

ÉCOLE POLYTECHNIQUE - PROMOTION 1997

RAPPORT DE STAGE D'OPTION SCIENTIFIQUE

François BRUNAUT

INTÉGRALES DE GAUSS GÉNÉRALISÉES DES NŒUDS ET ENTRELACS

Option : Algèbre, théorie des groupes et combinatoire
Département de Mathématiques
Directeur de l'option : Monsieur Jean LANNES

Organisme d'accueil : Institut Fourier, UFR de Mathématiques, UMR 5582,
Université Joseph Fourier - BP 74 - 38402 Saint-Martin-d'Hères
Directeur de stage : Madame Christine LESCOP
Dates du stage : 7 avril 2000 - 10 juillet 2000

Résumé

Ce travail aborde quelques aspects de la théorie du développement perturbatif de Chern-Simons dans le cas des nœuds dans \mathbf{R}^3 .

Après avoir défini l'intégrale de Gauss d'un entrelacs à deux composantes puis l'intégrale de Gauss d'un nœud, nous définissons (sous réserve de compactification) l'*intégrale d'espace de configurations* (ou intégrale de Gauss généralisée) associée à un diagramme uni-trivalent G et à un nœud K . Nous évoquons le théorème principal, datant de 1994, qui énonce qu'on peut obtenir un invariant de Vassiliev universel des nœuds à partir d'une série d'intégrales d'espaces de configurations (appelée développement perturbatif de Chern-Simons).

Nous étudions plus précisément la partie de degré 2 de cette série et montrons en utilisant deux méthodes (théorème de Stokes et théorie du degré) qu'elle constitue un invariant isotopique des nœuds.

Enfin, nous étudions le problème de la compactification des différents espaces de configurations.

Abstract

We study some aspects of the perturbative expression of Chern-Simons theory for knots in \mathbf{R}^3 .

We first define the Gauss integral in the case of a link, which gives the *linking number*, and in the case of a knot. Then, assuming a compactification, we define the *configuration space integral* of a uni-trivalent diagram G and a knot K . We write the main theorem which says that a linear combination of integrals on configuration spaces gives a universal Vassiliev invariant. It has been proved in 1994.

We show that the degree 2 part of the series of integrals is a knot invariant. We give two methods : Stokes theorem, and the degree theory of differentiable maps.

We also study the problem of compactification of some configuration spaces.

1 Introduction aux intégrales de Gauss

1.1 L'intégrale de Gauss d'un entrelacs à 2 composantes

Définition 1.1. Un nœud K est un *plongement* du cercle S^1 dans l'espace \mathbf{R}^3 , c'est-à-dire une application de classe C^∞ , injective, et dont la dérivée dK ne s'annule pas. On représente K par son image $K(S^1)$, qui est une courbe fermée dans l'espace, régulière et sans point double.

Notons que l'orientation standard de S^1 fournit une orientation naturelle pour K . Voici quelques exemples de nœuds classiques :

Définition 1.2. Un entrelacs à n composantes L est un plongement de la variété $\underbrace{S^1 \sqcup \cdots \sqcup S^1}_n$ dans \mathbf{R}^3 .

Autrement dit, la donnée d'un entrelacs est la donnée de n nœuds ne se rencontrant pas. On trouvera ci-dessous quelques exemples.

Définition 1.3 (Isotopie de nœuds). Deux nœuds K_0 et K_1 sont dits *isotopes* lorsqu'il existe une application $K : S^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^3$, de classe C^∞ , et vérifiant

$$\begin{cases} K|_{S^1 \times \{0\}} = K_0 \text{ et } K|_{S^1 \times \{1\}} = K_1 \\ \forall t \in [0, 1], K|_{S^1 \times \{t\}} \text{ est un nœud} \end{cases}$$

Une telle application K est appelée isotopie de nœuds.

Remarque. On définit de la même manière les isotopies d'entrelacs.

Intuitivement, une isotopie est une déformation du nœud K_0 en le nœud K_1 , au cours de laquelle il n'y a pas de croisement de brins. Un des principaux objectifs de la théorie des nœuds est de savoir déterminer si deux nœuds donnés quelconques sont isotopes.

À cette fin, on utilise des invariants : un *invariant* est une fonction i de l'ensemble des nœuds dans un ensemble quelconque, dont on sait démontrer qu'elle est constante sur chaque classe d'isotopie. Si l'on trouve alors deux nœuds K et K' vérifiant $i(K) \neq i(K')$, on peut affirmer que K et K' ne sont pas isotopes. À titre d'exemple, l'invariant introduit dans la deuxième partie montrera que le nœud de trèfle n'est pas isotope au nœud trivial.

Nous allons maintenant introduire l'intégrale de Gauss (ou nombre d'enlacement) d'un entrelacs à deux composantes.

Définition 1.4. Soit $L = (K, K')$ un entrelacs à deux composantes. Soit ψ l'application

$$\begin{aligned} \psi : S^1 \times S^1 &\rightarrow S^2 \\ (s, s') &\mapsto \frac{K'(s') - K(s)}{\|K'(s') - K(s)\|} \end{aligned}$$

En d'autres termes, $\psi(s, s')$ est la direction de la demi-droite issue de $K(s)$ et passant par $K'(s')$.

Orientons $S^1 \times S^1$ en lui donnant l'orientation produit, et S^2 de la manière standard.

Définition 1.5 (Intégrale de Gauss d'un entrelacs). Soit ω la forme volume homogène sur S^2 d'intégrale 1. On appelle intégrale de Gauss de L (ou nombre d'enlacement de L) la quantité

$$I(L) = \int_{S^1 \times S^1} \psi^* \omega$$

Géométriquement, $I(L)$ est l'aire algébrique recouverte par $\psi(S^1 \times S^1)$ sur S^2 . Cette aire doit être comptée avec signe et multiplicité.

$S^1 \times S^1$ étant une variété sans bord, la théorie du degré affirme que $I(L) \in \mathbf{Z}$ et se calcule précisément comme le nombre de préimages d'une valeur régulière. Rappelons pour cela quelques définitions :

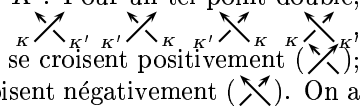


Définition 1.6. $y \in S^2$ est dite valeur régulière de ψ lorsque pour tout $x \in \psi^{-1}(y)$, la différentielle $d\psi_x$ est un isomorphisme. Pour un tel y , le nombre de ses préimages est fini et on définit le *degré* de y par

$$\deg(\psi, y) = \sum_{x \in \psi^{-1}(y)} \text{sign}(\det d\psi_x)$$

D'après Milnor [Mil] (§5, Théorème A, p.28), $\deg(\psi, y)$ ne dépend pas de la valeur régulière y ; on note $\deg(\psi)$ le degré de ψ . D'après le théorème de Sard,

l'ensemble des valeurs régulières de ψ est de mesure pleine dans S^2 . On peut en déduire que l'aire recouverte par $\psi(S^1 \times S^1)$ sur S^2 est précisément égale à :

$$I(L) = \deg(\psi)$$

Nous allons expliciter ce nombre constant de préimages $\deg(\psi)$. Soit π un plan tel que la projection orthogonale $(p \circ L)$ de L sur π soit régulière, c'est-à-dire, soit une immersion possédant un nombre fini de points doubles transverses, et aucun point d'ordre supérieur (un point double $y = (p \circ L)(x_1) = (p \circ L)(x_2)$ est dit *transverse* lorsque les vecteurs tangents à $(p \circ L)$ en x_1 et x_2 forment une famille libre de \mathbf{R}^2). Nous ne nous intéresserons qu'aux points doubles correspondant à un croisement impliquant K et K' . Pour un tel point double, il y a quatre positions possibles pour les brins :  Dans les deux premiers cas, on dit que K et K' se croisent positivement (); et dans les deux derniers cas, on dit qu'ils se croisent négativement (). On a alors la proposition suivante :

Proposition 1.7. Soient $\#_{K'} \nearrow_K$, $\#_{K'} \searrow_K$, $\#_{K'} \nearrow_K$, $\#_{K'} \searrow_K$, le nombre de croisements correspondant aux quatre configurations décrites ci-dessus. Soit $\# \nearrow = \#_{K'} \nearrow_K + \#_{K'} \searrow_K$ et $\# \searrow = \#_{K'} \searrow_K + \#_{K'} \nearrow_K$. Alors

$$I(L) = \#_{K'} \nearrow_K - \#_{K'} \searrow_K = \#_{K'} \nearrow_K - \#_{K'} \searrow_K = \frac{1}{2}(\# \nearrow - \# \searrow)$$

Démonstration. D'après ce que nous avons dit précédemment, il suffit de calculer le nombre de préimages d'une valeur régulière pour ψ . Soit v le vecteur unitaire orthogonal à π pointant vers nous (voir figure). Par hypothèse, v est une valeur régulière de ψ . $\psi^{-1}(v)$ est en bijection avec l'ensemble des croisements impliquant K et K' , et tels que K' passe au dessus de K . Soit $x = (s, s') \in \psi^{-1}(v)$. On note σ et σ' des vecteurs unitaires tangents orientés de $T_s(S^1)$ et $T_{s'}(S^1)$. (σ, σ') constitue une base directe pour $T_x(S^1 \times S^1)$ et on vérifie que $(d\psi_x(\sigma), d\psi_x(\sigma'))$ est directe dans $T_v S^2$ si et seulement si le croisement x est positif. On obtient donc

$$I(L) = \deg(\psi, v) = \#_{K'} \nearrow_K - \#_{K'} \searrow_K$$

On montre le même résultat pour la valeur régulière $-v$, qui correspond aux croisements où K' passe en-dessous de K :

$$I(L) = \deg(\psi, -v) = \#_{K'} \searrow_K - \#_{K'} \nearrow_K$$

En prenant la demi-somme, on trouve également :

$$I(L) = \frac{1}{2}(\# \nearrow - \# \searrow) \blacksquare$$

Proposition 1.8. $I(L)$ est un invariant d'isotopie.

Démonstration. En effet, $L \mapsto I(L) = \int_{S^1 \times S^1} \psi^* \omega$ varie continûment au cours d'une isotopie, et est à valeurs dans \mathbf{Z} . Elle est donc constante sur chaque classe d'isotopie d'entrelacs. ■

Introduisons maintenant l'intégrale de Gauss d'un nœud. Nous voulons définir une intégrale similaire à celle définie dans le cas d'un entrelacs à deux composantes. Si l'on considère deux points se déplaçant sur un même nœud K , le vecteur unitaire reliant ces deux points n'est a priori défini que lorsque les deux points sont distincts.

Définition 1.9. Identifions S^1 à $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. Soit ψ_K l'application

$$\begin{aligned} \psi_K : S^1 \times]0, 2\pi[&\rightarrow S^2 \\ (s, u) &\mapsto \frac{K(s+u) - K(s)}{\|K(s+u) - K(s)\|} \end{aligned}$$

Proposition 1.10. ψ_K s'étend en une application de $S^1 \times [0, 2\pi]$ dans S^2 de classe C^∞ .

Démonstration. Il suffit de définir $\psi_K(s, 0)$ comme le vecteur tangent unitaire à K en s , et de poser $\psi_K(s, 2\pi) = -\psi_K(s, 0)$. Une formule de Taylor avec reste intégral montre qu'ainsi étendue, ψ_K est de classe C^∞ . ■

Définition 1.11 (Intégrale de Gauss d'un nœud). On appelle intégrale de Gauss du nœud K , et on note $I_\theta(K)$, la quantité

$$I_\theta(K) = \int_{S^1 \times [0, 2\pi]} \psi_K^* \omega \quad (1)$$

où ω désigne la forme volume homogène sur S^2 d'intégrale 1. En d'autres termes, $I_\theta(K)$ est l'aire algébrique (comptée avec signe et multiplicité) recouverte par l'image de ψ_K sur S^2 .

