agit librement sur \mathbb{H}^2 .

On fixe un élément x_0 de $X = \mathbb{H}^2$ et pour tout élément γ de Γ on note $P_0(\gamma)$ le lieu des points x de \mathbb{H}^2 tel que la distance entre x et γx_0 est supérieure ou égale à la distance entre x et x_0 .

Définition 6.7. *L'intersection de tous les $P_0(\gamma)$ quand γ parcourt Γ est appelé domaine de Dirichlet de Γ (relativement à x_0).*

Proposition 6.8. *Le domaine de Dirichlet est un polygone convexe de \mathbb{H}^2 dont l'intérieur est un domaine fondamental de l'action de Γ sur \mathbb{H}^2 .*

Corollaire 6.9. *Toute surface compacte orientable localement isométrique au disque de Poincaré est obtenue en recollant bord sur bord un polygone convexe du disque de Poincaré.*

Preuve de 6.9 L'argument vu pour démontrer le Théorème de Poincaré montre qu'une telle surface est toujours isométrique au quotient de \mathbb{H}^2 par un réseau cocompact de G sans torsion. Tout domaine de Dirichlet de cette action convient. ■

Preuve de 6.8 Nous supposons que le lecteur/auditeur, après l'exposé de C. Frances, connaît le catalogue des isométries du disque de Poincaré en éléments elliptiques, paraboliques et hyperboliques. Un réseau cocompact ne peut contenir d'élément elliptique, puisqu'il n'a pas de point fixe dans \mathbb{H}^2 . On peut aussi voir qu'il ne peut contenir d'élément parabolique : l'argument est un peu plus élaboré, c'est le suivant : d'une part, par compacité de $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}^2$, il existe un réel positif ϵ tel que toute géodésique fermée de S est de longueur au moins ϵ . Par ailleurs, pour toute isométrie parabolique g , il existe un point x de \mathbb{H}^2 tel que la distance entre x et gx est strictement inférieure à ϵ . Ces deux observations sont contradictoires.

Tous les éléments de Γ sont donc hyperboliques : il sont chacun conjugué à une transformation de la forme $z \mapsto \lambda z$ du demi-plan supérieur \mathbb{H}^2 . On peut en déduire, après calcul, que chaque $P_0(\gamma)$ est un demi-plan, i.e. une composante connexe du complémentaire d'une

géodésique de \mathbb{H}^2 (la médiatrice de $(x_0, \gamma x_0)$). Le domaine de Dirichlet est donc une intersection de demi-espaces : c'est un domaine convexe fermé de \mathbb{H}^2 . Il est non-vide, puisqu'il contient x_0 . Nous le notons $\overline{\Omega}$ et notons Ω son intérieur : remarquez qu'on ne sait pas encore que $\overline{\Omega}$ est l'adhérence de Ω - ni même *a priori* que Ω est non-vide !

On remarque ensuite que pour tout R , il n'existe qu'un nombre fini d'éléments γ de Γ pour lesquels la boule B_R de centre x_0 et de rayon R rencontre la géodésique $\partial P_0(\gamma)$: en effet, si B_R rencontre $\partial P_0(\gamma)$ en un point x , alors $d(x_0, \gamma x_0) \leq d(x_0, x) + d(x, \gamma x_0) = 2d(x, x_0) \leq 2R$. Donc, la boule B_{2R} rencontre son image par γ ; comme l'action de Γ est proprement discontinue, nous avons démontré notre affirmation. Il s'ensuit que l'intersection $B_R \cap \overline{\Omega}$ est l'intersection entre B_R et un polygône convexe non vide : l'intersection de tous les $P_0(\gamma)$ dont le bord rencontre B_R . Ceci permet de montrer que $\overline{\Omega}$ est bien l'adhérence de Ω .

Nous voyons maintenant que l'union de tous les $\gamma \overline{\Omega}$ est \mathbb{H}^2 tout entier. En effet : soit x un point de \mathbb{H}^2 . S'il n'est pas dans $\overline{\Omega}$, il existe un élément γ de Γ tel que $d(x, \gamma x_0) < d(x, x_0)$. Posons $x_1 = \gamma^{-1}x$: nous avons $d(x_0, x_1) < d(x_0, x)$. Si x_1 n'est pas dans $\overline{\Omega}$, en appliquant la même procédure, on trouve un élément x_2 dans l'orbite de x pour lequel $d(x_0, x_2) < d(x_0, x_1) < d(x_0, x)$. De proche en proche, on construit une suite de points x_n dans la Γ -orbite de x , dont la distance à x_0 est strictement décroissante. Si ce processus est sans fin, i.e. si aucun des x_n n'est dans $\overline{\Omega}$, on obtient une suite infinie de points contenus dans la boule centrée en x_0 de rayon $d(x, x_0)$: ceci contredit la propriété de l'action de Γ . Donc, un des itérés x_n est dans $\overline{\Omega}$: notre assertion est démontrée.

Nous sommes en mesure de démontrer que Ω est un domaine fondamental : il suffit de démontrer que $\Omega \cap \gamma \Omega$ est vide si $\gamma \neq id$. Soit x un point d'une telle intersection s'il en existe : alors, pour tout γ', γ'' , on a $d(x, x_0) \leq d(x, \gamma' x_0)$ et $d(\gamma^{-1}x, x_0) \leq d(\gamma^{-1}x, \gamma'' x_0)$. En prenant $\gamma' = \gamma$ et $\gamma'' = \gamma^{-1}$, on obtient $d(x, x_0) = d(x, \gamma x_0)$, ce qui montre que x appartient à la frontière de $\overline{\Omega}$ et non pas à son intérieur Ω . Contradiction.

Nous affirmons maintenant que $\overline{\Omega}$ est compact. Soit p_n une suite d'éléments de $\overline{\Omega}$: comme la surface quotient S est compacte, il existe une suite d'éléments γ_n de Γ tels que $\gamma_n p_n$ convergent vers un point \bar{p} de \mathbb{H}^2 . Comme Ω est un domaine fondamental, quitte à composer les γ_n par un élément de Γ , on peut supposer que \bar{p} appartient à $\overline{\Omega}$. Si \bar{p} appartient à Ω , les $\gamma_n p_n$ appartiennent eux aussi à Ω , ce qui n'est possible que si tous les γ_n sont triviaux : les p_n convergent vers \bar{p} .

