

# Valeur en 2 de la fonction $L$ d'une forme modulaire de poids 2

François Brunault

Exposé au groupe de travail théorie des nombres et analyse,  
Université de Clermont-Ferrand, mercredi 16 novembre 2005

<http://www.math.jussieu.fr/~brunault/exposes/clermont2.pdf>

Nous présentons les travaux de Beilinson sur la valeur en 2 de la fonction  $L$  d'une forme modulaire de poids 2, et indiquons les améliorations possibles.

## 1. Fonctions $L$ des formes modulaires

Notons  $\mathcal{H} = \{z \in \mathbf{C}, \Im(z) > 0\}$  le demi-plan de Poincaré, muni de l'action homographique du groupe  $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$  :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}), z \in \mathcal{H}.$$

Soit  $N \geq 1$  un entier et  $\Gamma_1(N)$  le sous-groupe de congruence

$$\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}), a \equiv d \equiv 1 \pmod{N}, c \equiv 0 \pmod{N} \right\}.$$

L'espace  $S_2(\Gamma_1(N))$  des *formes paraboliques de poids 2 pour  $\Gamma_1(N)$*  est constitué, par définition, des fonctions holomorphes  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{C}$  vérifiant

- $f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^2 f(z)$  pour tout  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1(N)$ .
- $f$  "s'annule aux pointes" (parabolique).

C'est un espace vectoriel complexe de dimension finie. Soit  $f \in S_2(\Gamma_1(N))$ . Puisque  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_1(N)$ , la fonction  $f$  est invariante par  $z \mapsto z + 1$  et admet un développement de Fourier de la forme

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2i\pi n z} \quad (z \in \mathcal{H}).$$

**Définition 1.** — La fonction  $L$  de  $f \in S_2(\Gamma_1(N))$  est définie par

$$L(f, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \quad (\Re(s) > \frac{3}{2}).$$

La convergence de  $L(f, s)$  pour  $\Re(s) > \frac{3}{2}$  résulte de l'estimation  $a_n = O(\sqrt{n})$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

**Proposition 2.** — La fonction  $L(f, s)$  admet un prolongement holomorphe au plan complexe.

*Démonstration.* — Cela résulte de l'identité

$$(1) \quad (2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(f, s) = \int_0^\infty y^{s-1}f(iy)dy$$

et du fait que la fonction  $\Gamma$  ne s'annule pas. □

En prenant  $s = 1$  dans (1), nous obtenons

$$L(f, 1) = - \int_0^\infty \omega_f$$

en posant  $\omega_f := 2\pi i f(z)dz$ . La valeur spéciale  $L(f, 1)$  est essentiellement une *période* de la forme différentielle  $\omega_f$ . Une des motivations de l'exposé est la question suivante : peut-on trouver une interprétation géométrique analogue pour  $L(f, 2)$  ?

## 2. Méthode de Beilinson

Lorsque  $f$  est *primitive*, la réponse à la question posée à la fin de la section précédente a été apportée par Beilinson. Le théorème de Beilinson exprime  $L(f, 2)$  en termes d'un *régulateur*. Nous commençons par décrire la définition du régulateur de Beilinson.

Notons  $X_1(N)$  la courbe modulaire associée à  $\Gamma_1(N)$ , c'est une courbe projective, lisse, définie sur  $\mathbf{Q}$ . L'espace  $S_2(\Gamma_1(N))$  s'identifie à l'espace  $\Omega^1(X_1(N)(\mathbf{C}))$  des formes différentielles holomorphes sur  $X_1(N)(\mathbf{C})$ , au moyen de l'application

$$f \mapsto \omega_f := 2\pi i f(z)dz \quad (f \in S_2(\Gamma_1(N))).$$

Notons  $\mathbf{Q}(X_1(N))$  le corps des fonctions rationnelles de  $X_1(N)$ . Rappelons la définition par Milnor du groupe  $K_2$  d'un corps  $F$ .

**Définition 3.** — Soit  $F$  un corps. Le groupe  $K_2(F)$  est le groupe abélien décrit par générateurs et relations de la manière suivante

1. Générateurs :  $\{a, b\}$  avec  $a, b \in F^*$  (symboles de Milnor).
2. Relations :
  - Linéarité en  $a$  :  $\{a_1 a_2, b\} = \{a_1, b\} + \{a_2, b\}$  pour  $a_1, a_2, b \in F^*$ .
  - Linéarité en  $b$  :  $\{a, b_1 b_2\} = \{a, b_1\} + \{a, b_2\}$  pour  $a, b_1, b_2 \in F^*$ .
  - Relations de Steinberg :  $\{a, 1 - a\} = 0$  pour  $a \in F - \{0, 1\}$ .

