

Sous-domaines affinoïdes.

Table des matières

1. La topologie canonique sur le spectre maximal d'une algèbre affinoïde.	1
2. Définition des sous-domaines affinoïdes.	2
3. Propriétés des sous-domaines affinoïdes et théorème dit d'ouverture.	5
Références	6

1. La topologie canonique sur le spectre maximal d'une algèbre affinoïde.

Commençons par définir la topologie canonique sur le spectre maximal de l'algèbre de Tate T_n sur k (avec $n \geq 1$). Rappelons que l'on a une surjection canonique

$$\tau : B^n(\bar{k}) \rightarrow \mathrm{Sp} T_n = \mathrm{Max} T_n$$

dont les fibres sont exactement les orbites de $B^n(\bar{k})$ sous l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. Or l'ensemble $B^n(\bar{k}) \subset \bar{k}^n$ est muni de la topologie naturelle induite par la topologie produit sur \bar{k}^n .

Définition 1. — On appelle topologie canonique sur $\mathrm{Sp} T_n$, le quotient de la topologie naturelle sur $B^n(\bar{k})$ par l'application τ .

Remarque 2. — Cette topologie est a priori différente de la topologie de Zariski. Par la suite, nous considérerons uniquement la topologie canonique.

Lemme 3. — Soient $f \in T_n$ et $x, y \in B^n(\bar{k})$. On a l'inégalité suivante

$$|f(x) - f(y)| \leq |f| |x - y|$$

avec la notation

$$|z| := \max_{1 \leq i \leq n} |z_i|$$

pour $z = (z_1, \dots, z_n) \in \bar{k}^n$. En particulier, $f : B^n(\bar{k}) \rightarrow \bar{k}$ est continue.

Soit $f \in T_n$ et $x \in \mathrm{Sp} T_n$. L'élément $f(x)$ vit dans le corps résiduel $\frac{T_n}{\mathfrak{m}_x}$ qui est une extension finie de k (d'après le Nullstellensatz). Cela permet de définir canoniquement le nombre réel $|f(x)|$. Notons que si $x = \tau(z)$ alors $|f(x)| = |f(z)|$.

Proposition 4. — Soient $f \in T_n$ et α un réel > 0 . Les ensembles

- (i) $\{z \in B^n(\bar{k}); f(z) \neq 0\}$
- (ii) $\{z \in B^n(\bar{k}); |f(z)| \leq \alpha\}$
- (iii) $\{z \in B^n(\bar{k}); |f(z)| = \alpha\}$
- (iv) $\{z \in B^n(\bar{k}); |f(z)| \geq \alpha\}$

sont ouverts dans $B^n(\bar{k})$. Le résultat reste vrai en remplaçant $B^n(\bar{k})$ par $\mathrm{Sp} T_n$, et en considérant la topologie canonique.

Définition 5. — Soient $f_1, \dots, f_r \in T_n$ ($r \geq 1$). On note $(\mathrm{Sp} T_n)(f_1, \dots, f_r) \subset \mathrm{Sp} T_n$ le domaine suivant :

$$(\mathrm{Sp} T_n)(f_1, \dots, f_r) := \{x \in \mathrm{Sp} T_n; |f_i(x)| \leq 1 \text{ pour } 1 \leq i \leq r\}.$$

Un tel domaine est appelé domaine de Weierstraß pour $\mathrm{Sp} T_n$.

Remarquons d'après la proposition précédente que les domaines de Weierstraß sont ouverts dans $\mathrm{Sp} T_n$.

Proposition 6. — Soit $x \in \mathrm{Sp} T_n$. Les domaines de Weierstraß $(\mathrm{Sp} T_n)(f_1, \dots, f_r)$ avec $f_1, \dots, f_r \in \mathfrak{m}_x$ forment un système fondamental de voisinages (ouverts) du point x . En particulier, les domaines de Weierstraß forment une base de la topologie canonique sur $\mathrm{Sp} T_n$.

Nous étendons maintenant les définitions précédentes au cas du spectre maximal d'une algèbre affinoïde quelconque. Soit A une algèbre affinoïde sur k . On définit de manière absolument analogue les domaines de Weierstraß de $\mathrm{Sp} A$:

Définition 7. — Soient $f_1, \dots, f_r \in A$ ($r \geq 1$). On note $(\mathrm{Sp} A)(f_1, \dots, f_r) \subset \mathrm{Sp} A$ le domaine suivant :

$$(\mathrm{Sp} A)(f_1, \dots, f_r) := \{x \in \mathrm{Sp} A; |f_i(x)| \leq 1 \text{ pour } 1 \leq i \leq r\}.$$

Un tel domaine est appelé domaine de Weierstraß pour $\mathrm{Sp} A$.