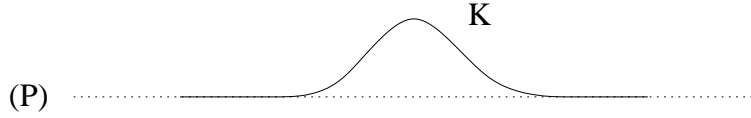
Remarque. $S^1 \times [0, 2\pi]$ étant une variété à bord, $I_\theta(K)$ n'est a priori plus un entier.

Nous nous proposons maintenant de calculer l'intégrale de Gauss des nœuds quasi-plats. Ces nœuds sont définis de la manière suivante :

Définition 1.12. On appelle nœud quasi-plat tout nœud K tel que :

- K reste dans un plan fixe (P) sauf éventuellement en un nombre fini d'intervalles disjoints deux à deux $]\alpha_i, \beta_i[$ ($i = 1, \dots, n$) du cercle S^1 .
- $\forall i \in [1, n]$, il existe un plan (Q_i) orthogonal à (P) tel que la restriction de K à $]\alpha_i, \beta_i[$ reste dans le plan (Q_i), et ait la représentation suivante :

(Q)

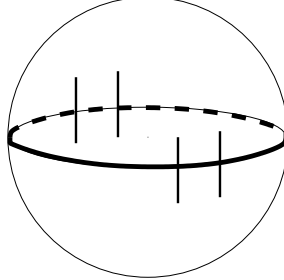


- La projection de K sur (P) est générique, c'est-à-dire que cette projection est une immersion de S^1 dans \mathbf{R}^2 admettant un nombre fini de points doubles transverses, appelés *auto-croisements*.

Proposition 1.13. Soit K un nœud quasi-plat. On note $\# \nearrow$ le nombre d'auto-croisements positifs de K (en suivant la même convention que dans le cas d'un entrelacs), et $\# \searrow$ le nombre d'auto-croisements négatifs de K . Alors

$$I_\theta(K) = \# \nearrow - \# \searrow$$

Démonstration. Nous posons $X = S^1 \times [0, 2\pi]$ et $\partial X = S^1 \times \{0, 2\pi\}$. ∂X est le bord de X . Nous notons $\psi = \psi_K$. L'image par ψ du bord de X dessinée ci-dessous partage la sphère S^2 en deux ouverts connexes notés Ω^+ et Ω^- :



Nous noterons R_ψ l'ensemble des valeurs régulières de ψ , c'est-à-dire

$$R_\psi = \{y \in S^2 \mid \forall x \in \psi^{-1}(y), d\psi_x \text{ est inversible}\}$$

(Si $x \in \partial X$, $d\psi_x$ désigne la différentielle définie sur $T_x X$, l'espace tangent total, qui est ici de dimension 2)

Remarquons qu'une valeur régulière n'a qu'un nombre fini de préimages ($\psi^{-1}(y)$ est discret, et compact puisque X est compact). Pour ces valeurs régulières, on définit un degré de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \text{deg} : R_\psi &\rightarrow \mathbf{Z} \\ y &\mapsto \sum_{x \in \psi^{-1}(y)} \text{sign}(\det d\psi_x) \end{aligned}$$

Le bord ∂X est inclus dans le lieu critique de ψ_K car le nœud est quasi-plat. En conséquence, $R_\psi \subset S^2 \setminus \psi(\partial X)$ et R_ψ est ouvert dans S^2 . Le théorème de

Sard nous dit que R_ψ est de mesure pleine dans S^2 (en particulier, R_ψ est dense dans S^2).

D'après les résultats de l'appendice (théorie du degré), la fonction deg s'étend en une fonction continue de $S^2 \setminus \psi(\partial X)$ dans \mathbf{Z} . Autrement dit, elle est constante sur les composantes connexes Ω^+ et Ω^- . Comme chacun de ces ensembles est de mesure $\frac{1}{2}$, on en déduit

$$I_\theta(K) = \frac{1}{2}(\text{deg}_{\Omega^+}(\psi) + \text{deg}_{\Omega^-}(\psi))$$

Le calcul de ces deux degrés se fait exactement comme dans le cas de l'entrelacs. Ils valent tous les deux $\# \nearrow \searrow - \# \nwarrow \swarrow$. On obtient donc

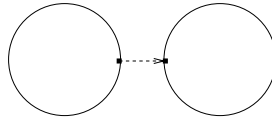
$$I_\theta(K) = \# \nearrow \searrow - \# \nwarrow \swarrow \blacksquare$$

Corollaire 1.14. *L'application $I_\theta : K \mapsto I_\theta(K)$ envoie chaque classe d'isotopie de nœuds surjectivement sur \mathbf{R} .*

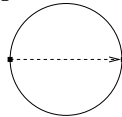
Démonstration. Donnons-nous une classe d'isotopie de nœuds. Soit K un nœud quasi-plat représentant cette classe. Il est possible de rajouter des auto-croisements positifs ou négatifs à K sans changer sa classe d'isotopie. Ainsi pour tout $n \in \mathbf{Z}$, l'application I_θ atteint $I_\theta(K) + n$. Comme de plus I_θ varie continûment lors d'une isotopie, l'image de chaque classe d'isotopie est connexe par arcs. On en déduit que I_θ envoie chaque classe d'isotopie surjectivement sur \mathbf{R} . ■

1.2 Les diagrammes uni-trivalents et les intégrales de Gauss associées

Dans le cas de l'intégrale de Gauss d'un entrelacs à deux composantes, nous avons considéré l'espace $S^1 \times S^1$ des couples de points (s_1, s_2) où s_i décrit la i -ième composante de l'entrelacs. On matérialise les positions des points s_1 et s_2 par des sommets; la direction observée par l'application ψ est matérialisée par une arête tracée en pointillés :



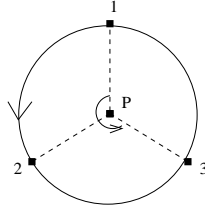
Dans le cas de l'intégrale de Gauss d'un nœud, nous avons considéré l'espace $S^1 \times]0, 2\pi[$ des couples de points distincts du nœud. En matérialisant le nœud K par un cercle, le couple de points distincts par deux sommets, et l'application ψ par une arête, on obtient le diagramme suivant :



Nous allons maintenant définir des diagrammes plus généraux : les diagrammes uni-trivalents. Nous nous restreindrons au cas des diagrammes dessinés sur le cercle S^1 . Pour tout diagramme uni-trivalent G et tout nœud K , nous allons définir un espace de configurations $\Omega_{G,K}$ et une application naturelle $\psi_{G,K} : \Omega_{G,K} \rightarrow (S^2)^n$

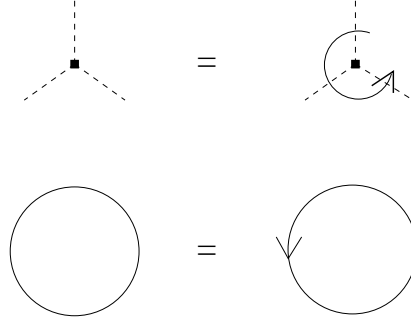
Définition 1.15. Un diagramme uni-trivalent est la donnée d'un graphe $G = (V, E)$, où V est l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes, vérifiant les hypothèses suivantes :

- Aucune arête ne relie un sommet à lui-même.
- Chaque paire de sommets est reliée par au plus une arête.
- Chaque sommet est soit univalent (relié à exactement un sommet), soit trivalent (relié à exactement trois sommets). On note U l'ensemble des univalents et T l'ensemble des trivalents; ainsi $V = T \sqcup U$.
- En chaque sommet trivalent t , les trois arêtes issues de t sont ordonnées cycliquement (si 1, 2, 3 désignent ces trois arêtes, les deux choix d'ordre cyclique sont (1, 2, 3) et (1, 3, 2)).
- L'ensemble U des univalents est ordonné cycliquement (on constate qu'il y a exactement $(\#U - 1)!$ choix d'ordre cyclique).
- Dans chaque composante connexe de G , il y a au moins un univalent.



Exemple 1.16. Le diagramme ci-dessus est un diagramme uni-trivalent. On a $T = \{P\}$ et $U = \{1, 2, 3\}$. Ce diagramme est communément appelé le tripode.

Notation. Lorsque l'on dessinera un diagramme uni-trivalent, on représentera le graphe G en pointillés, et le cercle reliant les univalents (matérialisant l'ordre cyclique sur U) en trait plein. D'autre part, on conviendra qu'en chaque sommet trivalent, les trois arêtes sont ordonnées cycliquement d'après le sens trigonométrique, et que l'ordre cyclique des univalents correspond au sens trigonométrique du cercle en trait plein. De manière plus explicite :



Définition 1.17 (Espace de configurations associé à G et K). Soit G un diagramme uni-trivalent et $K : S^1 \rightarrow \mathbf{R}^3$ un nœud. On appelle *espace des configurations injectives*, et on note $\Omega_{G,K}$, l'ensemble des couples $(s = (s_u)_{u \in U}, p = (p_t)_{t \in T}) \in (S^1)^U \times (\mathbf{R}^3)^T$ vérifiant

- L'unique application $V \rightarrow \mathbf{R}^3$ valant $K \circ s$ sur U et p sur T est injective.
- L'ordre cyclique de la famille $(s_u)_{u \in U}$ sur le cercle S^1 est le même que l'ordre cyclique sur U (le cercle étant orienté de manière standard).

$\Omega_{G,K}$ est un ouvert de $(S^1)^U \times (\mathbf{R}^3)^T$.

Nous pouvons maintenant définir une application *vecteur unitaire* généralisant celle de la définition 1.9.

Définition 1.18. Soit G un diagramme uni-trivalent dans lequel chacune des arêtes est orientée, et K un nœud. Nous noterons $\psi_{G,K}$ l'application $\Omega_{G,K} \rightarrow (S^2)^E$ qui à une configuration injective (s,p) fait correspondre une famille $(v_e)_{e \in E}$, de la manière suivante. Soit $f : V \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'injection construite à partir de s et p , et soient (a_1, a_2) les extrémités de l'arête orientée e . Alors on pose

$$v_e = \frac{f(a_2) - f(a_1)}{\|f(a_2) - f(a_1)\|} \in S^2$$

v_e est la direction du segment joignant $f(a_1)$ à $f(a_2)$.

Remarque. $\psi_{G,K}$ est une application entre deux variétés de même dimension; en effet

$$\dim \Omega_{G,K} = \#U + 3\#T = \text{nombre de demi-arêtes} = 2\#E = \dim(S^2)^E$$

Nous voulons définir une intégrale $I_G(K) = \int_{\Omega_{G,K}} \psi_{G,K}^*(\wedge^E \omega)$ (où $\wedge^E \omega$ est la forme volume produit sur $(S^2)^E$). Cette intégrale pourrait a priori diverger car $\Omega_{G,K}$ n'est pas compact. Nous montrerons dans la troisième partie qu'il existe une compactification $\mathcal{C}_{G,K}$ de $\Omega_{G,K}$ telle que :

- $\mathcal{C}_{G,K}$ est une variété à coins différentiable dont $\Omega_{G,K}$ est l'intérieur (i.e. la strate de codimension 0).
- L'application $\psi_{G,K}$ s'étend en une application $\mathcal{C}_{G,K} \rightarrow (S^2)^E$ de classe C^∞ .

$\mathcal{C}_{G,K}$ est appelé *espace de configurations associé au diagramme G et au nœud K* .

Ces assertions montrent que l'intégrale $I_G(K)$ converge et la définissent au signe près. Il nous suffit d'orienter les variétés de départ et d'arrivée pour pouvoir définir le signe de $I_G(K)$.

S^2 étant orientée canoniquement, on munit $(S^2)^E$ de l'orientation produit (cette orientation ne dépend pas de l'ordre des facteurs, car S^2 est de dimension paire).