Il reste le cas où Si \bar{p} appartient à la frontière $\partial \Omega$. Soit U une boule compacte centrée en \bar{p} : tous les $\gamma_n \Omega$ rencontrent U ; si $\gamma_n \Omega \neq \Omega$, il existe un point q dans U tel que $d(\gamma_n x_0, q) - d(x_0, q) < 0$, alors que $d(\gamma_n x_0, \bar{p}) - d(x_0, \bar{p}) \geq 0$: on en déduit que $\partial P_0(\gamma_n)$ rencontre U ; or, nous avons vu auparavant que ceci signifie que les γ_n sont en nombre fini. Donc, là encore, les p_n convergent dans \mathbb{H}^2 et donc dans le fermé $\overline{\Omega}$.

Étant compact, $\overline{\Omega}$ est contenu dans une boule B_R . C'est donc un polygône convexe. ■

7. GROUPES DE SCHOTTKY

Le théorème de Poincaré s'étend au cas non-compact : de manière plus général, au lieu de se restreindre aux convexes compacts de \mathbb{H}^2 , on peut considérer tout domaine P d'intérieur non vide intersection de demi-espaces de \mathbb{H}^2 , étant convenu qu'un demi-espace est (l'adhérence d') une composante connexe du complémentaire d'une géodésique complète.

De manière plus précise : soit P_1, \dots, P_{2k} un nombre fini de tels demi-espaces tels que si $i \neq j$, alors $(\mathbb{H}^2 \setminus P_i) \cap (\mathbb{H}^2 \setminus P_j) = \emptyset$. On note P l'intersection de tous les P_i : c'est un domaine convexe qui n'est sûrement pas compact. On choisit un appariement σ , i.e. une involution de $\{1, \dots, 2k\}$ dans lui-même : il existe alors toujours une isométrie envoyant le demi-espace $(\mathbb{H}^2 \setminus P_i)$ sur l'intérieur de $P_{\sigma(i)}$. Il en existe en fait plusieurs, qui diffèrent les unes des autres par des transformations hyperboliques le long de ∂P_i . Nous choisissons d'entre elles pour chaque i , que nous notons γ_i^σ , de sorte que $\gamma_{\sigma(i)}^\sigma$ soit l'inverse de γ_i^σ . On recolle P le long de ces bords géodésiques selon ces γ_i^σ : on obtient une surface S localement isométrique au disque de Poincaré ; c'est même plus facile de le vérifier ici puisqu'il n'y a pas de sommets. On peut reproduire les constructions vues précédemment : construire un groupe abstrait Γ agissant sur une surface abstraite \tilde{S} obtenues en recollant des copies de P , ainsi qu'une application développante $\mathcal{D} : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{H}^2$ et une représentation d'holonomie $\rho : \Gamma \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Dans ce cas, comme il n'y a pas de sommets, il n'y a pas de cycles de sommets ! Les seules relations intervenant dans la définition de Γ sont les relations $(a, \sigma(a)) \approx (\emptyset)$, qui sont par ailleurs bien sûr nécessaires pour que Γ soit un groupe. En d'autres termes, Γ est un groupe dit *libre* puisqu'il n'admet pas d'autres relations que celles admises par tous les groupes. Ce que nous avons dit reste assez flou, précisons-le :

Définition 7.1. *Un élément de $\hat{\Gamma}$ (dit aussi mot de l'alphabet $\mathcal{A} = \{1, \dots, 2k\}$) est réduit s'il ne contient pas deux termes successifs de la forme $(a, \sigma(a))$.*

Il doit être clair que tout élément de $\hat{\Gamma}$ est équivalent à un mot réduit (car, éliminer une occurrence $(a, \sigma(a))$ réduit la longueur du mot) et donc, que tout élément de Γ est représenté par un mot réduit. Il est moins clair que deux mots réduits ne sont équivalents que s'ils sont égaux, mais ce sera un des corollaires du lemme suivant bien connu :

Lemme 7.2 (lemme du ping-pong). *L'image par ρ d'un mot réduit (i_1, \dots, i_q) envoie P dans $P_{\sigma(i_1)}$.*

Preuve Pour montrer ce lemme, il suffit de montrer le fait suivant un peu plus précis :

L'image par ρ d'un mot réduit (i_1, \dots, i_q) envoie $\mathbb{H}^2 \setminus P_{i_q}$ dans $P_{\sigma(i_1)}$.

Cela se démontre par récurrence sur la longueur du mot. ■

Corollaire 7.3. *L'application ρ est injective.* ■

Corollaire 7.4. *Deux mots réduits ne représentent le même élément de Γ que s'ils sont égaux. En particulier, un mot réduit ne représente l'élément trivial de Γ que s'il est vide.* ■

Nous laissons au lecteur le soin de s'assurer que l'action de $\rho(\Gamma)$ sur \mathbb{H}^2 est libre et proprement discontinue, le quotient étant une surface \hat{S} localement isométrique au disque de Poincaré et complète. Les groupes $\rho(\Gamma)$ obtenus par ce procédé sont dits *groupes de Schottky*.

Mais il y a une différence de taille avec le cas où P est un polygone compact : *La surface recollée S n'est pas nécessairement complète!* En d'autres termes, il se peut que S et \hat{S} ne soient pas isométriques, que l'application développante \mathcal{D} ne soit pas surjective... Il est quand même toujours vrai que \mathcal{D} est injective et que son image est un domaine convexe de \mathbb{H}^2 ... Le mieux est sans doute d'étudier de soi-même ces situations. Pour les impatientes, voir [8].

Indiquons quand même un cas un peu plus agréable : on considère la figure dans le *compactifié conforme du disque de Poincaré*, $\overline{\mathbb{H}^2}$: si les adhérences dans $\overline{\mathbb{H}^2}$ des $\mathbb{H}^2 \setminus P_i$ sont deux-à-deux disjointes, la surface S est complète ; en d'autres termes, P est un domaine fondamental de $\rho(\Gamma)$. Il arrive que certains auteurs réservent la terminologie “groupe de Schottky” à ce cas particulier.

TROISIÈME SÉANCE : TROUS NOIRS BTZ

Nous indiquons ici quelques excellents textes : l'incontournable [11], [13] traitant de manière détaillée à souhait l'espace-temps de Kerr, ainsi que le précieux [7], qui a l'extrême avantage d'être en libre service. Nous supposons connues les notions de métrique lorentzienne, courbe de type temps, espace, lumière ou causale, ainsi que futur (ou passé) causal ou temporel d'une région.

8. L'ESPACE DE SCHWARZSCHILD

Il est remarquable que dès 1916, alors qu'Einstein ne publia la forme exacte de son équation qu'en 1915, K. Schwarzschild, hospitalisé pour maladie (fatale) sur le front russe, trouva une famille à un paramètre de solutions exactes de l'équation d'Einstein dans le vide, avec constante cosmologique nulle. Cette famille est assez déconcertante (du moins à l'époque), et se révéla par la suite des plus pertinentes pour d'écrire le voisinage d'un corps céleste, typiquement, une étoile et amenant à la notion même de trou noir. Elles ne dépendent que d'un seul paramètre, qui s'interprète aisément comme la masse d'un corps céleste isolé.