Il nous reste à définir une topologie sur $\mathrm{Sp} A$. Choisissons pour cela une surjection $T_n \xrightarrow{i^*} A$, correspondant à une immersion fermée $\mathrm{Sp} A \rightarrow \mathrm{Sp} T_n$. Considérons la topologie sur $\mathrm{Sp} A$ induite par celle de $\mathrm{Sp} T_n$ via cette immersion fermée. Il est clair que si $f_1, \dots, f_r \in T_n$ alors on a

$$(\mathrm{Sp} A)(i^* f_1, \dots, i^* f_r) = \mathrm{Sp} A \cap ((\mathrm{Sp} T_n)(f_1, \dots, f_r)).$$

Par conséquent, les propositions 4 et 6 restent vraies en remplaçant T_n par A . En particulier, d'après la proposition 6, la topologie sur $\mathrm{Sp} A$ ne dépend pas du choix de l'immersion fermée $\mathrm{Sp} A \rightarrow \mathrm{Sp} T_n$. On l'appelle la *topologie canonique* sur $\mathrm{Sp} A$.

On peut résumer la situation avec le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \tau^{-1}(\mathrm{Sp} A) & \xrightarrow{\tau} & \mathrm{Sp} A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B^n(\bar{k}) & \xrightarrow{\tau} & \mathrm{Sp} T_n \end{array}$$

où les flèches horizontales définissent des topologies quotient et les flèches verticales définissent des topologies induites.

2. Définition des sous-domaines affinoïdes.

Nous allons maintenant travailler avec des variétés affinoïdes générales.

Définition 8. — Soit $\mathrm{Sp} A$ une variété affinoïde sur k et U un sous-ensemble de $\mathrm{Sp} A$.

On dit qu'une application affinoïde $\phi : \mathrm{Sp} A' \rightarrow \mathrm{Sp} A$ représente toutes les applications affinoïdes dans U si et seulement si $\phi(\mathrm{Sp} A') \subset U$ et ϕ vérifie la propriété universelle suivante :

Pour toute application affinoïde $\psi : \mathrm{Sp} B \rightarrow \mathrm{Sp} A$ telle que $\psi(\mathrm{Sp} B) \subset U$, il existe une unique application affinoïde $\psi' : \mathrm{Sp} B \rightarrow \mathrm{Sp} A'$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Sp} B & \xrightarrow{\psi} & \mathrm{Sp} A \\
\psi' \downarrow & & \parallel \\
\mathrm{Sp} A' & \xrightarrow{\phi} & \mathrm{Sp} A
\end{array}$$

commute.

Étant donné un sous-ensemble $U \subset \mathrm{Sp} A$, si une telle application $\phi : \mathrm{Sp} A' \rightarrow \mathrm{Sp} A$ existe, on dit que U est un sous-domaine affinoïde de $\mathrm{Sp} A$. On note alors souvent $\mathrm{Sp} A' \subset \mathrm{Sp} A$.

Une telle notation $\mathrm{Sp} A' \subset \mathrm{Sp} A$ est justifiée par la proposition suivante.

Proposition 9. — Soit U un sous-domaine affinoïde de $\mathrm{Sp} A$ et $\phi : \mathrm{Sp} A' \rightarrow \mathrm{Sp} A$ représentant toutes les applications affinoïdes dans U . Alors ϕ est injective et $\phi(\mathrm{Sp} A') = U$. De plus, pour tout $x \in \mathrm{Sp} A'$ on a l'égalité

$$\mathfrak{m}_x = \phi^*(\mathfrak{m}_{\phi(x)})A'$$

et pour tout $n \geq 1$, des isomorphismes

$$\frac{A}{\mathfrak{m}_{\phi(x)}^n} \xrightarrow{\phi^*} \frac{A'}{\mathfrak{m}_x^n}.$$

Si U est un sous-domaine affinoïde de $\mathrm{Sp} A$, on peut donc munir U d'une structure de variété affinoïde, cette structure étant unique d'après la propriété universelle 8.

Le but de cet exposé est de montrer que les sous-domaines affinoïdes de $\mathrm{Sp} A$ sont ouverts (voir le théorème 27) et qu'ils forment une base de la topologie de $\mathrm{Sp} A$. Pour l'instant, démontrons quelques propriétés élémentaires des sous-domaines affinoïdes.