Définition 1.19 (Définition de l'orientation de $\Omega_{G,K}$). Nous allons maintenant orienter $\Omega_{G,K}$ qui est un ouvert de $(S^1)^U \times (\mathbf{R}^3)^T$. Comme $(S^1)^U \times (\mathbf{R}^3)^T$ possède des coordonnées naturelles, il suffit de donner un ordre à ces coordonnées pour spécifier une orientation (rappelons ici que S^1 est orientée de façon standard).

Supposons dans un premier temps avoir fixé un ordre quelconque sur E , et avoir orienté chaque arête de G . On peut alors numéroter les demi-arêtes de 1 à $2n$ (avec $n = \sharp E$) : on attribue le numéro $2i - 1$ à l'extrémité initiale de l'arête i , et le numéro $2i$ à l'extrémité finale de cette même arête (cf. figure).

Sur chaque sommetivalent u figure un numéro qui sera le numéro d'ordre de la coordonnée $s_u \in S^1$.

Sur chaque sommet trivalent t figurent trois numéros. Ces trois numéros seront les numéros d'ordre des coordonnées naturelles x, y, z de $p_t \in \mathbf{R}^3$, de manière à ce que les numéros attribués à (x, y, z) respectent l'ordre cyclique en t . Il y a là trois manières de faire mais elles induisent toutes la même orientation sur $\Omega_{G,K}$, car l'ordre des coordonnées différera par un cycle d'ordre 3, ce qui constitue une permutation paire.

Montrons que l'orientation obtenue sur $\Omega_{G,K}$ est indépendante de l'ordre choisi sur E . Donnons-nous un ordre quelconque sur les arêtes : les coordonnées de $\Omega_{G,K}$ sont alors ordonnées de 1 à $2n$. Supposons que nous échangeons les arêtes $(2i - 1, 2i)$ et $(2j - 1, 2j)$ avec $1 \leq i < j \leq n$. Alors le nouvel ordre sur les coordonnées diffère de l'ordre initial par la permutation de \mathcal{S}_{2n} consistant à échanger $2i - 1$ et $2j - 1$, ainsi que $2i$ et $2j$. Cette permutation étant paire, l'orientation de $\Omega_{G,K}$ est inchangée.

Remarquons que l'orientation de $\Omega_{G,K}$ dépend de l'orientation des arêtes de G . En revanche, l'intégrale d'espace de configurations $I_G(K)$ que nous allons maintenant définir ne dépendra que de G .

Définition 1.20 (Intégrale de Gauss généralisée associée à G et K). On pose

$$I_G(K) = \int_{[\mathcal{C}_{G,K}]} \psi_{G,K}^*(\Omega)$$

où $[\mathcal{C}_{G,K}]$ désigne la variété orientée et $\Omega = \wedge^E \omega$ désigne la forme volume produit sur $(S^2)^E$.

Montrons que la valeur de l'intégrale $I_G(K)$ est indépendante de l'orientation choisie en chaque arête. Soit $\psi = \psi_{G,K}$ l'application issue d'un choix arbitraire d'orientation des arêtes. Supposons que nous changions l'orientation de l'arête $(2i-1, 2i)$ en son opposée. Cette fois-ci le nouvel ordre sur les coordonnées naturelles diffère de l'ordre initial par une transposition $(2i-1 \leftrightarrow 2i)$. L'orientation de $\Omega_{G,K}$ est donc changée en son opposée. Mais la nouvelle application $\psi' = \psi'_{G,K}$ résultant du changement d'orientation d'arête vérifie $\psi' = r \circ \psi$, où r envoie $(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)$ sur $(v_1, \dots, -v_i, \dots, v_n)$. Comme r est un difféomorphisme renversant l'orientation et préservant la mesure de $(S^2)^E$, on a

$$\int_{[\mathcal{C}_{G,K}]'} \psi'^*(\Omega) = - \int_{[\mathcal{C}_{G,K}]} \psi'^*(\Omega) = + \int_{[\mathcal{C}_{G,K}]} \psi^*(\Omega)$$

Par conséquent, la valeur de l'intégrale $I_G(K)$ ne dépend pas de l'orientation des arêtes.

Remarque. Le changement de l'ordre cyclique en un sommet trivalent renverse l'orientation de $\mathcal{C}_{G,K}$ et change donc la valeur de $I_G(K)$ en son opposée.

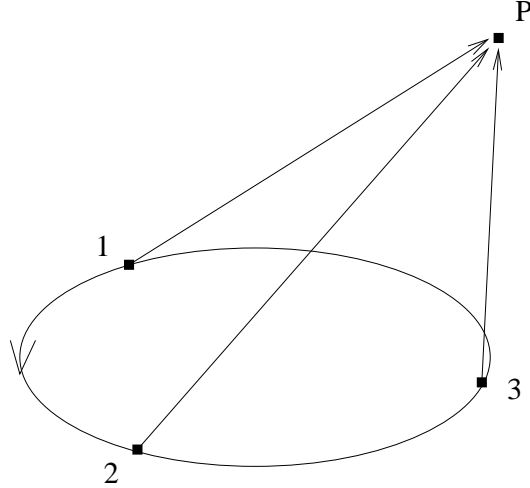
Ces intégrales $I_G(K)$ permettent, ainsi que nous le verrons en (1.4), d'obtenir des invariants de nœuds.

Nous allons auparavant traiter un exemple de calcul d'intégrale d'espace de configurations :

Exemple 1.21. Cherchons à calculer l'intégrale d'espace de configurations associée au tripode, dans le cas du nœud trivial. Nous noterons K le nœud trivial

$$\begin{aligned} K : S^1 = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} &\rightarrow \mathbf{R}^3 \\ t &\mapsto (\cos t, \sin t, 0) \end{aligned}$$

Nous utiliserons les conventions d'orientation suivantes :

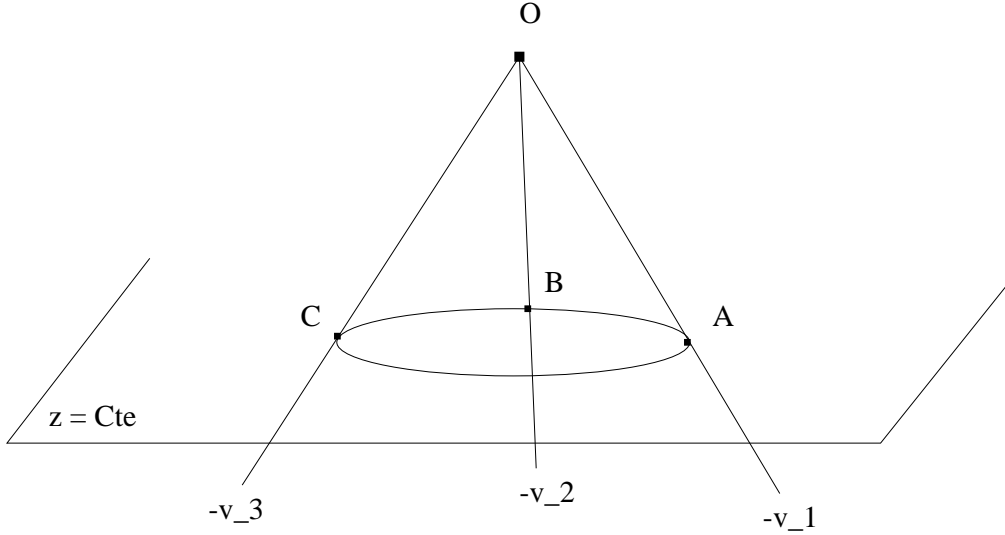


Nous noterons 1, 2, 3 les sommets univalents et P le sommet trivalent. Nous noterons \mathcal{C} l'espace de configurations où les univalents sont dans l'ordre cyclique trigonométrique. Nous voulons calculer $I_G(K) = \int_{\mathcal{C}} \psi^* \omega$. Nous noterons Ω^+ (resp. Ω^-) l'ensemble des configurations de \mathcal{C} injectives et telles que l'altitude z_P du point P soit > 0 .

Soit S_+^2 l'hémisphère positif de S^2 (l'ensemble des $v \in S^2$ dont la troisième coordonnée est ≥ 0), et $S_-^2 = -S_+^2$ l'hémisphère négatif de S^2 . On voit que

$$\psi(\mathcal{C}) \subset (S_+^2)^3 \cup (S_-^2)^3$$

Soit \mathcal{D} l'ensemble des triplets de vecteurs (v_1, v_2, v_3) de l'hémisphère strictement positif de S^2 , tels que (v_1, v_2, v_3) soit une base directe de \mathbf{R}^3 . Nous voulons montrer que ψ est un difféomorphisme de Ω^+ dans \mathcal{D} , ainsi que de Ω^- dans $-\mathcal{D}$. ψ étant de classe C^∞ , il suffit de construire son inverse. Soit $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{D}$. Soit O l'origine de \mathbf{R}^3 ; traçons les trois demi-droites de directions $-v_1, -v_2, -v_3$ issues de O . Tout plan horizontal d'altitude $z < 0$ coupe ces demi-droites en trois points distincts non alignés A, B, C . Pour z fixé, il existe un unique cercle passant par A, B, C ; on voit aussi qu'il existe un unique $z < 0$ tel que ce cercle ait la taille du nœud K (voir la figure ci-dessous).

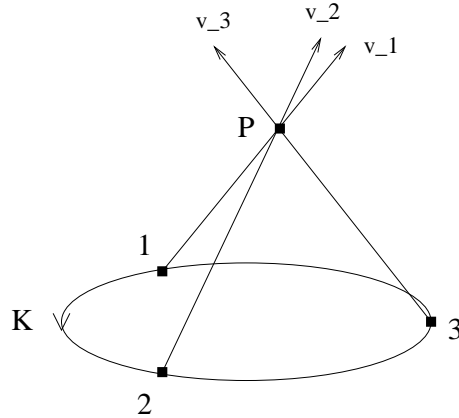


En effectuant une translation de manière à ramener ce cercle sur le nœud, nous obtenons une configuration injective $c = (s_1, s_2, s_3, P) \in \Omega^+$. Par construction, c est l'unique configuration de Ω^+ vérifiant $\psi(c) = v$. De plus, l'altitude z telle que le cercle passant par A, B, C ait la taille de K , dépend de façon C^∞ de v_1, v_2, v_3 . Par suite, l'application qui à $v \in \mathcal{D}$ associe $c \in \Omega^+$ est de classe C^∞ . ψ induit donc un difféomorphisme $\Omega^+ \rightarrow \mathcal{D}$.

Montrons que ce difféomorphisme préserve l'orientation. Ω^+ étant connexe, il suffit de montrer le résultat en un point. Prenons la configuration particulière $c_0 \in \Omega^+$ décrite par

$$s_1 = 0; s_2 = \frac{2\pi}{3}; s_3 = \frac{4\pi}{3}$$

$$c_0 = (1, 2, 3, P_0) \text{ est un tétraèdre régulier et } z_{P_0} > 0$$



Posons $(v_1, v_2, v_3) = \psi(c_0)$. L'espace tangent à Ω^+ en c_0 se décompose ainsi

$$T_{c_0} \Omega^+ = T_{s_1} S^1 \oplus T_{s_2} S^1 \oplus T_{s_3} S^1 \oplus T_{P_0} \mathbf{R}^3$$

De plus, (v_1, v_2, v_3) est une base directe de $T_{P_0} \mathbf{R}^3$, on obtient donc une base directe \mathcal{B} de $T_{c_0} \Omega^+$:

$$\mathcal{B} = (\sigma_1, v_1, \sigma_2, v_2, \sigma_3, v_3)$$

où σ_i est le vecteur tangent unitaire orienté de $T_{s_i} S^1$. Posons $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$. On constate que $(d\psi_1(v_2), d\psi_1(v_3))$ est une base directe de $T_{v_1} S^2$ (voir figure ci-dessus). En utilisant la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ par rapport à l'axe vertical, $(d\psi_2(v_3), d\psi_2(v_1))$ et $(d\psi_3(v_1), d\psi_3(v_2))$ sont également des bases directes de $T_{v_2} S^2$ et $T_{v_3} S^2$. Notons \mathcal{B}' la base directe de $T_v (S^2)^3$ ainsi obtenue. Dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' , la matrice de $d\psi$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta & 0 \end{pmatrix}$$

puisque la configuration admet une symétrie d'ordre 3. On voit d'après la figure que $\alpha > 0$ et $\beta = -\alpha$. Le calcul du déterminant donne

$$\det(d\psi) = \alpha^3 - \beta^3 = 2\alpha^3 > 0$$

Donc $\psi : \Omega^+ \rightarrow \mathcal{D}$ préserve l'orientation.