L'application régulateur de Beilinson est un homomorphisme de groupes

$$r : K_2(\mathbf{Q}(X_1(N))) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{C}}(\Omega^1(X_1(N)(\mathbf{C})), \mathbf{C}),$$

que nous allons maintenant définir. Nous écrivons la différentielle extérieure  $d$  sur une surface de Riemann sous la forme  $d = \partial + \bar{\partial}$  avec  $\partial = \frac{\partial}{\partial z} dz$  et  $\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$ .

**Définition 4.** — Pour  $u, v \in \mathbf{Q}(X_1(N))^*$ , définissons

$$\eta(u, v) = -i \log|u| \cdot (\partial - \bar{\partial}) \log|v| + i \log|v| \cdot (\partial - \bar{\partial}) \log|u|.$$

C'est une 1-forme différentielle réelle, de classe  $C^\infty$  sur  $X_1(N)(\mathbf{C}) - S$ , où l'on a noté  $S$  l'ensemble (fini) des zéros et pôles des fonctions méromorphes  $u$  et  $v$ .

**Propriétés de la forme différentielle  $\eta(u, v)$ .**

1. La forme différentielle  $\eta(u, v)$  est fermée sur  $X_1(N)(\mathbf{C}) - S$ . En effet

$$\begin{aligned} d\eta(u, v) &= -i(\partial + \bar{\partial}) \log|u| \wedge (\partial - \bar{\partial}) \log|v| - i \log|u| \cdot (-2\partial\bar{\partial} \log|v|) \\ &\quad + i(\partial + \bar{\partial}) \log|v| \wedge (\partial - \bar{\partial}) \log|u| + i \log|v| \cdot (-2\partial\bar{\partial} \log|u|) \\ &= -i\bar{\partial} \log|u| \wedge \partial \log|v| + i\partial \log|u| \wedge \bar{\partial} \log|v| \\ &\quad + i\bar{\partial} \log|v| \wedge \partial \log|u| - i\partial \log|v| \wedge \bar{\partial} \log|u| \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. La forme différentielle  $\eta(u, v)$  est bilinéaire en  $u, v \in \mathbf{Q}(X_1(N))^*$ .

3. Pour tout  $u \in \mathbf{Q}(X_1(N)) - \{0, 1\}$ , la forme différentielle  $\eta(u, 1 - u)$  est exacte sur  $X_1(N)(\mathbf{C}) - S$ . Cela résulte de l'existence d'une fonction dilogarithme sur  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ . La fonction de Bloch-Wigner  $D : \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{R}$  définie par

$$D(z) = \Im(\text{Li}_2(z)) + \log|z| \arg(1 - z) \quad \text{avec} \quad \text{Li}_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \quad (|z| < 1)$$

satisfait la propriété différentielle

$$dD(z) = -i \log|z| \cdot (\partial - \bar{\partial}) \log|1 - z| + i \log|1 - z| \cdot (\partial - \bar{\partial}) \log|z| \quad (z \in \mathbf{C} - \{0, 1\})$$

d'où l'on déduit facilement  $\eta(u, 1 - u) = d(D \circ u)$  sur  $X_1(N)(\mathbf{C}) - S$ .

**Définition 5.** — L'application régulateur de Beilinson  $r$  est définie par

$$\begin{aligned} r : K_2(\mathbf{Q}(X_1(N))) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{C}}(\Omega^1(X_1(N)(\mathbf{C})), \mathbf{C}) \\ \{u, v\} &\mapsto \left( \omega \mapsto \int_{X_1(N)(\mathbf{C})} \eta(u, v) \wedge \omega \right). \end{aligned}$$

L'intégrale ci-dessus converge absolument puisque la forme différentielle  $\eta(u, v)$  possède des singularités au plus logarithmiques aux points de  $S$ . Vérifions que l'application  $r$  est bien définie. La bilinéarité en  $u, v \in \mathbf{Q}(X_1(N))^*$  est immédiate. Montrons que  $r$  annule les relations de Steinberg. Pour  $u \in \mathbf{Q}(X_1(N)) - \{0, 1\}$  et  $\omega \in \Omega^1(X_1(N)(\mathbf{C}))$ , nous avons

$$\begin{aligned} \int_{X_1(N)(\mathbf{C})} \eta(u, 1 - u) \wedge \omega &= \int_{X_1(N)(\mathbf{C})} d(D \circ u) \wedge \omega \\ &= \int_{X_1(N)(\mathbf{C})} d((D \circ u) \cdot \omega) \\ &= 0 \end{aligned}$$

la dernière égalité résultant de la formule de Stokes.