Proposition 10. — Soient $\mathrm{Sp} A'' \subset \mathrm{Sp} A'$ et $\mathrm{Sp} A' \subset \mathrm{Sp} A$ des sous-domaines affinoïdes. Alors l'application composée $\mathrm{Sp} A'' \rightarrow \mathrm{Sp} A$ définit un sous-domaine affinoïde de $\mathrm{Sp} A$.

Proposition 11. — Soit $\phi : \mathrm{Sp} B \rightarrow \mathrm{Sp} A$ une application affinoïde et $\mathrm{Sp} A'$ un sous-domaine affinoïde de $\mathrm{Sp} A$. Alors $\phi^{-1}(\mathrm{Sp} A')$ est un sous-domaine affinoïde de $\mathrm{Sp} B$. Plus précisément, le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
\phi^{-1}(\mathrm{Sp} A') & \xrightarrow{\phi} & \mathrm{Sp} A' \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Sp} B & \xrightarrow{\phi} & \mathrm{Sp} A
\end{array}$$

est cartésien. Les flèches verticales définissent respectivement les sous-domaines affinoïdes $\phi^{-1}(\mathrm{Sp} A')$ et $\mathrm{Sp} A'$.

De la proposition précédente on déduit immédiatement le

Corollaire 12. — Si U_1 et U_2 sont des sous-domaines affinoïdes de $\mathrm{Sp} A$, alors il en est de même pour $U_1 \cap U_2$.

On déduit également de la proposition 11 le

Corollaire 13. — Soit $\mathfrak{a} \subset A$ un idéal fermé de A et $\phi : \mathrm{Sp} A/\mathfrak{a} \rightarrow \mathrm{Sp} A$ l'immersion fermée correspondante. Soit $\mathrm{Sp} A'$ un sous-domaine affinoïde de $\mathrm{Sp} A$. On a alors un isomorphisme canonique $\phi^{-1}(\mathrm{Sp} A') \cong \mathrm{Sp} A'/\mathfrak{a}A'$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\phi^{-1}(\mathrm{Sp} A') & \xrightarrow{\phi} & \mathrm{Sp} A' \\
\cong \downarrow & & \parallel \\
\mathrm{Sp} A'/\mathfrak{a}A' & \longrightarrow & \mathrm{Sp} A'.
\end{array}$$

Pour mémoire, citons la proposition suivante, qui est une conséquence du théorème d'acyclicité de Tate :

Proposition 14. — *Si U_1 et U_2 des sous-domaines affinoïdes disjoints de $\mathrm{Sp} A$, alors $U_1 \cup U_2$ est un sous-domaine affinoïde de $\mathrm{Sp} A$.*

Nous allons maintenant introduire des exemples de sous-domaines affinoïdes de $X = \mathrm{Sp} A$.

Définition 15. — *Soient f_1, \dots, f_m et g_1, \dots, g_n des éléments de A ($m, n \geq 0$). On appelle domaine de Laurent associé à $f = (f_1, \dots, f_m)$ et $g = (g_1, \dots, g_n)$, et l'on note $X(f, g^{-1})$, le sous-ensemble*

$$X(f, g^{-1}) := \{x \in X; |f_i(x)| \leq 1 \text{ et } 1 \leq |g_j(x)| \text{ pour } 1 \leq i \leq m \text{ et } 1 \leq j \leq n\}.$$

Il est clair que cette définition généralise la notion de domaine de Weierstraß (prendre $n = 0$). Autrement dit, tout domaine de Weierstraß est un domaine de Laurent. On utilise pour les domaines de Weierstraß la notation $X(f)$. De même, lorsque $m = 0$, nous utiliserons la notation $X(g^{-1})$.

Remarque 16. — *La terminologie “domaine de Laurent” peut être justifiée de la manière suivante. Considérons $X = \mathrm{Sp} T_1 = \mathrm{Sp} k \langle t \rangle$ et $c_1, c_2 \in k$ vérifiant $0 < |c_1| \leq |c_2| \leq 1$. Alors*

$$X(c_2^{-1}t, c_1t^{-1}) = \tau(\{z \in \bar{k}; |c_1| \leq |z| \leq |c_2|\}).$$

Remarquons également que la notation $X(f, g^{-1})$ ne souffre pas d'ambiguïté lorsque parmi les fonctions f_i ou g_j se trouvent des unités de A .