Du reste, un théorème fameux (théorème de Birkhoff) énonce que ces solutions sont les seules à symétrie sphérique. Une formulation exacte et précise de ce théorème demanderai davantage de commentaires, mais ce n'est pas notre sujet.

Ces espaces temps, dans les coordonnées dites (justement) de Schwarzschild, ont une métrique qui s'exprime sous la forme³ :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2M/r} + r^2 ds_0^2$$

Dans cette expression, $ds_0^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ désigne la métrique de la sphère ronde \mathbb{S}^2 . On doit aussi comprendre que \mathbb{R}^4 est pensé muni de coordonnées (x, y, z, t) , que r vaut $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et (θ, ϕ) sont les coordonnées sphériques de $(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}) \in \mathbb{S}^2$.

On remarque que ceci n'est pas une métrique sur tout \mathbb{R}^4 , mais sur \mathbb{R}^4 privé des lieux singuliers $r = 0$ et $r = 2M$. De fait, il est préconisé de ne penser cette expression que comme étant valable sur une carte particulière d'un espace-temps M^{KS} plus vaste, difféomorphe au produit de \mathbb{R}^2 par la sphère \mathbb{S}^2 , sur laquelle la solution même de Schwarzschild s'étend en une métrique lorentzienne - les facteurs \mathbb{S}^2 étant toujours des orbites d'une action de $SO(3)$. On parle alors de système de coordonnées de Kruskal-Szekeres (bien qu'il ne s'agisse pas d'un système de coordonnées sur \mathbb{R}^4 !). Ce nouvel espace-temps est alors maximal : il ne peut être plongé isométriquement dans un autre espace-temps plus grand. Donnons l'expression de sa métrique : on munit \mathbb{R}^2 de coordonnées (u, v) , on note U l'ouvert $v^2 - u^2 < 1$, on définit une fonction $r = r(u, v)$ par la relation :

$$(r/2M - 1)e^{r/2M} = u^2 - v^2$$

On peut alors définir sur $U \times \mathbb{S}^2$ la métrique lorentzienne suivante :

$$ds_{KS}^2 = (32M^3/r)e^{-r/2M}(-dv^2 + du^2) + r^2 ds_0^2$$

³Après normalisation affectant à la vitesse de la lumière c et à la constante gravitationnelle G la valeur commune 1.

$U \times \mathbb{S}^2$ muni de cette métrique ds_{KS}^2 est précisément l'espace M^{KS} de Kruskal-Szerekes. Notez que l'affectation du nom r à la fonction ci-dessus n'est pas arbitraire : la zone $\{r > 2M, u > 0\}$ (respectivement $\{0 < r < 2M, v > 0\}$) de M^{KS} est isométrique au domaine $\{r > 2M\}$ (respectivement $\{0 < r < 2M\}$) de l'espace de Schwarzschild. Il apparaît ainsi que $\{r = 2M\}$ n'était pas une réelle singularité, puisqu'il suffit de se placer dans le bon système de coordonnées pour faire disparaître cette singularité. Par contre, la singularité $\{r = 0\}$ persiste.

Les zones $B^+ = \{u^2 < v^2, v > 0\}$ et $B^- = \{u^2 < v^2, v < 0\}$ sont remarquables : aucune courbe causale orientée vers le futur (i.e. sur laquelle v est une application croissante) et issue d'un point de B^+ ne peut s'échapper de B^+ et, de manière analogue, aucune courbe causale orientée vers le futur ne peut pénétrer dans B^- . On dit que B^+ est un trou noir, B^- un trou blanc et M^{KS} lui-même est qualifié de "trou de ver" (wormhole en anglais). Tout lecteur (même occasionnel) de science-fiction comprendra les raisons de ces termes.

Ces notions semblent naturelles, mais insistons sur le présupposé sur lequel elles reposent : on part du principe que l'observateur λ est dans la zone $\{u^2 - v^2 > 0\}$ et donc, la zone B^+ lui semble effectivement mystérieuse, puisqu'aucun signal émanant de cette région ne peut lui parvenir. De plus, la singularité $\{u^2 = v^2, v > 0\}$, qu'un voyageur intrépide et insouciant pourrait atteindre en un temps (propre) fini, lui est invisible (celà, du reste, quand bien même lui prendrait la fantaisie de pénétrer dans B^+) - remarquons quand même qu'il observe partout les signaux émis par la singularité $\{r = 0, v < 0\}$, qu'il est tentant de qualifier de "Big Bang". Mais au nom de quel principe faut-il privilégier la zone $\{u^2 - v^2 > 0\}$ comme étant le lieu naturel d'un citoyen normal ?

On peut instituer cette règle de bonnes mœurs de la manière suivante : il existe une *compactification conforme* naturelle de M^{KS} , obtenues en adjoignant un bord, dit *bord de Penrose*. Nous n'avons pas le temps ici de développer cette notion de compactification conforme - nous préférons le faire ultérieurement dans le cadre des trous noirs BTZ. Disons au moins que la partie "future" de cette compactification est l'ensemble des rayons géodésiques orientés vers le futur *complets*, quotienté par une certaine relation d'équivalence. De manière moins élaborée, mais plus précise et répondant aussi bien à la question que nous venons de soulever, on peut caractériser $M^{KS} \setminus B^+$ comme étant le lieu des points à partir desquels on peut envisager effectuer un trajet causal de temps propre infini (le cas limite $\{u^2 = v^2, v \geq 0\}$ demandant une certaine adresse, sans aucun droit à l'erreur et nécessitant de voyager à la vitesse de la lumière).

Remarque 8.1. L'espace de Schwarzschild admet une généralisation naturelle : l'espace de Reissner-Nordstrom, qui est aussi une solution à symétrie sphérique de l'équation d'Einstein, mais pas dans le vide ; en présence d'un champ électromagnétique. Son expression est :

$$ds^2 = -\Delta dt^2 + \Delta^{-1} dr^2 + r^2 ds_0^2$$

où :

$$\Delta = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{p^2 + q^2}{r^2}$$

M s'interprète toujours comme étant la masse du corps céleste, p sa charge électrique totale et q sa charge magnétique totale.

On peut dans ce cas plonger cette variété lorentzienne dans un espace temps maximal M_{RS}^{max} , mais de description beaucoup plus délicate que celle de M^{KS} ! De manière expéditive, décrivons succinctement les propriétés causales de M_{RS}^{max} : on peut d'abord étendre l'espace de Reissner-Nordstrom (primitif) en un espace difféomorphe à $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2$, que nous appellerons "bloc RN". Si la force électro-magnétique est trop importante, i.e. $M < p^2 + q^2$, ce bloc admet ce qu'on appelle une singularité nue, qui, pour parler succinctement (et de manière floue) peut être atteinte en un temps fini, puis être quittée. Les physiciens excluent ce cas de figure et le proscrivent comme étant physiquement irréaliste : c'est ce qu'on appelle la *Censure Cosmique* (cachez cette singularité que je ne saurai voir).