Nous allons maintenant énoncer la formule de Beilinson. Pour un caractère de Dirichlet arbitraire  $\chi : \left(\frac{\mathbf{Z}}{m\mathbf{Z}}\right)^* \rightarrow \mathbf{C}^*$ ,  $m \geq 1$ , la série  $L$  de  $f$  tordue par  $\chi$  est définie par

$$L(f, \chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \chi(n)}{n^s} \quad (\Re(s) > \frac{3}{2}).$$

Elle admet également un prolongement holomorphe au plan complexe. Soit maintenant  $f \in S_2(\Gamma_1(N))$ , que nous supposons *primitive*<sup>(1)</sup>, c'est-à-dire vecteur propre de tous les opérateurs de Hecke, nouvelle (ne provenant pas d'un niveau divisant strictement  $N$ ) et normalisée ( $a_1 = 1$ ). La fonction  $L$  de  $f$  s'écrit alors sous la forme d'un produit eulérien

$$L(f, s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - a_p p^{-s} + p\psi(p)p^{-2s}} \quad (\Re(s) > \frac{3}{2})$$

où  $\psi : (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^* \rightarrow \mathbf{C}^*$  est le caractère de  $f$  (par convention  $\psi(p) = 0$  pour  $p \mid N$ ).

**Théorème 6 (Beilinson).** — Soit  $\chi : (\frac{\mathbf{Z}}{m\mathbf{Z}})^* \rightarrow \mathbf{C}^*$  un caractère de Dirichlet. Supposons  $\chi(-1) = 1$  et  $(m, N) = 1$ . Notons  $\mathbf{Q}(\chi) \subset \mathbf{C}$  le corps engendré par les valeurs de  $\chi$ . Il existe  $\gamma_\chi \in K_2(\mathbf{Q}(X_1(N))) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}(\chi)$  tel que

$$L(f, 2)L(f, \chi, 1) = \langle r(\gamma_\chi), \omega_f \rangle$$

où le régulateur  $r(\gamma_\chi)$  est défini par  $\mathbf{Q}(\chi)$ -linéarité.

**Remarques.** — 1. Il existe toujours  $\chi$  comme dans l'énoncé tel que  $L(f, \chi, 1) \neq 0$ . On en déduit une formule pour  $L(f, 2)$ , et en particulier le fait que  $L(f, 2)$  est une *période* au sens de Kontsevich et Zagier [2].

2. Supposons que  $f$  est la forme primitive associée à une courbe elliptique  $E$  définie sur  $\mathbf{Q}$ , de telle sorte que  $L(f, s) = L(E, s)$ . On déduit alors du théorème précédent la formule

$$L(E, 2)L(E, \chi, 1) = \langle r_E(\gamma_E), \omega_E \rangle$$

où  $r_E : K_2(\mathbf{Q}(E)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{C}}(\Omega^1(E(\mathbf{C})), \mathbf{C})$  est l'application régulateur associée à  $E$ ,  $\omega_E$  est une forme différentielle de Néron de  $E$ , et  $\gamma_E$  est un certain élément de  $K_2(\mathbf{Q}(E)) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}(\chi)$ . Pour obtenir  $\gamma_E$ , l'idée est de prendre la trace de  $\gamma_\chi$  par une paramétrisation modulaire  $X_1(N) \rightarrow E$ . Malheureusement, un tel procédé est hautement inexplicite.

### 3. Améliorations possibles

En vue des applications, on souhaite obtenir une version *explicite* du théorème 6. Beilinson construit l'élément  $\gamma_\chi$  de ce théorème de la manière suivante. On note  $\alpha : X_1(Nm) \rightarrow X_1(N)$  la surjection naturelle, induite par l'identité sur  $\mathcal{H}$ . Le morphisme fini  $\alpha$  induit un morphisme de trace

$$\alpha_* : K_2(\mathbf{Q}(X_1(Nm))) \rightarrow K_2(\mathbf{Q}(X_1(N))).$$

Beilinson construit des unités modulaires  $u_\chi, v_\chi \in \mathbf{Q}(X_1(Nm))^* \otimes \mathbf{Q}(\chi)$  (ce sont des fonctions rationnelles ne possédant ni zéro ni pôle sur  $\mathcal{H}$ ; leurs diviseurs sont donc à support dans l'ensemble des pointes) et pose  $\gamma_\chi = \alpha_*\{u_\chi, v_\chi\} \in K_2(\mathbf{Q}(X_1(N))) \otimes \mathbf{Q}(\chi)$ .