La proposition suivante montre que les domaines de Laurent sont des sous-domaines affinoïdes.

Proposition 17. — *Soient $f = (f_1, \dots, f_m)$ et $g = (g_1, \dots, g_n)$ des systèmes d'éléments de A . Alors $X(f, g^{-1})$ est un sous-domaine affinoïde ouvert de X et l'application naturelle*

$$\mathrm{Sp} A \langle f, g^{-1} \rangle \rightarrow \mathrm{Sp} A$$

représente toutes les applications affinoïdes dans $X(f, g^{-1})$.

Pour la notation $A \langle f, g^{-1} \rangle$, se référer à [BGR, 6.1.4].

Nous introduisons maintenant les domaines spéciaux.

Définition 18. — *Soient $m \geq 0$ et f_1, \dots, f_m, g des éléments de A sans zéro commun dans $X = \mathrm{Sp} A$ (autrement dit, et grâce au Nullstellensatz, l'idéal engendré par les f_i et par g est égal à A). On appelle domaine spécial associé à $f = (f_1, \dots, f_m)$ et à g , et l'on note $X(\frac{f}{g})$, le sous-ensemble*

$$X\left(\frac{f}{g}\right) = X\left(\frac{f_1}{g}, \dots, \frac{f_m}{g}\right) := \{x \in X; |f_i(x)| \leq |g(x)| \text{ pour } 1 \leq i \leq m\}.$$

Remarquons que l'on peut toujours supposer $m \geq 1$ et $f_m = g$ (quitte à augmenter m). Remarquons aussi que la notation $X(\frac{f_1}{g}, \dots, \frac{f_m}{g})$ est compatible avec celle des domaines de Laurent, dans le cas où parmi les fonctions f_1, \dots, f_m, g se trouvent des unités de A .

La proposition suivante montre que les domaines spéciaux sont des sous-domaines affinoïdes.

Proposition 19. — Soient $f = (f_1, \dots, f_m)$ et g des éléments de A engendrant l'idéal A tout entier. Alors $X(\frac{f}{g})$ est un sous-domaine affinoïde ouvert de X et l'application naturelle $\mathrm{Sp} A < \frac{f}{g} > \rightarrow \mathrm{Sp} A$ représente toutes les applications affinoïdes dans $X(\frac{f}{g})$.

Pour la notation $A < \frac{f}{g} >$, se référer à [BGR, 6.1.4].

Remarque 20. — Nous pouvons introduire une notation encore plus générale pour les domaines de Weierstraß, les domaines de Laurent et les domaines spéciaux. Soient $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)$ et $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ des systèmes d'éléments de $|\bar{k}^*|$ (le groupe multiplicatif des valeurs absolues de \bar{k}^*). Soient $f = (f_1, \dots, f_m)$, $g = (g_1, \dots, g_n)$ des éléments de A , et h un élément de A tel que $X(\frac{f}{h})$ est défini. On définit alors les sous-ensembles :

$$\begin{aligned} X(\epsilon^{-1}f) &:= \{x \in X; |f_i(x)| \leq \epsilon_i \text{ pour } 1 \leq i \leq m\}, \\ X(\epsilon^{-1}f, \delta g^{-1}) &:= \{x \in X; |f_i(x)| \leq \epsilon_i \text{ et } \delta_j \leq |g_j(x)| \text{ pour } 1 \leq i \leq m \text{ et } 1 \leq j \leq n\}, \\ X(\epsilon^{-1}\frac{f}{h}) &:= \{x \in X; |f_i(x)| \leq \epsilon_i |h(x)| \text{ pour } 1 \leq i \leq m\}. \end{aligned}$$

Ces notations sont cohérentes avec les notations précédentes. Il n'est pas difficile de montrer que ces sous-ensembles sont des domaines de X qui sont respectivement de Weierstraß, de Laurent, et spéciaux (utiliser le fait que la groupe $|\bar{k}^*|$ est le radical de $|k^*|$ dans \mathbf{R}^{*+}).

3. Propriétés des sous-domaines affinoïdes et théorème dit d'ouverture.

Proposition 21. — Soient $X' \subset X$ et $X'' \subset X$ des domaines de Weierstraß (resp. de Laurent, spéciaux). Alors $X' \cap X'' \subset X$ est un domaine de Weierstraß (resp. de Laurent, spécial).

Corollaire 22. — Tout domaine de Weierstraß de X est un domaine de Laurent, et tout domaine de Laurent de X est un domaine spécial.