Par contre, si $M > p^2 + q^2$, le bloc admet des propriétés similaires à celles de M^{KS} : il existe un trou noir B^+ tel que B^+ est invisible pour tout observateur décrivant dans ce bloc une trajectoire causale de temps propre infini. Mais une première différence essentielle est que même après avoir pénétré dans B^+ , un voyageur a de très bonnes chances de pouvoir continuer son parcours en un temps propre infini ! Cependant, il ne pourra le faire en restant dans le bloc, il rentrera plutôt dans une autre copie de ce bloc, dans sa partie B^- du reste. Ainsi, M_{RS}^{max} s'obtient en empilant une infinité de blocs, se connectant les uns aux autres selon leurs régions B^\pm .

Une autre différence essentielle est que si on considère *tout* le bord conforme de M^{KS} , il n'y a plus de région invisible. En d'autres termes, tout point de M^{KS} est visible depuis le bord conforme. La notion de trou noir est ainsi relative à chaque bloc RN ; le point de vue à adopter est que chaque observateur est confiné au bord conforme d'un de ses blocs et il existe alors bien une partie du bloc RN qui lui reste opaque.

Il y a aussi une autre généralisation de la métrique de Schwarzschild, aux propriétés causales fascinantes : l'espace de Kerr, pouvant être interprété comme créé par un corps céleste à symétrie sphérique, mais animé d'un mouvement de rotation. Le (très bon) livre [13] lui est tout entier consacré.

Sa métrique, dans une carte particulière d'un ouvert correspondant à l'extérieur d'un voisinage du corps céleste, s'exprime sous la forme suivante :

$$-\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right)dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 - \sin^2(\theta)\frac{4Mra}{\rho^2}d\phi dt + \rho^2 d\theta^2 + (r^2 + a^2 + \sin^2(\theta)\frac{2Mra}{\rho^2})\sin^2(\theta)d\phi^2$$

Avec :

- $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$ et $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2(\theta)$,
- M une quantité positive représentant la masse,
- a une quantité représentant le moment angulaire par unité de masse.

Notons que quand a vaut 0, on retrouve l'expression de Schwarzschild. Les deux derniers termes définissent une métrique sur la sphère affectées des coordonnées θ, ϕ , qui n'est plus un multiple de la métrique usuelle de la fibre. Notons aussi que la translation dans le temps t est toujours une isométrie, mais il n'y a pas d'hypersurface orthogonale à ces trajectoires de temps (on dit que Kerr n'est pas *statique*, contrairement à Schwarzschild).

L'espace de Kerr, tel que décrit ci-dessus, admet lui aussi une extension maximale, obtenue en recollant des parties particulières, de manière analogue à la construction de l'espace de Reissner-Nordstrom maximal. La description de la structure causale sur cet espace maximal est délicate, indiquons brièvement ici que là encore, l'espace de Kerr maximal se décompose

en blocs successifs, le suivant dans le futur du précédent et qu'on ne peut atteindre le bloc suivant qu'en traversant l'horizon d'un trou noir et en émergeant dans un "trou blanc".

Une des propriétés remarquables et surprenantes de (l'extension maximale de) l'espace de Kerr est le fait que son flot géodésique est totalement intégrable, au sens où il existe suffisamment de fonctions invariantes par le flot géodésique pour distinguer toutes ses orbites - les symétries de l'espace de Kerr (avec le Théorème de Noether) fournissent plusieurs de ces fonctions invariantes, mais elles ne suffisent pas, il y a un autre invariant, dit *invariant de Carter*, d'origine un peu mystérieuse et qui complète la famille de fonctions invariantes.

9. L'ESPACE ANTI-DE SITTER

9.1. Définitions. L'espace anti-de Sitter de dimension n , noté AdS_n , est la variété lorentzienne définie de la manière suivante : on note $\mathbb{R}^{2,n-1}$ l'espace vectoriel de dimension $n+1$, muni de la forme quadratique :

$$Q = -u^2 - v^2 + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2$$

L'espace anti-de Sitter AdS_n est le lieu où cette forme quadratique vaut -1 , équipé de la métrique lorentzienne obtenue en restreignant Q aux espaces tangents. Le groupe d'isométries lorentziennes de AdS_n contient manifestement $\text{SO}_0(2, n-1)$, la composante connexe de l'identité de $\text{SO}(2, n-1)$ et il n'est pas difficile de montrer qu'il s'agit là de toutes les isométries préservant l'orientation de AdS_n ainsi que son orientation chronologique. Nous considérerons aussi le modèle de Klein de l'espace anti-de Sitter : il s'agit de la projection radiale, notée de \mathbf{ADS}_n de AdS_n dans l'espace projectif $\mathbb{R}P^{n+1}$ de \mathbb{R}^{n+1} . Observons que AdS_n est un revêtement double de \mathbf{ADS}_n .

Nous ne considérerons ici que le cas $n=3$, i.e. l'espace anti-de Sitter AdS_3 . Remarquons tout d'abord que l'opposé de l'application déterminant (notée $-det$) sur $M(2, \mathbb{R})$, espace vectoriel des matrices 2×2 , est justement une forme quadratique non dégénérée de signature $(2, 2)$. Ainsi, AdS_3 s'identifie à $SL(2, \mathbb{R}) \subset M(2, \mathbb{R})$, équipé de la restriction de $-det$. De plus, l'action de $SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R})$ sur $SL(2, \mathbb{R})$ par $(a, b).g = agb^{-1}$ est une action isométrique pour la métrique lorentzienne induite par $-det$. Ceci montre que $O(2, 2)$, le groupe des isométries de AdS_3 , contient (quasiment) un sous-groupe isomorphe à $SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R})$.

Ceci n'est pas très correct puisque l'élément $(-Id, -Id)$ de $SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R})$ agit trivialement sur $SL(2, \mathbb{R})$. On considère donc plutôt l'action sur le modèle de Klein \mathbf{ADS}_3 , dont AdS_3 est un revêtement double ; il est alors correct de dire que $PSL(2, \mathbb{R}) \times PSL(2, \mathbb{R})$ est isomorphe à la composante neutre du groupe des isométries de \mathbf{ADS}_3 .