On en déduit que $\int_{\Omega^+} \psi^* \omega$ existe et vaut $\mu(\mathcal{D})$. Montrons que $\mu(\mathcal{D}) = 1/16$. L'ensemble des triplets de vecteurs colinéaires est de mesure nulle dans $(S^2)^3$. Par conséquent, l'ensemble des triplets de vecteurs linéairement indépendants et situés dans l'hémisphère strictement positive de S^2 est de mesure $\frac{1}{8}$. Comme la mesure de l'ensemble des triplets directs est égale à la mesure de l'ensemble des triplets indirects, $\mu(\mathcal{D}) = 1/16$.

Montrons maintenant que $\int_{\Omega^-} \psi^* \omega$ existe et vaut également $1/16$. Soit $h : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ l'application qui à une configuration c associe la symétrie de c par rapport à l'origine. h envoie Ω^+ sur Ω^- (h préserve l'ordre cyclique des univalents), et renverse l'orientation de \mathcal{C} . D'autre part, $\psi \circ h = r \circ \psi$, avec $r : (S^2)^3 \rightarrow (S^2)^3; (v_1, v_2, v_3) \mapsto (-v_1, -v_2, -v_3)$. r renverse l'orientation et préserve la mesure de $(S^2)^3$. On peut donc écrire

$$\int_{\Omega^-} \psi^* \omega = - \int_{\Omega^+} (\psi \circ h)^* \omega = - \int_{\Omega^+} (r \circ \psi)^* \omega = + \int_{\Omega^+} \psi^* \omega = \frac{1}{16}$$

Pour finir, $\Omega^+ \cup \Omega^-$ est de mesure pleine dans \mathcal{C} , par conséquent $\int_{\mathcal{C}} \psi^* \omega = \int_{\Omega^+} \psi^* \omega + \int_{\Omega^-} \psi^* \omega = \frac{1}{8}$. En conclusion,

$$I_G(K) = \frac{1}{8}$$

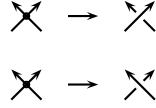
1.3 Les invariants de Vassiliev

Définition 1.22. Soit $n \in \mathbf{N}$. Un *nœud singulier* K à n points doubles est une immersion de S^1 dans \mathbf{R}^3 (c'est-à-dire une application de classe C^∞ dont la dérivée ne s'annule pas) admettant exactement n points doubles transverses (un point double $p = K(s) = K(s')$ est dit transverse lorsque les vecteurs tangents à K en s et s' forment une famille libre de \mathbf{R}^3), et aucun point d'ordre ≥ 3 .

Définition 1.23. Deux nœuds singuliers à n points doubles K_0 et K_1 sont dits isotopes lorsqu'il existe une application $K : S^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^3$, de classe C^∞ , et vérifiant

$$\begin{cases} K|_{S^1 \times \{0\}} = K_0 \text{ et } K|_{S^1 \times \{1\}} = K_1 \\ \forall t \in [0, 1], K|_{S^1 \times \{t\}} \text{ est un nœud à } n \text{ points doubles} \end{cases}$$

Il y a deux manières de désingulariser un nœud à 1 point double :



La première est appelée désingularisation positive, et la seconde est appelée désingularisation négative. On vérifie que la désingularisation est une opération bien définie à isotopie près, et qu'elle ne dépend pas du dessin ci-dessus. Elle est donc définie intrinsèquement lorsque l'on se donne un nœud singulier à 1 point double K .

On définit de la même manière les 2^n désingularisations possibles d'un nœud singulier à n points doubles. Plus précisément, soit X l'ensemble des points doubles du nœud singulier K . On associe à toute fonction $\epsilon : X \rightarrow \{-1, +1\}$ un nœud non singulier K_ϵ de la manière suivante : on désingularise le point double $x \in X$ positivement ou négativement suivant que $\epsilon(x) = +1$ ou $\epsilon(x) = -1$. Comme la désingularisation est une opération locale, l'ordre dans lequel on défait les croisements de K n'a pas d'importance. On peut alors poser la définition suivante :

Définition 1.24. Soit \mathcal{N} l'ensemble des classes d'isotopie de nœuds non singuliers. Toute application $v : \mathcal{N} \rightarrow \mathbf{R}$ peut s'étendre à l'ensemble des nœuds singuliers de la manière suivante : si K est un nœud singulier à n points doubles, on définit

$$v(K) = \sum_{\epsilon: X \rightarrow \{-1, +1\}} (-1)^\epsilon v(K_\epsilon) \quad (2)$$

où l'on a posé $(-1)^\epsilon = \prod_{x \in X} \epsilon(x)$.

Proposition 1.25. Pour tous les nœuds singuliers, on a la propriété suivante (qui relie des nœuds identiques sauf là où ils sont représentés) :

$$v(\text{crossing}) = v(\text{positive resolution}) - v(\text{negative resolution}) \quad (3)$$

Démonstration. Soit K un nœud singulier représenté par \bowtie . Appelons X l'ensemble des points doubles de K et $x \in X$ l'unique point double représenté. Posons enfin $X' = X \setminus \{x\}$. On a

$$\begin{aligned} v(K) &= \sum_{\epsilon: X \rightarrow \{-1, +1\}} (-1)^\epsilon v(\bowtie_\epsilon) \\ &= \sum_{\epsilon': X' \rightarrow \{-1, +1\}} (-1)^{\epsilon'} v(\bowtie_{\epsilon'}) - \sum_{\epsilon': X' \rightarrow \{-1, +1\}} (-1)^{\epsilon'} v(\bowtie_{\epsilon'}) \\ &= v(\bowtie) - v(\bowtie) \blacksquare \end{aligned}$$

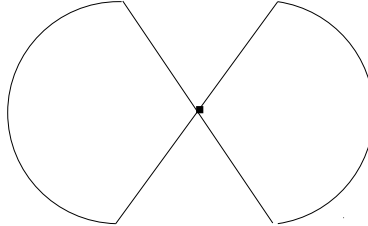
Définition 1.26. Soit $n \in \mathbf{N}$. Un invariant $v : \mathcal{N} \rightarrow \mathbf{R}$ est dit de Vassiliev de degré $\leq n$ lorsque l'application v étendue aux nœuds singuliers s'annule sur tous les nœuds à $n + 1$ points doubles. Dans ce cas, le *degré* de v est le plus petit $n \in \mathbf{N}$ tel que v soit de degré $\leq n$.

Proposition 1.27. *Tout invariant de Vassiliev de degré 0 ou 1 est constant (un tel invariant ne distingue donc aucun nœud).*

Démonstration. Soit v_0 un invariant de Vassiliev de degré 0. v_0 s'annule sur tous les nœuds singuliers à 1 point double. Montrons que tout nœud non singulier K peut être transformé en nœud trivial lorsque l'on autorise les brins de K à se traverser. Soit $p \circ K$ une projection régulière orthogonale de K sur un plan. Fixons $a \in S^1$, tel que a ne soit pas un point double de $p \circ K$. On peut toujours changer l'orientation des points doubles de $p \circ K$ de telle manière que, lorsque l'on part de a et que l'on parcourt S^1 dans le sens positif, le premier passage à un point double a toujours lieu sur le brin passant au dessus de ce point double. Or un tel nœud est trivial, ce qui démontre l'assertion. En utilisant la formule 3, il vient alors

$$v_0(K) = v_0(\text{nœud trivial})$$

v_0 est donc constant. Soit maintenant v_1 un invariant de Vassiliev de degré 1. Notons $K_{(1)}$ le nœud singulier à 1 point double suivant :



Soit K un nœud à 1 point double. On peut toujours déformer K en $K_{(1)}$ en suivant un chemin qui ne passe que par des nœuds à 2 points doubles. En utilisant l'équation 3, on obtient

$$v_1(K) = v_1(K_{(1)})$$

Or les deux désingularisations de $K_{(1)}$ aboutissent au nœud trivial, par conséquent $v_1(K_{(1)}) = 0$. Autrement dit, il n'existe pas d'invariant de Vassiliev des nœuds de degré exactement égal à 1. ■

Nous allons maintenant faire le lien entre les invariants de Vassiliev et les diagrammes uni-trivalents.

Définition 1.28. Soit G un diagramme uni-trivalent dessiné sur le cercle S^1 . On appelle degré de G la moitié du nombre de sommets de G :

$$\deg G = \frac{1}{2} \#V$$

Le degré est entier car

$$\#V = \text{nombre de demi-arêtes} - 2\#T = 2\#E - 2\#T,$$

qui est pair. Remarquons aussi que la définition des diagrammes uni-trivalents est combinatoire : pour chaque $n \in \mathbf{N}$, il n'y a qu'un nombre fini de diagrammes de degré n .

Définition 1.29. On note $\mathcal{A}_n(S^1)$ le \mathbf{R} -espace vectoriel engendré par l'ensemble des diagrammes uni-trivalents de degré n , et quotienté par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} 1T \text{ (corde isolée)} : & \text{---} \overset{\curvearrowright}{\text{---}} \text{---} = 0 \\ \text{AS (antisymétrie)} : & \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} = 0 \\ \text{STU} : & \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} \end{aligned}$$

(Les relations ci-dessus ont lieu pour des diagrammes uni-trivalents identiques là où ils ne sont pas représentés)

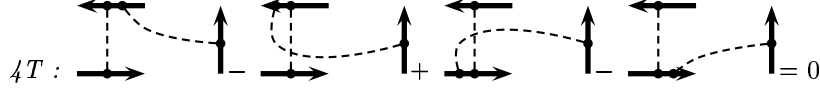
Proposition 1.30. L'espace vectoriel $\mathcal{A}_n(S^1)$ est engendré par les diagrammes de cordes, c'est-à-dire par les diagrammes ne contenant aucun sommet trivalent.

Démonstration. D'après la relation STU, un diagramme contenant un ou plusieurs sommets trivalents s'exprime comme combinaison linéaire de diagrammes possédant un nombre strictement inférieur de sommets trivalents (on utilise ici le fait que toute composante connexe de G possède au moins un univalent). Par une récurrence, tout diagramme de degré n s'exprime dans $\mathcal{A}_n(S^1)$ comme une combinaison linéaire de diagrammes de cordes. ■

On peut en fait décrire un peu plus précisément $\mathcal{A}_n(S^1)$:

Proposition 1.31. $\mathcal{A}_n(S^1)$ est isomorphe à l'espace vectoriel engendré par les diagrammes à n cordes, et quotienté par les relations suivantes :

$$1T \text{ (corde isolée)} : \text{---} \overset{\curvearrowright}{\text{---}} \text{---} = 0$$



On peut trouver une démonstration de ce résultat dans [Bar].

Définition 1.32. À tout nœud singulier K à n points doubles, on peut associer un diagramme de cordes de degré n , de la manière suivante. Soient $X \subset \mathbf{R}^3$ l'ensemble des points doubles de K dans \mathbf{R}^3 . Pour chaque $x \in X$, on trace une corde entre les deux préimages s et s' du point double x dans S^1 . On obtient bien ainsi un diagramme G à n cordes.

Proposition 1.33. Soit V_n l'espace vectoriel des invariants de Vassiliev de degré $\leq n$. Posons par convention $V_{-1} = \{0\}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'espace quotient V_n/V_{n-1} s'injecte dans le dual de l'espace vectoriel $\mathcal{A}_n(S^1)$.