Cette méthode souffre des imprécisions suivantes. D'une part, le morphisme  $\alpha_*$  n'est pas explicite. D'autre part, le caractère  $\chi$  (et donc l'entier  $m$ ) tel que  $L(f, \chi, 1) \neq 0$  n'est pas précisé. Enfin, les unités modulaires  $u_\chi$  et  $v_\chi$  ne sont pas explicites.

<sup>(1)</sup>Les formes primitives sont intéressantes d'un point de vue arithmétique car leurs coefficients de Fourier sont des entiers algébriques définissant des fonctions multiplicatives. Les formes primitives constituent une base d'un sous-espace vectoriel appelé *partie nouvelle* de  $S_2(\Gamma_1(N))$ .

Nous avons constaté qu'il est possible d'obtenir une version explicite du théorème 6 en restant au niveau de la courbe modulaire  $X_1(N)$ . Pour énoncer notre résultat, nous définissons certaines unités modulaires explicites sur la courbe modulaire  $X_1(N)$ . Pour  $d \in (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^*$ , choisissons une matrice  $\langle d \rangle \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$  congrue à  $\begin{pmatrix} d^{-1} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$  modulo  $N$ . Les matrices  $\langle d \rangle$ ,  $d \in (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^*$  opèrent sur la courbe modulaire  $X_1(N)$  et sont appelés opérateurs diamants. Ce sont des automorphismes définis sur  $\mathbf{Q}$ . Notons  $\langle d \rangle[\infty] \in X_1(N)(\mathbf{Q})$  l'image de la pointe infinie par  $\langle d \rangle$ . Pour  $\chi$  caractère de Dirichlet  $(\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^* \rightarrow \mathbf{C}^*$ ,  $\chi$  pair et non trivial, nous définissons une unité modulaire  $u_\chi \in \mathbf{Q}(X_1(N))^* \otimes \mathbf{Q}(\chi)$  vérifiant

$$\mathrm{div} u_\chi = \sum_{d \in (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^*} \chi(d) \cdot \langle d \rangle[\infty].$$

L'existence de  $u_\chi$  résulte du théorème de Manin-Drinfel'd et de la non trivialité de  $\chi$ .

**Théorème 7.** — Soit  $f \in S_2(\Gamma_1(N))$  une forme parabolique primitive, de caractère  $\psi : (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^* \rightarrow \mathbf{C}^*$ . Soit  $\chi : (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^* \rightarrow \mathbf{C}^*$  un caractère pair, primitif,  $\chi \neq 1, \bar{\psi}$ . Nous avons alors

$$(2) \quad L(f, 2)L(f, \chi, 1) = \frac{N\pi\tau(\chi)}{2\varphi(N)} \langle r(\{u_{\bar{\chi}}, u_{\psi\chi}\}), \omega_f \rangle.$$

**Remarques.** — 1. D'après un théorème de Merel, il existe toujours un caractère de Dirichlet pair  $\chi : (\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}})^* \rightarrow \mathbf{C}^*$  tel que  $L(f, \chi, 1) \neq 0$ . Si de plus  $\chi$  est primitif et  $\chi \neq 1, \bar{\psi}$ , on en déduit donc une formule pour  $L(f, 2)$ .

2. Nous savons enlever l'hypothèse  $\chi$  primitif dans le théorème précédent, au prix d'une formule légèrement plus compliquée que (2).

3. Lorsque  $N = 11, 14$  ou  $15$ , la courbe  $X_1(N)$  est une courbe elliptique, de conducteur précisément  $N$ . Pour  $E = X_1(11)$  par exemple, nous déduisons du théorème 7 une formule explicite pour  $L(E, 2)$  en termes du dilogarithme elliptique (cf. exposé précédent). Cette formule avait été conjecturée par Bloch et Grayson [1].

## Références

- [1] Spencer J. Bloch and Daniel R. Grayson.  $K_2$  and  $L$ -functions of elliptic curves : computer calculations. In *Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory, Part I, II (Boulder, Colo., 1983)*, volume 55 of *Contemp. Math.*, pages 79–88. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.
- [2] Maxim Kontsevich and Don Zagier. Periods. In *Mathematics unlimited—2001 and beyond*, pages 771–808. Springer, Berlin, 2001.