Cette simple remarque permet de trouver pléthore de quotients compacts de AdS_3 : prendre n'importe quel sous-groupe discret Γ cocompact de $PSL(2, \mathbb{R}) \approx \text{SO}_0(1, 2)$ (en partant par exemple d'un polygone dans le disque de Poincaré) ; l'action de Γ sur $PSL(2, \mathbb{R})$ par translations à gauche est alors une action cocompacte sur $\mathbf{ADS}_3 \approx PSL(2, \mathbb{R})$ par isométries.

9.2. Quelques propriétés géométriques.

9.2-a. *Le bord conforme.* Nous notons $\partial\mathbf{ADS}_3$ la frontière de \mathbf{ADS}_3 dans $\mathbb{R}P^3$: nous l'appelons *bord conforme de \mathbf{ADS}_3* . L'union $\mathbf{ADS}_3 \cup \partial\mathbf{ADS}_3$ est notée $\overline{\mathbf{ADS}_3}$, nous l'appelons *compactifié conforme de \mathbf{ADS}_3* . C'est bien sûr l'adhérence de \mathbf{ADS}_3 dans $\mathbb{R}P^3$. Par revêtement double, on peut définir le bord conforme ∂AdS_3 et le compactifié conforme $\overline{\text{AdS}_3}$.

9.2-b. *L'hyperboloïde.* L'ouvert \mathbf{ADS}_3 de $\mathbb{R}P^3$, intersecté avec une carte affine $\approx \mathbb{R}^3$ bien choisie est le domaine simplement connexe bordé par une hyperboloïde à une nappe ; nous noterons \mathcal{H} ce domaine ouvert. Pour réobtenir \mathbf{ADS}_3 tout entier à partir de ce domaine, il suffit de lui adjoindre un disque contenu dans le plan projectif bordant la carte affine dans $\mathbb{R}P^3$. Du reste, ce disque, muni de la restriction de la métrique lorentzienne ambiante, est isométrique au disque de Poincaré, on peut aussi dire que c'est une version du modèle de Klein du disque de Poincaré.

9.2-c. *Géodésiques.* Les géodésiques de AdS_3 sont les intersections de cette nappe avec les 2-plans de $\mathbb{R}^{2,2}$; dans \mathbf{ADS}_3 , ce sont donc les intersections entre \mathbf{ADS}_3 et les droites projectives de $\mathbb{R}P^3$. Les droites qui ne rencontrent pas $\partial\mathbf{ADS}_3$, i.e. contenues dans \mathbf{ADS}_3 , sont des géodésiques de type temps ; celles qui rencontrent $\partial\mathbf{ADS}_3$ en deux points distincts sont, quand on prend leur intersection avec \mathbf{ADS}_3 , des géodésiques de type espace ; enfin, celles qui sont tangentes en un point de $\partial\mathbf{ADS}_3$ sont de type lumière.

9.2-d. *Isométries, champs de Killing.* Nous entendons ici par groupe des isométries de $\mathbf{ADS}_3 \approx PSL(2, \mathbb{R})$ le sous-groupe d'indice fini $PSL(2, \mathbb{R}) \times PSL(2, \mathbb{R})$. Comme nous nous intéresserons surtout aux champs de Killing, cette restriction à un sous-groupe d'indice fini n'a aucune incidence. Un *champ de Killing* est un sous-groupe à un paramètre de ce groupe, c'est donc en fait la donnée de deux sous-groupes à un paramètre de $PSL(2, \mathbb{R})$.

Une classe de conjugaison dans $\text{Isom}(\mathbf{ADS}_3)$ correspond donc à la donnée de deux classes de conjugaison d'éléments de $PSL(2, \mathbb{R})$, or, ces dernières classes sont bien comprises : elles sont elliptique, parabolique ou hyperbolique (cf. cours C. Frances). Notons que deux éléments paraboliques sont toujours soit conjugués entre eux soit l'un conjugué à l'inverse de l'autre. Par contre, les sous-groupes elliptiques sont distingués entre eux par un nombre réel, indiquant à quelle vitesse les cercles concentriques sont parcourues par les orbites. En d'autres termes, le groupe elliptique de paramètre a est :

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(a\theta) & \sin(a\theta) \\ -\sin(a\theta) & \cos(a\theta) \end{pmatrix}$$

Le groupe hyperbolique de paramètre r est :

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \exp(rt) & 0 \\ 0 & \exp(-rt) \end{pmatrix}$$

9.3. **Revêtement universel.** L'espace anti-de Sitter n'est pas simplement connexe : nous noterons $\widetilde{\text{AdS}_3}$ son revêtement universel. En fait, comme toute matrice de rang 2 s'écrit sous la forme KT , où K est une rotation (élément de $\text{SO}(2)$) et T une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux positifs, on obtient que AdS_3 est difféomorphe au produit du cercle par \mathbb{R}^2 . Son groupe fondamental est monogène, engendré par un élément que nous noterons δ et AdS_3 s'identifie au quotient de $\widetilde{\text{AdS}_3}$ par l'action du groupe engendré par δ .

Le revêtement universel peut être décrit de la manière suivante : on empile une infinité de copies \mathcal{H}_i ($i \in \mathbb{Z}$) du domaine \mathcal{H} décrit ci-dessus, en joignant deux tels domaines successifs $\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_{i+1}$ par une copie du modèle de Klein du disque de Poincaré. L'application δ envoie chaque \mathcal{H}_i sur son voisin \mathcal{H}_{i+1} .

9.4. Causalité. Le futur (resp. passé) d'un point x_0 dans une variété lorentzienne est le lieu des points pouvant être atteint par une courbe de type temps issue de x_0 et orientée vers le futur (respectivement passé). Si on autorise en outre les courbes causales, on obtient le futur dit causal. cette notion dans AdS_3 ou \mathbf{ADS}_3 est triviale : tout point est dans le futur et dans le passé de tout point. Par contre, cette notion n'est pas triviale dans le revêtement universel $\widetilde{\text{AdS}}_3$. On peut la décrire géométriquement de la manière suivante : soit \tilde{x}_0 un point de $\widetilde{\text{AdS}}_3$, se projetant sur un point x_0 de AdS_3 et $[x_0]$ de \mathbf{ADS}_3 . Notons P_0 l'orthogonal de x_0 pour la forme quadratique ambiante de $\mathbb{R}^{2,2}$. Le complémentaire de la projection de P_0 dans $\mathbb{R}P^3$ est une carte affine, de coordonnées (x, y, z) , où les points appartenant à \mathbf{ADS}_3 , i.e. à \mathcal{H} , sont ceux satisfaisant :

$$x^2 + y^2 < 1 + z^2$$

On peut choisir ces coordonnées de sorte que $[x_0]$ soit de coordonnées $(0, 0, 0)$. Rappelons que $\widetilde{\text{AdS}}_3$ est obtenu en empilant des copies \mathcal{H}_i de \mathcal{H} (et en prenant les parties communes de leurs adhérences) ; on peut convenir que $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$ et que chaque \mathcal{H}_{i+1} (resp. \mathcal{H}_{i-1}) soit dans le futur (resp. passé) de \mathcal{H}_i . Le futur (resp. passé) de $[x_0]$ consiste alors en l'union de :

- l'adhérence de chaque \mathcal{H}_i , avec $i > 0$ (resp. $i < 0$),
- l'ensemble des points de \mathcal{H} vérifiant : $z^2 < x^2 + y^2$ et $z > 0$ (resp. $z < 0$).