Démonstration. Remarquons d'abord que par définition des invariants de Vassiliev de degré $\leq n$, V_n est un espace vectoriel. Soit maintenant v un élément de V_n . Nous allons associer à v un élément de $(\mathcal{A}_n(S^1))^*$. Soit G un diagramme de cordes de degré n . Soit K, K' deux nœuds singuliers à n points doubles ayant pour diagramme G . On admet que l'on peut toujours passer de K à K' par une isotopie de nœuds singuliers à n points doubles, et éventuellement, un nombre fini de fois, par des nœuds singuliers à $n + 1$ points doubles (voir par exemple [Hir]). Par un raisonnement similaire à celui fait précédemment, $v(K) = v(K')$. $v(K)$ ne dépend donc que du diagramme de cordes de K , et v définit donc un élément w du dual de l'espace vectoriel engendré par les diagrammes à n cordes. On vérifie que w s'annule sur les expressions du type $1T$ et $4T$ (pour la relation $1T$, le principe est le même que dans la démonstration de la proposition 1.27). w définit donc un élément de $(\mathcal{A}_n(S^1))^*$. Il est facile de voir que cet élément ne dépend que de la classe de v modulo V_{n-1} . Enfin, l'application $V_n/V_{n-1} \rightarrow (\mathcal{A}_n(S^1))^*$ ainsi construite est injective car si v s'annule sur les diagrammes à n cordes, alors il s'annule sur tous les nœuds à n points doubles, i.e. il est de degré $\leq n - 1$. ■

La proposition précédente borne la dimension de l'espace vectoriel V_n des invariants de Vassiliev de degré $\leq n$: car $v \in V_n$ est déterminé par sa valeur sur les diagrammes à n cordes, modulo V_{n-1} . Par une récurrence on a

$$\dim V_n = \sum_{i=0}^n \dim \frac{V_i}{V_{i-1}} \leq \sum_{i=0}^{n-1} \dim \mathcal{A}_i(S^1)$$

En fait, Kontsevich a montré en 1992 que l'application $V_n/V_{n-1} \rightarrow (\mathcal{A}_n(S^1))^*$ est surjective en construisant un invariant de Vassiliev qui domine tous les autres (appelé intégrale de Kontsevich). Le paragraphe suivant donne une autre manière de construire tous les invariants de Vassiliev.

1.4 Le développement perturbatif de Chern-Simons

On définit le développement perturbatif de Chern-Simons comme une série d'intégrales d'espaces de configurations (voir 1.2), de la manière suivante :

Définition 1.34. Soit K un nœud et $n \in \mathbf{N}$. On appelle partie de degré n du développement de Chern-Simons, la quantité

$$Z_n^{CS}(K) = \sum_{G \in \{\text{diagrammes non-orientés de degré } n\}} \frac{I_G(K)}{\#\text{Aut } G} [G] \in \mathcal{A}_n(S^1)$$

où :

- La somme porte sur les diagrammes uni-trivalents dessinés sur S^1 et de degré n , dans lesquels on n'oriente pas les sommets trivalents.
- $I_G(K)$ a été défini en 1.2. D'après la relation AS, $I_G(K)[G]$ est indépendant de l'orientation des sommets trivalents.
- $\#\text{Aut } G$ désigne le nombre d'automorphismes (non-orientés) du diagramme G . Par exemple, le tripode admet 3 automorphismes.
- $[G]$ désigne la classe de G dans $\mathcal{A}_n(S^1)$.

Notons $\mathcal{A}(S^1) = \prod_{n \in \mathbf{N}} \mathcal{A}_n(S^1)$.

Définition 1.35. Soit K un nœud. On appelle développement de Chern-Simons la quantité

$$Z^{CS}(K) = (Z_n^{CS}(K))_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{A}(S^1)$$

Pour plus de commodité, on écrit aussi

$$Z^{CS}(K) = \sum_{G \in \{\text{diagrammes non-orientés}\}} \frac{I_G(K)}{\#\text{Aut } G} [G]$$

(La série converge en effet toujours.)

Cette série a été introduite par Guadagnini, Martellini et Mintchev en 1988.

Le théorème principal est le suivant :

Théorème 1.36 (Kontsevich, Bott-Taubes (1994)). *$Z^{CS}(K)$ ne dépend que de la classe d'isotopie de K et de l'intégrale de Gauss $I_\theta(K)$. En particulier, si l'on pose $Z^{0,CS}(K) = Z^{CS}(K' \mid [K'] = [K] \text{ et } I_\theta(K') = 0)$, alors $Z^{0,CS}$ est un invariant isotopique des nœuds. De plus, pour tout invariant de Vassiliev v réel des nœuds de degré n , il existe une forme \mathbf{R} -linéaire ϕ sur $\prod_{0 \leq i \leq n} \mathcal{A}_i(S^1)$ telle que $v = \phi \circ Z^{0,CS}$. Enfin toute expression du type $\phi \circ Z^{0,CS}$ est un invariant de Vassiliev.*

Nous aurons un aperçu, dans la deuxième partie, des outils nécessaires à la démonstration de ce théorème. Nous nous restreindrons à la partie de degré 2 du développement de Chern-Simons (qui avait déjà été étudiée par Bar-Natan en 1992). Nous montrerons en utilisant deux méthodes différentes que cette partie de degré 2 est un invariant d'isotopie de K , et qu'elle coïncide avec l'invariant de Vassiliev de degré 2.

2 L'invariant de Vassiliev de degré 2 des nœuds

2.1 Description intégrale

Nous noterons \oplus le tripode. Nous considèrerons également le diagramme uni-trivalent suivant :



que nous noterons \otimes .

Nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.1. $v(K) = \frac{1}{3}I_{\oplus}(K) - \frac{1}{4}I_{\otimes}(K)$ ne dépend que de la classe d'isotopie du nœud K .

Remarque. Nous donnerons dans la suite de cette deuxième partie, deux autres expressions équivalentes pour $v(K)$.

Nous allons dans un premier temps donner le schéma de la démonstration; les détails seront complétés dans les parties 3 et 4.

Étant donné un diagramme uni-trivalent G , nous allons nous intéresser à la variation de l'intégrale d'espace de configurations $I_G(K_t)$, lors d'une isotopie de nœuds.

Dans toute la suite, $K : S^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^3$ sera une isotopie reliant les nœuds K_0 et K_1 . Pour chaque $t \in [0, 1]$, nous disposons d'un nœud K_t , et de l'espace Ω_{G, K_t} des configurations injectives associées à ce nœud. La troisième partie exprimera Ω_{G, K_t} comme l'intérieur d'une variété à coins compacte \mathcal{C}_{G, K_t} . Nous allons maintenant définir l'espace $\Omega_{G, K}$ des configurations injectives, associé à l'isotopie K .

Définition 2.2. On appelle *espace des configurations injectives associé au diagramme G et à l'isotopie K* , et on note $\Omega_{G, K}$, l'espace

$$\Omega_{G, K} = \{(s, p, t) \in (S^1)^U \times (\mathbf{R}^3)^T \times [0, 1] \mid (s, p) \in \Omega_{G, K_t}\}$$

$\Omega_{G, K}$ est un ouvert de $(S^1)^U \times (\mathbf{R}^3)^T \times [0, 1]$.

Définition 2.3. On définit de la même manière que précédemment l'application

$$\psi_{G, K} : \Omega_{G, K} \rightarrow (S^2)^E$$

On peut montrer le résultat suivant :

Proposition 2.4. *Il existe une compactification $\mathcal{C}_{G, K}$ de $\Omega_{G, K}$ telle que*

- $\mathcal{C}_{G, K}$ est une variété à coins compacte.
- L'application $\psi_{G, K}$ s'étend en une application $\mathcal{C}_{G, K} \rightarrow (S^2)^E$ de classe C^∞ .

- $\mathcal{C}_{G,K}$ est difféomorphe à $\mathcal{C}_{G,K_0} \times [0, 1]$.

$\mathcal{C}_{G,K}$ est appelé *espace de configurations associé au diagramme G et à l'isotopie K* .

Définition 2.5 (Orientation de $\Omega_{G,K}$). Comme $\Omega_{G,K}$ est un ouvert de $(S^1)^U \times (\mathbf{R}^3)^T \times [0, 1]$, et comme $(S^1)^U \times (\mathbf{R}^3)^T$ a déjà été orienté, nous pouvons donner à $\Omega_{G,K}$ l'orientation induite par l'orientation produit (de sorte que le difféomorphisme de la proposition 2.4 préserve l'orientation).

Rappelons maintenant quelques définitions concernant les variétés à coins différentiables.

Définition 2.6. Une variété à coins est un espace topologique M (séparé, union dénombrable de compacts) tel que tout $x \in M$ admet un voisinage V homéomorphe à $\mathbf{R}^p \times [0, +\infty[$, où $p, q \in \mathbf{N}$ sont des entiers bien choisis (dépendant de x), et où l'homéomorphisme envoie x sur 0. On dit que la variété est différentiable lorsque tous les changements de carte locale sont de classe C^∞ (dans la suite le mot "différentiable" sera toujours sous-entendu).

Définition 2.7. Soit M une variété à coins et $i \in \mathbf{N}$. On appelle *bord de codimension i de M* l'ensemble des $x \in M$ tels que le $q \in \mathbf{N}$ de la définition ci-dessus vale i . On a la propriété suivante : pour tout $i \in \mathbf{N}$, le bord de codimension i est une variété lisse sans bord (non nécessairement connexe), de codimension i dans M .

Remarque. Lorsque de plus M est orientée, le bord de codimension 1 est orienté en utilisant la convention de la normale extérieure premier vecteur de base.

Définition 2.8. Soit M une variété à coins différentiable. Nous appellerons *face essentielle de M* toute composante connexe du bord de codimension 1 de M . Nous appellerons *bord de M* , et nous noterons ∂M , la réunion de tous les bords de M de codimension ≥ 1 .

Exemple 2.9. Le cube $[0, 1]^3$, considéré comme variété à coins, possède 6 faces essentielles.

Proposition 2.10. *Soit M une variété à coins différentiable compacte. Le bord ∂M de M est la réunion indexée par les faces \mathcal{F} de M , des variétés à coins $\overline{\mathcal{F}}$. De plus si \mathcal{F} et \mathcal{F}' sont deux faces distinctes de M , on a $\text{codim}(\overline{\mathcal{F}} \cap \overline{\mathcal{F}}') \geq 2$.*

Proposition 2.11. *Le bord $\partial \mathcal{C}_{G,K}$ de l'espace de configurations associé à l'isotopie s'écrit*

$$\partial \mathcal{C}_{G,K} = (\mathcal{C}_{G,K_1} \times \{1\})^+ \cup (\mathcal{C}_{G,K_0} \times \{0\})^- \cup \partial_L \mathcal{C}_{G,K}$$

où $+$ et $-$ désignent les orientations positives et négatives, et où $\partial_L \mathcal{C}_{G,K}$ est le bord latéral de $\mathcal{C}_{G,K}$ défini par

$$\partial_L \mathcal{C}_{G,K} = \bigsqcup_{t \in [0,1]} \partial \mathcal{C}_{G,K_t} \times \{t\} \simeq \partial \mathcal{C}_{G,K_0} \times [0, 1]$$

$\partial_L \mathcal{C}_{G,K}$ est en bijection avec $\partial \mathcal{C}_{G,K_0} \times [0,1]$ et peut donc s'écrire comme la réunion indexée par les faces \mathcal{F} de \mathcal{C}_{G,K_0} , des variétés à coins $\overline{\mathcal{F}} \times [0,1]$.

Voici maintenant le principe de calcul de la variation de $I_G(K_t)$ lors de l'isotopie. Nous noterons $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \psi_0, \psi_1, I_0, I_1$ les espaces de configurations, applications et intégrales relatifs aux nœuds K_0 et K_1 . Nous noterons $\psi = \psi_{G,K}$.