Lemme 23. — Soit $X(\frac{f}{g}) \subset X$ un domaine spécial de X , avec $f = (f_1, \dots, f_m)$ un système d'éléments de A et $g \in A$ tels que f_1, \dots, f_m, g engendrent l'idéal A . Alors il existe $\epsilon \in |k^*|$ tel que le domaine de Laurent $X' = X(\epsilon g^{-1}) \subset X$ vérifie les deux conditions

$$X(\frac{f}{g}) \subset X' \text{ est un domaine de Weierstraß} \quad \text{et} \quad X(\frac{f}{g}) \cap X(\epsilon^{-1}g) = \emptyset.$$

En particulier, tout domaine spécial peut s'écrire comme composition d'un domaine de Weierstraß et d'un domaine de Laurent.

Proposition 24. — Soit $X' \subset X$ un domaine de Weierstraß de X et $X'' \subset X'$ un domaine de Weierstraß de X' . Alors $X'' \subset X$ est un domaine de Weierstraß de X . La proposition reste vraie en remplaçant "domaine de Weierstraß" par "domaine spécial" et "sous-domaine affinoïde ouvert".

Nous en venons maintenant à la démonstration du théorème d'ouverture (théorème 27).

Soit $\sigma : A \rightarrow B$ un morphisme d'algèbres affinoïdes. Soient b_1, \dots, b_n des éléments de B dont les puissances sont bornées. On dit que $b = (b_1, \dots, b_n)$ est un système affinoïde générateur de B sur A lorsque le morphisme naturel étendant σ

$$\begin{aligned} \sigma_b : A < \zeta_1, \dots, \zeta_n > &\rightarrow B \\ \zeta_i &\mapsto b_i \end{aligned}$$

est surjectif. D'après la définition des algèbres affinoïdes, toute algèbre affinoïde admet un système affinoïde générateur sur k . En particulier, tout morphisme $\sigma : A \rightarrow B$ admet un système affinoïde générateur.

Lemme 25. — Soient $\sigma : A \rightarrow B$ un morphisme d'algèbres affinoïdes et $\mathrm{Sp} A' \subset \mathrm{Sp} A$ un sous-domaine affinoïde de $\mathrm{Sp} A$. Soit $\sigma' : A' \rightarrow A' \widehat{\otimes}_A B$ le morphisme induit par σ . Alors pour tout système affinoïde générateur $b = (b_1, \dots, b_n)$ de B sur A , le système $b' := (1 \widehat{\otimes} b_1, \dots, 1 \widehat{\otimes} b_n)$ est un système affinoïde générateur de $A' \widehat{\otimes}_A B$ sur A' .

Lemme 26. — Soient $\sigma : A \rightarrow B$ un morphisme d'algèbres affinoïdes et $x \in \mathrm{Sp} A$. Supposons que σ induit

- (a) un morphisme fini de A/\mathfrak{m}_x -modules $A/\mathfrak{m}_x \rightarrow B/\mathfrak{m}_x B$, ou
- (b) un morphisme surjectif $A/\mathfrak{m}_x \rightarrow B/\mathfrak{m}_x B$, ou
- (c) des isomorphismes $A/\mathfrak{m}_x^n \rightarrow B/\mathfrak{m}_x^n B$ (pour tout $n \geq 1$).

Alors il existe un sous-domaine affinoïde ouvert $\mathrm{Sp} A' \subset \mathrm{Sp} A$ contenant x tel que le morphisme $\sigma' : A' \rightarrow A' \widehat{\otimes}_A B$ induit par σ est : (a) fini, (b) surjectif, (c) un isomorphisme.

Nous pouvons maintenant montrer le

Théorème 27. — Soit A une algèbre affinoïde sur k . Tous les sous-domaines affinoïdes de $\mathrm{Sp} A$ sont ouverts. Ils forment une base de la topologie canonique de $\mathrm{Sp} A$.

On a également la proposition suivante.

Proposition 28. — Soit $\mathrm{Sp} A' \subset \mathrm{Sp} A$ un sous-domaine affinoïde. Alors la topologie canonique sur $\mathrm{Sp} A'$ est induite par la topologie canonique sur $\mathrm{Sp} A$.

Références

[BGR] Bible de la Géométrie Rigide.

[BGR] BOSCH, S., GÜNTZER, U., REMMERT, R., Non-Archimedean Analysis. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **261**. Springer-Verlag, 1984.