10. TROUS NOIRS BTZ

L'étude des quotients compacts de AdS_3 , aussi intéressante quelle soit ([14]) n'est pas notre véritable préoccupation dans ce cours. Nous gravitons plutôt autour de l'analogie du théorème de Birkhoff en dimension $2 + 1$, en cherchant quelle est la forme raisonnable d'espaces temps représentant des corps célestes isolés, en rotation sur eux mêmes ou non. Une référence adaptée pour compléter cette section est [1] (à lire avec précaution, mais ce texte reste un des meilleurs, et s'inscrit dans un point de vue proche de ce qui est développé ici).

Tout d'abord, comme nous l'avons évoqué précédemment, une variété lorentzienne M de dimension $2 + 1$ satisfaisant l'équation d'Einstein (dans le vide, de constante cosmologique Λ) est nécessairement à courbure sectionnelle constante K , de signe égal à celui de Λ . Ceci signifie que la métrique lorentzienne est celle provenant d'une (G, X) -structure sur M , où X est la variété lorentzienne modèle de courbure constante K et G le groupe des isométries de X (préservant l'orientation, ainsi qu'une orientation chronologique de X). La condition "symétrie sphérique", apparaissant dans le théorème de Birkhoff (valable en dimension $3 + 1$) signifie dans ce cas l'existence d'un groupe d'isométries isomorphe à $\text{SO}(2)$, dont les orbites sont des courbes de dimension 1 de type espace. Un tel champ de Killing est le tiré en arrière par (la différentielle de) l'application développante d'un champ de Killing Y sur X , mais qui n'est pas nécessairement périodique. En fait, le fait que les orbites sur la (G, X) -variété soient toutes périodiques, de même période T , se traduit par la condition suivante sur Y : le temps T du flot engendré par Y doit appartenir au groupe d'holonomie. De plus, le groupe d'holonomie doit préserver Y , ce qui signifie que tous les éléments du groupe d'holonomie

doivent commuter avec chaque élément du groupe à un paramètre d'isométries engendré par Y . Enfin, le fait que les orbites du champ de Killing sur M soient spatiales équivaut à requérir que l'application développante prend ses valeurs dans l'ouvert de X où les orbites de Y sont de type espace.

Ces conditions sont satisfaites par plusieurs exemples de (G, X) -variétés. Plutôt que discuter en général toutes les situations possibles, nous préférons ajouter une hypothèse supplémentaire, naturelle si on souhaite que M joue le rôle de la géométrie d'un espace-temps créé par un corps céleste dans son voisinage⁴ : on demande à ce que M soit difféomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$.

Dans ce cas, le groupe d'holonomie est en définitive engendré par l'élément $\gamma = Y^T$ de G . On n'oubliera pas dans la suite que γ est le temps T d'un champ de Killing Y .

Nous n'allons considérer ici que le cas où la constante cosmologique est négative, i.e. celui où l'espace-temps est une (G, X) -variété, avec $X = \mathbf{ADS}_3 \approx PSL(2, \mathbb{R})$ et $G = PSL(2, \mathbb{R}) \times PSL(2, \mathbb{R})$. C'est du reste un excellent exercice que de reproduire cette étude dans le cas où X est l'espace de Minkowski, ou encore celui où il est l'espace de Sitter (pour ceux qui le connaissent). Alors, γ est une paire d'éléments (γ_1, γ_2) de $PSL(2, \mathbb{R})$. Notons que conjuguer γ dans $PSL(2, \mathbb{R}) \times PSL(2, \mathbb{R})$ par un élément h revient à composer l'application développante par h : ceci ne modifie pas la (G, X) -structure. Nous n'avons donc qu'un nombre fini de cas à considérer, répertoriés dans [2] et [1] - mais avec une nomenclature des plus inélégantes à nos yeux. Tous les cas sont étudiés dans [2], mais il s'agit là encore d'un bon exercice qu'il est utile de pratiquer soi-même.

Dans chacun de ces cas, on détermine la région de \mathbf{ADS}_3 où le champ de Killing Y est de type espace, on le note $\Omega(\gamma)$. Il s'avère que dans tous les cas, l'action du groupe engendré par γ sur $\Omega(\gamma)$ est libre et proprement discontinue (mais notez que pour certains γ , $\Omega(\gamma)$ est vide !). Le quotient $M(\gamma)$ de $\Omega(\gamma)$ par cette action est alors une variété localement anti-de Sitter. De plus et cela n'est pas véritablement une tautologie, cette variété lorentzienne est causale, au sens où elle ne contient aucune courbe causale périodique.

En définitive, seul mérite un intérêt soutenu le cas où γ_1 et γ_2 sont tous les deux hyperboliques (il y a aussi le cas, dit *extrême*, où γ_1 et γ_2 sont deux éléments paraboliques conjugués, mais que nous mettons lui aussi de côté dans ces notes). La variété $M(\gamma)$ est dans ce cas appelée Trou noir BTZ (selon les initiales des auteurs de la première version de [2]). Notons que cette terminologie est assez trompeuse : $M(\gamma)$ tout entier n'est pas un trou noir, mais contient une zone méritant d'être interprétée comme un trou noir, tant elle présente des similitudes frappantes avec la zone B^+ d'un espace de Schwarzschild ou de Kerr. C'est ce que nous souhaitons mettre en avant dans la suite.

Notons d'abord que $M(\gamma)$, à isométrie près, ne dépend dans ce cas que des classes de conjugaison de γ_1 et γ_2 . Nous définissons deux nombres réels $0 \leq r_- < r_+$ de sorte que :

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} e^{\pi(r_+ - r_-)} & 0 \\ 0 & e^{-\pi(r_+ - r_-)} \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} e^{\pi(r_+ + r_-)} & 0 \\ 0 & e^{-\pi(r_+ + r_-)} \end{pmatrix}$$

⁴Nous aurions pu d'entrée introduire cette hypothèse, court-circuitant toute la discussion précédente, mais j'ai jugé utile de faire une mise au point utile pour apprécier à sa juste valeur l'argumentation faite dans [2] pour justifier l'affirmation selon laquelle les métriques BTZ sont les solutions stationnaires à symétrie axiale de l'équation d'Einstein.