L'idée est d'appliquer le théorème de Stokes à la variété à coins $\mathcal{C}_{G,K}$ et à la forme différentielle à support compact $\psi^* \Omega$ (avec $\Omega = \bigwedge^E \omega$) :

$$\int_{\partial \mathcal{C}_{G,K}} \psi^* \Omega = \int_{\mathcal{C}_{G,K}} d(\psi^* \Omega) = \int_{\mathcal{C}_{G,K}} \psi^* d\Omega = 0$$

L'intégrale sur $\partial \mathcal{C}_{G,K}$ a un sens d'après la proposition 2.11. On peut ensuite écrire

$$\int_{\partial \mathcal{C}_{G,K}} \psi^* \Omega = \int_{\mathcal{C}_1} \psi_1^* \Omega - \int_{\mathcal{C}_0} \psi_0^* \Omega + \int_{\partial_L \mathcal{C}_{G,K}} \psi^* \Omega$$

On en déduit la formule fondamentale suivante

$$I_1 = I_0 - \int_{\partial_L \mathcal{C}_{G,K}} \psi^* \Omega \quad (4)$$

La formule 4 montre qu'a priori, l'intégrale I_G n'est pas un invariant isotopique des nœuds. Cependant, on obtient un invariant en combinant linéairement des intégrales d'espaces de configurations associés à différents diagrammes univalentes.

C'est ainsi que l'on peut montrer le théorème 2.1. L'étude précise de la contribution du bord latéral de $\mathcal{C}_{\oplus,K}$ et $\mathcal{C}_{\otimes,K}$ (qui fait intervenir d'après la proposition 2.11 l'étude des faces de \mathcal{C}_{\oplus,K_0} et $\mathcal{C}_{\otimes,K_0}$), sera faite dans la quatrième partie.

2.2 Recollé d'espaces de configurations

Soit K un nœud. L'espace de configurations $\mathcal{C}_{\oplus,K}$ associé au tripode \oplus est une variété à coins compacte. L'intégrale $I_{\oplus}(K)$ définie en 1.20 ne s'interprète donc pas en terme de degré d'une application, comme dans le cas de l'intégrale de Gauss d'un entrelacs à deux composantes.

Cependant, en utilisant $\mathcal{C}_{\oplus,K}$ et $\mathcal{C}_{\otimes,K}$, il est possible de construire un espace qui s'interprète comme un recollement de variétés à coins, et sur lequel est défini une application ψ prolongeant $\psi_{\oplus,K}$ et $\psi_{\otimes,K}$. La variété obtenue par recollement ayant un bord plus simple, la théorie développée dans l'appendice permettra d'affirmer que ψ possède un degré. On obtient par là un invariant de nœuds, qui coïncide avec celui obtenu dans le paragraphe précédent.

Nous allons d'abord définir ce qu'est un recollement de variétés à coins.

Définition 2.12. Soit X, X' deux variétés à coins compactes orientées de même dimension. Soit $(\mathcal{F}_i)_{1 \leq i \leq m}$ la liste des faces de X et X' .

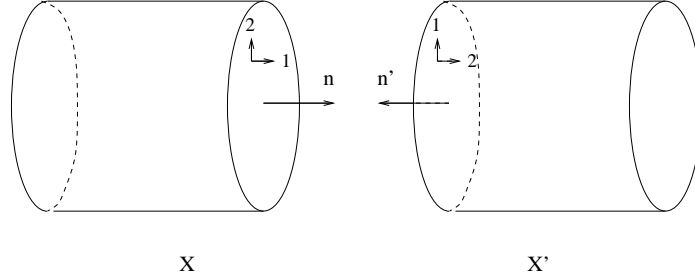
Soit $1 \leq i \leq j \leq m$. On appelle recollement des faces (i, j) la donnée d'un difféomorphisme de $\overline{\mathcal{F}_i}$ dans $\overline{\mathcal{F}_j}$ renversant l'orientation. Lorsque $i = j$, on dit que la face i est recollée à elle-même.

On appelle recollement de X et X' la donnée d'une liste de recollements de faces dans laquelle chaque face \mathcal{F}_i apparaît dans au plus un recollement.

On définit de la même façon les recollements d'un nombre fini quelconque de variétés à coins.

Remarque. On peut associer à tout recollement des variété à coins X_1, \dots, X_k un espace topologique X , qui est le quotient de l'espace topologique $X_1 \sqcup \dots \sqcup X_k$ par l'identification des faces.

Remarque. On demande au recollement de faces d'être un difféomorphisme renversant l'orientation car l'on veut que le recollement puisse être schématisé ainsi :



Avant de recoller les espaces de configurations associés à \oplus et à \otimes , nous allons introduire les nœuds verticaux.

Définition 2.13 (Nœuds verticaux). Un nœud vertical K est un plongement de \mathbf{R} dans \mathbf{R}^3 tel qu'il existe un réel $A > 0$ pour lequel

$$\forall s \in]-\infty, A] \cup [A, \infty[, K(s) = (0, 0, s)$$

Définition 2.14. Les nœuds verticaux K_0 et K_1 sont dits isotopes lorsqu'il existe une application $K : \mathbf{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^3$ de classe C^∞ , et vérifiant

$$\begin{cases} K|_{\mathbf{R} \times \{0\}} = K_0 \text{ et } K|_{\mathbf{R} \times \{1\}} = K_1 \\ \forall t \in [0, 1], K|_{\mathbf{R} \times \{t\}} \text{ est un nœud vertical} \\ \exists A > 0, \forall s \in]-\infty, A] \cup [A, \infty[, \forall t \in [0, 1], K(s, t) = (0, 0, s) \end{cases}$$

Remarque. Il est facile d'associer, à un nœud vertical, un nœud au sens usuel. En effet si K est un nœud vertical, il existe un compact C contenant la partie "non verticale" de K . On relie alors les deux extrémités "libres" de K par un arc de cercle ne passant pas par C , pour obtenir un nœud $\overline{K} : S^1 \rightarrow \mathbf{R}^3$. De plus, lorsque K, K' sont des nœuds verticaux isotopes, alors \overline{K} et \overline{K}' sont des nœuds isotopes au sens usuel. On admet que réciproquement, l'isotopie de \overline{K} et \overline{K}' implique l'isotopie de K et K' .

On définit les *diagrammes uni-trivalents dessinés sur \mathbf{R}* en reprenant la définition 1.15, mais en remplaçant la donnée d'un ordre cyclique sur U par la donnée d'un ordre total. Ainsi, les diagrammes \oplus et \otimes deviennent respectivement :



Dans ces diagrammes nous avons en plus précisé une orientation pour les arêtes.

On définit de la même manière l'espace des configurations injectives Ω_{G, K_0} d'un diagramme G (sur \mathbf{R}) et d'un nœud vertical K_0 . Cet espace est un ouvert de $\mathbf{R}^U \times (\mathbf{R}^3)^T$. On oriente Ω_{G, K_0} de la même manière que dans la première partie.

On verra dans la troisième partie que Ω_{G, K_0} admet une compactification \mathcal{C}_{G, K_0} , qui est une variété à coins, et qui est telle que l'application naturelle $\psi_{G, K} : \Omega_{G, K} \rightarrow (S^2)^E$ s'étende en une application $\mathcal{C}_{G, K} \rightarrow (S^2)^E$ de classe C^∞ .

Dans toute la suite du paragraphe, nous fixerons un nœud vertical K . Nous noterons \triangleright l'espace de configurations associé au diagramme \triangleright et à K . Les arêtes sont orientées de la manière décrite plus haut. Nous avons une application naturelle

$$\psi_{123} : \triangleright \rightarrow (S^2)^3$$

en numérotant les 3 arêtes du diagramme de la manière suivante :

- Arête du haut : 3
- Arête du milieu : 2
- Arête du bas : 1

et en convenant que la i -ème composante de ψ_{123} est l'application définie par la direction de l'arête numéro i .

Nous disposons de même, pour toute permutation σ de \mathcal{S}_3 , d'une application

$\psi_\sigma : \triangleright \rightarrow (S^2)^3$ qui est par définition la composée de ψ_{123} et de l'application

$$\begin{aligned} f_\sigma : (S^2)^3 &\rightarrow (S^2)^3 \\ (v_1, v_2, v_3) &\mapsto (v_{\sigma^{-1}(1)}, v_{\sigma^{-1}(2)}, v_{\sigma^{-1}(3)}) \end{aligned}$$

(cela revient à numéroter les arêtes de bas en haut par $\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3)$).

Nous noterons \triangleright l'espace de configurations associé au diagramme \triangleright et à K . Nous pouvons définir une application

$$\begin{aligned} \psi_{12} : S^2 \times \triangleright &\rightarrow (S^2)^3 \\ (v, c) &\mapsto (v_1, v_2, v_3) \end{aligned}$$

en numérotant les 2 arêtes du diagramme de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \text{Arête du haut} &: 2 \\ \text{Arête du bas} &: 1 \end{aligned}$$

et en convenant que v_1, v_2 sont les directions des arêtes 1, 2, et que $v_3 = v$.

Nous disposons d'applications analogues pour les numérotations 13, 21, 23, 31, 32; là encore ces applications s'obtiennent en composant ψ_{12} par les application f_σ ($\sigma \in S_3$).

Nous disposons donc de 6 copies de l'espace \triangleright et de 6 copies de l'espace $S^2 \times \triangleright$. Sur chacune de ces copies, la numérotation définit une application naturelle ψ à valeurs dans $(S^2)^3$. La proposition principale est la suivante :

Proposition 2.15. *Il existe un ensemble W_2 de codimension ≥ 2 dans $(S^2)^3$ et une recollement \mathcal{C} des 6 copies de la variété à coins \triangleright et des 6 copies de la variété à coins $S^2 \times \triangleright$, tel que ψ s'étend en une application continue $\mathcal{C} \rightarrow (S^2)^3$, et tel que ψ envoie le bord apparent de \mathcal{C} dans $W_1 \cup W_2$, avec $W_1 = \{(v_1, v_2, v_3) \in (S^2)^3 \mid v_1, v_2, v_3 \text{ coplanaires}\}$.*

Étudions les conséquences de cette proposition. $(S^2)^3 \setminus (W_1 \cup W_2)$ a deux composantes connexes Ω^+ et Ω^- . D'après la proposition 4.7 de l'appendice, le degré de l'application $\psi : \mathcal{C} \rightarrow (S^2)^3$ est constant sur chacune de ces deux composantes connexes (nous entendons par degré d'une valeur $y \in (S^2)^3$ le nombre de préimages de y avec signe; voir l'Appendice). De plus, Ω^+ et Ω^- sont tous deux de mesure $\frac{1}{2}$. L'aire recouverte par $\psi(\mathcal{C})$ sur $(S^2)^3$ vaut donc $\frac{1}{2}(\deg(\psi, \Omega^+) + \deg(\psi, \Omega^-))$. Cette aire vaut aussi

$$6I_{\triangleright}(K) + 6I_{\triangleright}(K)$$

puisque nous avons démontré dans la première partie que l'intégrale d'espaces de configurations est indépendante de la numérotation des arêtes. En conséquence

$$I_{\triangleright}(K) + I_{\triangleright}(K) = \frac{1}{12}(\deg(\psi, \Omega^+) + \deg(\psi, \Omega^-))$$

Mais on peut montrer que $\deg(\psi, \Omega^+) = \deg(\psi, \Omega^-)$ en considérant la permutation de deux arêtes (les triplets (v_1, v_2, v_2) et (v_2, v_1, v_3) ont même degré). Ainsi

$$I_{\triangleright}(K) + I_{\beth}(K) = \frac{1}{6} \deg(\psi, \Omega^+)$$

D'une part, cette formule montre que $I_{\triangleright}(K) + I_{\beth}(K) \in \mathbf{Q}$; on en déduit que $I_{\triangleright}(K) + I_{\beth}(K)$ constitue un invariant isotopique des nœuds verticaux. D'autre part, la formule ci-dessus nous donne un moyen de calculer explicitement cet invariant.