Le sous groupe à un paramètre correspondant agit sur $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ de la manière suivante :

$$Y^t(g) = \begin{pmatrix} e^{t\pi(r_+ - r_-)} & 0 \\ 0 & e^{-t\pi(r_+ - r_-)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t\pi(r_+ + r_-)} & 0 \\ 0 & e^{t\pi(r_+ + r_-)} \end{pmatrix}$$

En dérivant par rapport à t en $t = 0$, puis en prenant $-\det$, on obtient que la norme de $Y(g)$ est du signe de (en tenant compte de $ad - bc = 1$) :

$$(r_+^2 - r_-^2)bc + r_-^2$$

Donc, $\Omega(\gamma)$ est dans ce cas le lieu où bc est strictement inférieur à $r_-^2 / (r_+^2 - r_-^2)$.

10.1. Le cas statique $r_- = 0$: $\Omega(\gamma)$ est alors la zone $bc < 0$. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier qu'elle est contenue dans une carte affine (par exemple, celle qui contient toutes les matrices *non* symétriques) et que si cette carte affine est bien choisie, l'ouvert $\Omega(\gamma)$, décrit dans la figure 1, est l'ouvert compris entre deux hyperplans parallèles, chacun tangent à l'hyperboloïde en des points x_+ , x_- . Ces hyperplans sont $\{b = 0\}$ et $\{c = 0\}$; ils se prolongent en s'intersectant en une droite dans le plan projectif à l'infini correspondant aux matrices diagonales, cette droite est la droite des zéros de Y (des points fixes de γ) (dans la figure, nous avons dessiné deux telles droites à l'infini pour des besoins de perspective, mais ces deux segments doivent être pensés confondus. La figure devient correcte si on l'interprète comme étant le domaine $\Omega(\gamma)$ tronqué entre deux plans horizontaux). Nous appelons p , q les points de l'hyperboloïde extrémités de cette droite.

Nous avons aussi dessiné sur la figure quelques orbites typiques de Y .

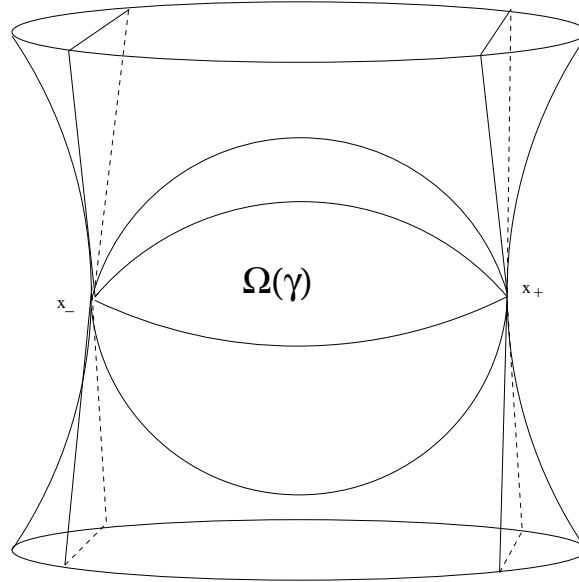


FIG. 1. Le domaine $\Omega(\gamma)$ dans le cas statique.

L'adhérence dans $\mathbb{R}P^3$ de $\Omega(\gamma)$ rencontre l'hyperboloïde. L'intérieur de l'intersection entre cette adhérence et ∂ADS_3 est l'union de deux bandes, sur lesquelles l'action de γ s'étend en une action libre et proprement discontinue. Leurs quotients sont des anneaux, qu'on peut adjoindre naturellement à $M(\gamma)$ de manière à former une variété à bord (mais toujours non-compacte) $\overline{M}(\gamma)$. Le bord ajouté doit être pensé comme un *bord conforme à l'infini*, c'est la manière correcte dans ce cas de figure de définir le bord de Penrose évoqué lors de la description de l'espace de Schwarzschild. On peut aussi le définir comme étant le lieu de ∂ADS_3 pouvant être atteint par des rayons géodésiques lumières *complets* entièrement contenus dans $\Omega(\gamma)$.

On réalise alors l'existence de deux zones particulières γ -invariantes, chacune étant un tétraèdre de sommets (x_-, x_+, p, q) , que nous noterons B^+ et B^- , B^+ étant dans le futur de B^- . La zone B^+ a pour propriété qu'aucun rayon causal (orienté dans le futur) issu de l'un de ses points ne peut atteindre le bord conforme à l'infini. Cette propriété - qui s'exprime de manière analogue pour le projeté de B^+ dans le quotient $M(\gamma)$ est tout à fait similaire à celle que satisfait le trou noir dans le modèle de Schwarzschild.

Pour réaliser la figure suivante, nous avons changé la carte affine, de sorte qu'elle inclut les 4 points x_-, x_+, p, q .

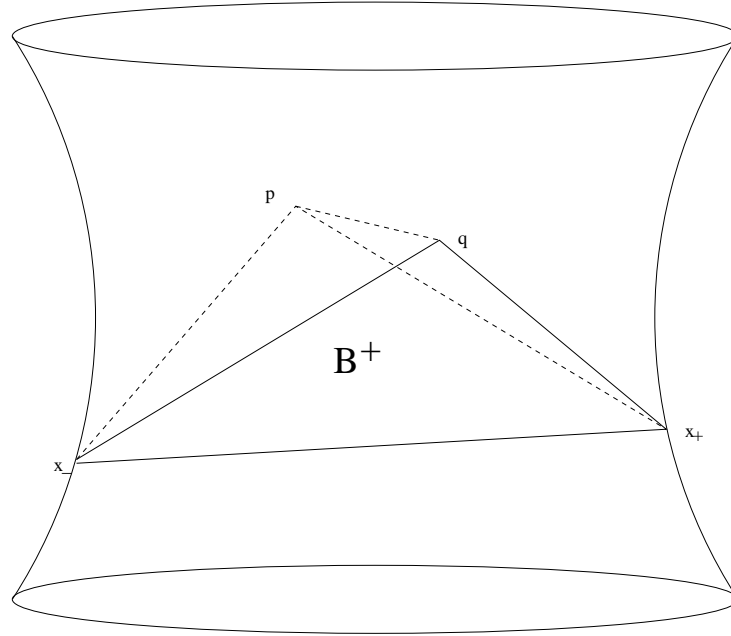


FIG. 2. Le trou noir avant passage au quotient.