Proposition 2.16. *Soit K un nœud et π un plan. On suppose que la projection orthogonale $p \circ K$ de K sur π est régulière. Soit $a \in S^1$. On dispose d'un ordre naturel sur $S^1 \setminus \{a\}$. Si x et y sont deux points doubles distincts, notons $x_1 < x_2$ (resp. $y_1 < y_2$) les deux préimages de x (resp. y) dans $S^1 \setminus \{a\}$. On définit la quantité $a(x, y)$ par*

- Si $x_1 < y_1 < x_2 < y_2$, on pose $a(x, y) = +1$ (resp. $a(x, y) = -1$) lorsque les auto-croisements x et y sont de même signe (resp. de signes différents).
- Sinon, on pose $a(x, y) = 0$.

Alors

$$I_{\triangleright}(K) + I_{\beth}(K) = \langle \beth, p \circ K \rangle = \sum_{(x,y) \text{ points doubles de } K} a(x, y)$$

L'idée de la démonstration est de calculer le degré d'un triplet générique de vecteurs pointant tous tout près de l'axe vertical du nœud.

3 Compactifications d'espaces de configurations

Nous nous intéresserons dans la première sous-section à une compactification de l'espace des injections de k points dans \mathbf{R}^n (vues à translation et homothétie positive près). Puis nous définirons les espaces de configurations d'un nœud, leurs compactifications.

3.1 Injection de k points dans \mathbf{R}^n

Dans toute la suite, n sera un entier ≥ 1 et X sera un ensemble fini de cardinal $k \geq 2$. Nous noterons \tilde{C}_X^0 l'espace des injections de X dans \mathbf{R}^n . L'espace C_X^0 auquel nous allons nous intéresser est le quotient de \tilde{C}_X^0 par les translations et homothéties positives de \mathbf{R}^n , c'est-à-dire par la relation d'équivalence \mathcal{R} suivante :

$$\begin{aligned} \phi, \phi' : X &\rightarrow \mathbf{R}^n \\ \phi \mathcal{R} \phi' &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbf{R}^n, \exists \lambda > 0, \forall x \in X, \phi'(x) = t + \lambda \phi(x) \end{aligned}$$

C_X^0 sera muni de la topologie quotient de la topologie de sous-espace de $(\mathbf{R}^n)^X$.

Pour une partie $A \subset X$, nous noterons \tilde{C}^A l'espace des applications non constantes de A dans \mathbf{R}^n , et C^A le quotient de \tilde{C}^A par \mathcal{R} .

Nous disposons d'une inclusion $C_X^0 \subset C^X$; en fait, la topologie de C_X^0 est induite par celle de C^X : C_X^0 est un sous-espace topologique de C^X . D'autre part, l'application de restriction $C_X^0 \rightarrow C^A$ est continue (passage au quotient d'une application continue).

L'espace C_X^0 n'est bien sûr pas compact (sauf pour $k = 2$), mais on a le résultat suivant :

Proposition 3.1. *Pour toute partie $A \subset X$ de cardinal ≥ 2 , pour tout $a \in A$, C^A est homéomorphe à la sphère unité S de $(\mathbf{R}^n)^{A \setminus \{a\}}$. En particulier, C^A est compact.*

Démonstration. Tout $c \in C^A$ admet un unique représentant $\tilde{c} \in (\mathbf{R}^n)^A$ vérifiant

- $\tilde{c}(a) = 0$
- $\sum_{x \in A \setminus \{a\}} \|\tilde{c}(x)\|^2 = 1$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de \mathbf{R}^n . On obtient ainsi une bijection $\Phi : C^A \rightarrow S$. Φ^{-1} est continue comme la composée d'une inclusion et de la surjection canonique $\tilde{C}^A \rightarrow C^A$. S étant compacte, Φ est un homéomorphisme. ■

Notation. Soit $A \subset X$ et $a \in A$ fixés. Nous avons associé à tout élément $c \in C^A$ un représentant privilégié $\tilde{c} \in (\mathbf{R}^n)^A$. Nous noterons $\Phi_{A,a}$ l'application $C^A \rightarrow (\mathbf{R}^n)^A$ ainsi obtenue.

Remarquons en conséquence, que $C^X \supset C_X^0$ est une compactification de C_X^0 . L'exemple 3.4 montrera pourquoi elle ne nous est pas utile. La compactification à laquelle nous allons nous intéresser est la suivante :

Définition 3.2. Soit

$$H = \prod_{A \subset X, \#A \geq 2} C^A$$

Soit i l'application :

$$\begin{aligned} C_X^0 &\rightarrow H \\ c &\mapsto (c|_A)_A \end{aligned}$$

Le compactifié de C_X^0 que nous allons considérer est l'adhérence $\overline{i(C_X^0)}$ de $i(C_X^0)$ dans H ($\overline{i(C_X^0)}$ est compact comme fermé du compact H). Cette définition appelle la justification suivante :

Proposition 3.3. $i : C_X^0 \rightarrow H$ est injective et réalise un homéomorphisme sur son image.

Remarque. Le fait que i réalise un homéomorphisme sur son image nous assure que C_X^0 est bien un sous-espace topologique de $\overline{i(C_X^0)}$.

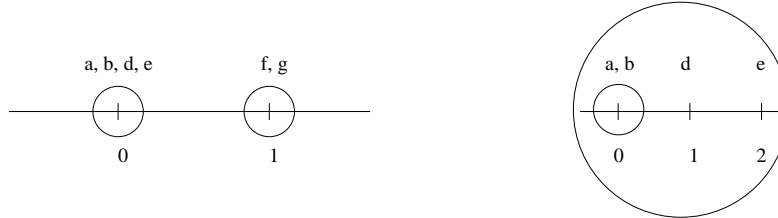
Démonstration.

i est injective car $C_X^0 \rightarrow C^X$ l'est. D'après les remarques préliminaires, i est continue. D'autre part, $i^{-1} : i(C_X^0) \rightarrow C_X^0$ est la restriction de la projection naturelle $H \rightarrow C^X$, qui est continue. Donc $i^{-1} : i(C_X^0) \rightarrow C_X^0$ est continue et i réalise un homéomorphisme sur son image. ■

Exemple 3.4. Prenons $X = \{a, b, d, e, f, g\}$ ($k = 6$) et plaçons-nous dans \mathbf{R} . Soit $(\gamma_p)_p$ la suite d'éléments de C_X^0 définie par $\gamma_p = (0, \frac{1}{p^2}, \frac{1}{p}, \frac{2}{p}, 1, 1 + \frac{1}{p})$. Considérons d'abord cette suite dans C^X . On a alors $\gamma_p \rightarrow (0, 0, 0, 0, 1, 1) \in C^X$. D'autre part, $i(\gamma_p)$ admet une limite c dans H ; cette limite vérifie

$$\begin{cases} c_X &= (0, 0, 0, 0, 1, 1) \\ c_{\{a,b,d,e\}} &= (0, 0, 1, 2) \\ c_{\{f,g\}} &= (0, 1) \\ c_{\{a,b\}} &= (0, 1) \end{cases}$$

On peut interpréter c_X comme une vue à grande échelle de c . Les points a, b, d, e sont alors confondus : on parle de "collapse". De la même façon, $c_{\{a,b,d,e\}}$ est une vue de c à l'échelle infinitésimale $\{a, b, d, e\}$. On peut interpréter de même toutes les composantes de c .



Nous voyons que la limite $c \in H$ contient plus d'informations que la simple limite dans C^X : elle contient la donnée des positions relatives des points a, b, d, e, f, g lorsque $p \rightarrow \infty$. Ce fait est essentiel lorsque l'on étend ψ au compactifié d'un espace de configurations d'un nœud (voir la sous-section suivante).

Remarquons enfin sur cet exemple que c vérifie la condition suivante (dite condition de cohérence) : pour toutes parties $A \subset B$ de X , avec $\sharp A \geq 2$, la restriction de c_B à A est soit constante, soit égale à c_A .

Il sera montré en 3.17 qu'en fait, cette condition caractérise les éléments de $\overline{i(C_X^0)}$.

Nous avons auparavant besoin de quelques définitions :

Définition 3.5. Soit F l'ensemble des éléments de H vérifiant la condition de cohérence évoquée plus haut, c'est-à-dire :

$$F = \{c \in H, \forall A \subset B \subset X, \sharp A \geq 2, c_B|_A \text{ est constante ou est égale à } c_A\} \quad (5)$$

Proposition 3.6. $\overline{i(C_X^0)} \subset F$

Démonstration. On a $i(C_X^0) \subset F$. Montrons que F est fermé dans H . Soit $A \subset B \subset X$ avec $\sharp A \geq 2$, et $a \in A$. L'application

$$f : c \in H \mapsto \tilde{c}_B \in (\mathbf{R}^n)^B$$

(via $\Phi_{B,a}$) est continue. De même pour

$$g : c \in H \mapsto \tilde{c}_A \in (\mathbf{R}^n)^A$$

(via $\Phi_{A,a}$). La condition de cohérence s'écrit alors comme une condition de colinéarité et une condition de produit scalaire positif ou nul :

$$\begin{cases} f(c)|_A \text{ et } g(c) \text{ colinéaires dans } (\mathbf{R}^n)^A \\ \langle f(c)|_A, g(c) \rangle \geq 0 \end{cases}$$

La condition portant sur le produit scalaire est évidemment fermée. La condition de colinéarité est équivalente à la nullité de tous les déterminants mineurs d'ordre 2 des deux vecteurs de $(\mathbf{R}^n)^A$; cette condition est donc fermée. On en déduit $\overline{i(C_X^0)} \subset F$. ■

Définition 3.7. Nous appellerons arborescence de parties de X tout ensemble \mathcal{S} de parties de X vérifiant les propriétés suivantes :

- $X \in \mathcal{S}$
- $\forall A \in \mathcal{S}, \sharp A \geq 2$
- $\forall A, B \in \mathcal{S}, A \cap B = \emptyset, A \text{ ou } B$

Proposition 3.8. Soit \mathcal{S} une arborescence de parties de X . Les éléments de \mathcal{S} peuvent être vus comme les sommets d'un arbre orienté remplissant les conditions suivantes :

- Le sommet initial de l'arbre est la partie X .
- Pour tout sommet A non terminal de l'arbre, les ensembles correspondant aux descendants de A (i.e. les sommets extrémité d'une arête issue de A) sont tous inclus dans A , sont de cardinal ≥ 2 , et sont disjoints deux à deux.

D'autre part, il y a une correspondance bijective entre les arborescences de parties de X et les arbres orientés décrits ci-dessus.

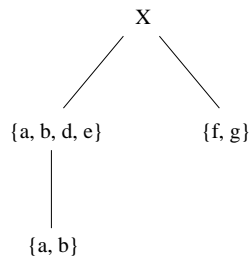
Démonstration. Si l'on se donne une arborescence \mathcal{S} de parties de X , la relation d'inclusion permet de reconstituer un arbre orienté qui satisfait les propriétés ci-dessus. Réciproquement, à un arbre orienté satisfaisant les conditions précédentes, on associe une arborescence en considérant simplement l'ensemble des sommets de cet arbre. Il n'est pas difficile de voir que le procédé ainsi défini est bijectif. ■

Définition 3.9. À tout élément de F , nous allons associer une arborescence \mathcal{S} de parties de X . Soit $c \in F$.