Comme dernier commentaire, observons que dans un système de coordonnées locales bien choisies sur un certain ouvert de $M(\gamma)$, la métrique lorentzienne admet l'expression :

$$ds_{BTZ}^2 = -(-M + r^2)dt^2 + \frac{dr^2}{(-M + r^2)} + r^2d\phi^2$$

où M (la masse) vaut $4r_+^2 = 4r_-^2 = 4r_-r_+$ (une erreur dans la constante est encore possible dans cette version préliminaire du texte). La convention implicite "ϕ définie modulo 2π ", i.e. $\phi = 0$ identifié à $\phi = 2\pi$, code le passage au quotient en identifiant selon γ .

10.2. Le cas non-statique $r_- > 0$: Ce cas est alors similaire à l'espace de Kerr ! Notons que l'ouvert Ω dans le cas statique ne dépend pas de la valeur de r_+ , nous l'appelons ici sobrement Ω_0 .

Une analyse automatique montre que $\Omega(\gamma)$ n'est plus contenu dans un seul ouvert affine du type \mathcal{H} . C'est en fait l'intersection dans $\mathbb{R}P^3$ entre \mathbf{ADS}_3 et l'intérieur d'un autre hyperboloïde (projectif) tangent à $\partial\mathbf{ADS}_3$ en les points x_\pm et contenant les droites projectives (p, x_\pm) et (q, x_\pm) (voir figure 3).

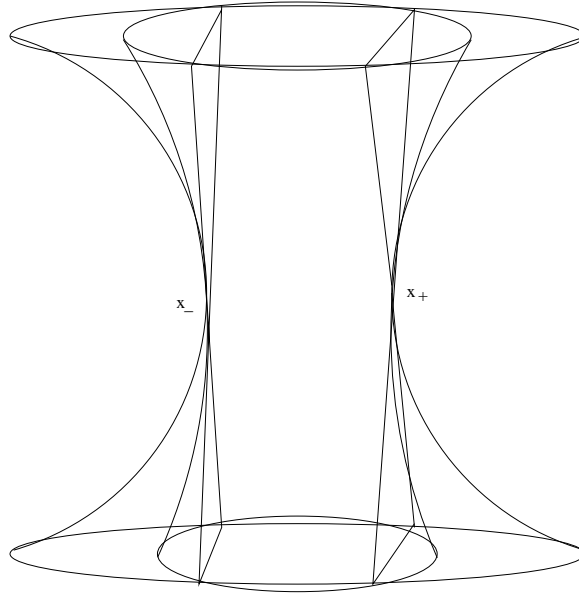


FIG. 3. Le domaine $\Omega(\gamma)$.

La figure globale correcte est la suivante :

Appelons \mathcal{H}_0 l'ouvert affine contenant Ω_0 décrit ci-dessus, mais nous le pensons maintenant dans \widetilde{AdS}_3 . Encore une fois, ce dernier est obtenu en empilant des copies \mathcal{H}_i successives de \mathcal{H}_0 et, dans chacune de ces copies, il existe un exemplaire $\Omega(\gamma)_i$ de $\Omega(\gamma)$: ces exemplaires s'ajoutent les uns aux autres pour former un ouvert⁵ $\widetilde{\Omega}(\gamma)$ de \widetilde{AdS}_3 . Le quotient de cet ouvert par le relevé de γ qui préserve chaque $\Omega(\gamma)_i$ est une variété lorentzienne, à la structure causale de laquelle on peut appliquer au mot près notre description de l'espace de Reissner-Nordstrom maximal (et donc aussi celle de l'espace de Kerr maximal).

⁵Nous trichons un peu, il faut ajouter des parties communes dans les disques de Poincaré de jonction, mais la formulation correcte nous semble aisée à trouver soi-même.

Enfin, on peut trouver dans certaines coordonnées locales l'expression suivante de la métrique BTZ, assez semblable à celle de Kerr ou celle de Reissner-Nordstrom :

$$ds_{BTZ} = -\left(-M + r^2 + \frac{J^2}{4r^2}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{-M + r^2 + J^2/4r^2} + r^2\left(d\phi - \frac{J}{2r^2}dt\right)^2$$

avec $M = r_+^2 + r_-^2$ s'interprétant comme la masse, et $J = 2r_-r_+$ comme un moment angulaire. Les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$M > 0, |J| \leq M.$$

RÉFÉRENCES

- [1] S. Aminneborg, I. Bengtsson, S. Holst, *A spinning anti-de Sitter wormhole*, *Class. Quant. Grav.*, **16** (1999), 363–382, gr-qc/980528.
- [2] M. Banados, M. Henneaux, C. Teitelboim, J. Zanelli, *Geometry of the 2 + 1 Black Hole*, *Phys. Rev. D*, **48** (1993), 1506–1525, gr-qc/9302012.
- [3] T. Barbot, *Géométries hyperbolique et anti-de Sitter*, texte d'un cours DEA 2002-2003, disponible à <http://www.umpa.ens-lyon.fr/~barbot/>
- [4] T. Barbot, *Causal properties of AdS-isometry groups II : BTZ multi-black holes*, preprint, math.GT/0510065.
- [5] J.P. Benzécri, *Variétés localement affines et projectives*, *Bull. Soc. Math. France* **88** (1960), 229-332.
- [6] S. Carlip, *Lectures on (2+1)-dimensional gravity*, *J. Korean Phys. Soc.*, **28** (1995), S447-S467 ; gr-qc/9503024.
- [7] S.M. Carroll, *Lecture Notes on General Relativity*, arXiv : gr-qc/9712019, texte mis à jour sur <http://itp.ucsb.edu/~carroll/notes/>.
- [8] D.B.A. Epstein C. Petronio, *An exposition of Poincaré's polyhedron theorem*, *Ens. Math.* **40** (1994), 113–170.
- [9] C. Godbillon, *Éléments de topologie algébrique*, Hermann, Collection Méthodes. 7
- [10] B. Maskit, *Kleinian Groups*, Springer-Verlag.
- [11] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation*, (1973) Freeman, San Fransisco.
- [12] R. Mneimné, F. Testard, *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*, Hermann, Collection Méthodes.
- [13] B. O'Neill, *The geometry of Kerr black holes*, (1995) A.K. Peters, Wellesley, Massachusetts.
- [14] F. Salein, *Variétés anti-de Sitter de dimension 3 exotiques*, *Ann. Inst. Fourier*, **50** (2000), 257–284.
- [15] D. Sullivan, *A Generalization of Milnor's Inequality concerning Affine Foliations and Affine Manifolds*, *Comment. Math. Helv.*, **51** (1976), 183–189.

CNRS, UMR 5669, UNIVERSITÉ DE LYON, ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON, 46 ALLÉE D'ITALIE, 69364 LYON

E-mail address: Thierry.Barbot@umpa.ens-lyon.fr