- Si c_X est injective, la condition 5 implique $c = i(c_X)$. Donc $c \in i(C_X^0)$, autrement dit c appartient à l'espace de départ des configurations injectives. Pour une telle configuration on pose comme arborescence : $\mathcal{S} = \{X\}$.
- Sinon, on écrit $X = X_1 \sqcup \dots \sqcup X_r$, où les X_j ($1 \leq j \leq r$) sont les parties maximales sur lesquelles c_X est constante (on parle de partition de X suivant les préimages de c_X). Pour tous les $j \in [1, r]$ tels que $\#X_j \geq 2$, on note \mathcal{S}_j l'arborescence obtenue récursivement en considérant la partie X_j . Par définition \mathcal{S} est constituée de X et de la réunion des \mathcal{S}_j . Ainsi \mathcal{S} se présente sous la forme

$$\mathcal{S} = \{X, X_{j_1}, \dots, X_{j_m}, \dots\}$$

Exemple 3.10. Reprenons le cas de l'exemple 3.4. L'arborescence associée à la configuration limite c est la suivante :



Arborescence \mathcal{S} associée à c

Remarque. De manière plus générale, si c est un élément de F quelconque, c_A s'interprète comme une vue de c à l'échelle A . Le corollaire 3.17 montrera que c s'écrit comme une limite d'injections $\gamma_p \in C_X^0$ bien choisies. Cela fournira une interprétation géométrique du compactifié $i(C_X^0)$.

Définition 3.11. Soit \mathcal{S} une arborescence de parties de X . Soit $B \in \mathcal{S}$ ($B \subset X$). On désignera par B/S le quotient de B par la relation d'équivalence

$$\forall x, y \in B \quad x \sim y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \text{ou} \\ \exists C \in \mathcal{S}, \quad \{x, y\} \subset C \subsetneq B \end{cases}$$

Remarque. B/S est donc une partition de B en sous-ensembles non vides. En fait, cette partition n'est rien d'autre que la partition de B suivant les préimages de c_B (c'est la partition $B = B_1 \sqcup \dots \sqcup B_r$ utilisée plus haut lors de la définition de \mathcal{S}). On a toujours $\sharp(B/S) \geq 2$.

On peut aussi interpréter B/S en termes de l'arbre associé à \mathcal{S} . Soit en effet $\bar{\mathcal{A}}$ l'arbre associé à l'arborescence \mathcal{S} , auquel on a rajouté tous les singletons (voir figure). Alors B/S n'est rien d'autre que l'ensemble des descendants de B dans l'arbre $\bar{\mathcal{A}}$.

L'intérêt d'introduire de tels ensembles B/S apparaît dans la proposition suivante:

Proposition 3.12. F est en bijection avec

$$\bigsqcup_{\mathcal{S} \text{ arborescence}} \prod_{B \in \mathcal{S}} C_{B/S}^0$$

Démonstration. Soit $c \in F$. Nous avons déjà associé à c l'arborescence \mathcal{S} . Soit $B \in \mathcal{S}$. Par définition de l'arborescence \mathcal{S} , l'application $c_B \in C^B$ induit une injection de B/S dans \mathbf{R}^n (modulo \mathcal{R}), autrement dit un élément de $C_{B/S}^0$. Nous disposons donc d'une famille d'éléments de $C_{B/S}^0$, B variant dans \mathcal{S} .

Il reste à montrer que la donnée de l'arborescence \mathcal{S} et d'une famille $(i_B)_{B \in \mathcal{S}}$, avec $i_B \in C_{B/S}^0$, permet de reconstituer $c \in F$. Soit $A \subset X$, $\sharp A \geq 2$. Soit B le plus petit élément de \mathcal{S} contenant A . Modulo \mathcal{R} , on peut voir i_B comme une application de B dans \mathbf{R}^n , constante sur les descendants de B , mais non constante sur A (par définition de B). La restriction de i_B à A fournit donc un élément $c_A \in C^A$. Nous avons ainsi construit $c \in H$. Il n'est pas difficile de voir que c est dans F . On vérifie également que la correspondance obtenue entre F et $\bigsqcup_{\mathcal{S}} \prod_{B \in \mathcal{S}} C_{B/S}^0$ est bijective. ■

La proposition suivante est un premier pas vers la structure de variété de F :

Proposition 3.13. Soit $c \in F$ et \mathcal{S} l'arborescence associée à c . Il existe un voisinage V de c dans F et un homéomorphisme

$$h_c : \prod_{A \in \mathcal{S}} U_A \times \prod_{A \in \mathcal{S}, A \neq X} [0, \epsilon[\rightarrow V$$

où U_A est un ouvert de $C_{A/S}^0$ et ϵ est un réel > 0 .

Démonstration. Notons $(i_A)_{A \in \mathcal{S}}$ la famille d'injections associée à c . On a donc $i_A \in C_{A/S}^0$. Nous allons prendre pour U_A un voisinage de i_A dans $C_{A/S}^0$. Nous définirons dans un premier temps une application

$$\begin{aligned} \Phi : \prod_{A \in \mathcal{S}} C_{A/S}^0 \times \prod_{A \in \mathcal{S}, A \neq X} [0, +\infty[&\rightarrow \prod_{A \in \mathcal{S}} C^A \\ ((i'_A)_{A \in \mathcal{S}}, (\lambda_A)_{A \in \mathcal{S}, A \neq X}) &\mapsto (\gamma_A)_{A \in \mathcal{S}} \end{aligned}$$

Dans un deuxième temps, nous montrerons que pour i'_A suffisamment proche de i_A et λ_A suffisamment proche de 0, les applications γ_A (issues de Φ) sont les composantes d'un élément $c' \in F$. Nous aurons alors défini notre application h_c .

Dans un troisième temps, nous montrerons que h_c admet un inverse continu, et que l'image de h_c est un voisinage de c dans F .

Donnons-nous donc une famille $(i'_A)_{A \in \mathcal{S}}$, avec $i'_A \in C_{A/S}^0$, et une famille $(\lambda_A)_{A \in \mathcal{S}, A \neq X}$, avec $\lambda_A \in [0, +\infty[$. Pour abrégier, nous noterons $i' = (i'_A)_A$ et $\lambda = (\lambda_A)_A$.

Commençons par choisir arbitrairement, pour tout $A \in \mathcal{S}$, un élément "privilegié" appartenant à A/S . Ce choix étant fait, on constate que l'on dispose, pour tout $A \in \mathcal{S}$, d'un élément privilégié $a \in A$ (en procédant de manière récursive).

Définissons maintenant γ_A de manière récursive, en partant du bas de l'arborescence \mathcal{S} .

Si $A \in \mathcal{S}$ est minimal pour la relation d'inclusion, nous posons

$$\gamma_A = i'_A \in C_{A/S}^0 = C_A^0 \subset C^A$$

Soit maintenant $A \in \mathcal{S}$ tel que γ_B a été défini pour toutes les parties $B \in \mathcal{S}$ strictement incluses dans A .

A/S constitue une partition de A en sous-ensembles non vides; notons A_1, \dots, A_r ceux qui sont de cardinal ≥ 2 . Soit a, a_1, \dots, a_r les éléments privilégiés respectifs de A, A_1, \dots, A_r . Comme $i'_A \in C_{A/S}^0 \subset C^A$, nous pouvons considérer le représentant $\Phi_{A,a}(i'_A) \in (\mathbf{R}^n)^A$. Nous avons également des représentants $\Phi_{A_j, a_j}(\gamma_{A_j}) \in (\mathbf{R}^n)^{A_j}$. Nous étendons ces éléments à $(\mathbf{R}^n)^A$ en les déclarant nuls hors de A_j . Nous pouvons désormais poser

$$\gamma_A = [\Phi_{A,a}(i'_A) + \sum_{j=1}^r \lambda_{A_j} \Phi_{A_j, a_j}(\gamma_{A_j})]_{\mathcal{R}} \quad (6)$$

Le paramètre λ_{A_j} indique la taille relative, dans la configuration que l'on cherche à construire, de A_j par rapport à A . Lorsque $\lambda_{A_j} = 0$, il y a "collapse" des points de A_j .

Il convient de voir que $\gamma_A \in C^A$. A/S possède au moins deux éléments B_1, B_2 . Si b_1, b_2 sont leurs éléments privilégiés, on constate que la formule 6 servant à définir γ_A ne prend pas les mêmes valeurs en b_1 et b_2 . Ainsi γ_A est non constante et appartient à C^A .

Nous venons ainsi de construire Φ . D'après la formule 6, Φ est continue.

Nous arrivons au deuxième point : montrer que les γ_A sont les composantes d'un élément $c' \in F$ (pour un bon choix de U_A et de ϵ). Nous énonçons pour cela le lemme suivant :

Lemme 3.14. *Si les composantes γ_A ($A \in \mathcal{S}$) vérifient la condition de restriction*

$$\forall A, B \in \mathcal{S}, A \subset B, \gamma_B|_A \text{ est constante ou est égale à } \gamma_A,$$

et si γ_A sépare les éléments de A/\mathcal{S} , i.e.

$$B, B' \in A/\mathcal{S} \quad B \neq B' \Rightarrow \tilde{\gamma}_A(B) \cap \tilde{\gamma}_A(B') = \emptyset$$

alors les γ_A définissent un élément de F .

Démontrons ce lemme. Si D est une partie quelconque de X de cardinal ≥ 2 , on définit A comme le plus petit élément de \mathcal{S} contenant D , et on pose $\gamma_D = \gamma_A|_D$. On a $\gamma_D \in C^D$ car D a une intersection non vide avec au moins deux éléments de A/\mathcal{S} (définition de A) et γ_A sépare les éléments de A/\mathcal{S} . Les composantes $(\gamma_D)_{D \subset X, \#D \geq 2}$ ainsi définies vérifient encore la condition de restriction 5; par conséquent elles définissent un élément de F .

Nous appliquons ce lemme à la famille (γ_A) issue de Φ . Il est évident par construction que les γ_A vérifient la condition de restriction.

Il reste à montrer que pour un bon choix de U_A et de ϵ , γ_A sépare les éléments de A/\mathcal{S} .

Observons déjà que cela est vrai lorsque $(\gamma_A) = \Phi(i, 0)$: on a alors $\gamma_A = i_A$.

Soit $A \in \mathcal{S}$ fixée. Soit α'_A la plus petite distance entre deux images distinctes de $\Phi_{A,a}(i'_A)$, alors la condition $\epsilon \leq \alpha'_A/2$ entraîne que γ_A sépare les éléments de A/\mathcal{S} . Mais cette condition sur ϵ dépend encore de i'_A . Notons α_A la plus petite distance entre deux images distinctes de $\Phi_{A,a}(i_A)$, alors en posant

$$U_A = \{i'_A \in C^0_{A/\mathcal{S}} \mid \alpha'_A > \frac{\alpha_A}{2}\} \text{ et } \epsilon = \min_{A \in \mathcal{S}} \frac{\alpha_A}{4},$$

nous avons bien que γ_A sépare les éléments de A/\mathcal{S} quelles que soient les familles (i'_A) et (λ_A) .

Pour ce choix de U_A et de ϵ , et d'après le lemme, les γ_A définissent un élément de F . On note

$$h_c : \prod_{A \in \mathcal{S}} U_A \times \prod_{A \in \mathcal{S}, A \neq X} [0, \epsilon[\rightarrow F$$

$$(i', \lambda) \mapsto c'$$

l'application obtenue. Il est clair que h_c est continue.

Nous avons maintenant besoin du lemme suivant :

Lemme 3.15. *Si $c' = h_c(i', \lambda)$, alors l'arborescence $\mathcal{S}(c')$ associée à c' s'obtient à partir de \mathcal{S} de la manière suivante :*

$$\mathcal{S}(c') = \mathcal{S} \setminus \{A/\lambda_A \neq 0\}$$

Remarque. Vue en tant qu'arborescence, $\mathcal{S}(c')$ s'obtient à partir de \mathcal{S} en supprimant les sommets A tels que $\lambda_A \neq 0$, et en faisant "remonter" leurs descendants.

Pour démontrer ce lemme, nous fixerons (i', λ) et nous noterons γ_A les composantes de $\Phi(i', \lambda)$.

En utilisant le fait que γ_A sépare les éléments de A/\mathcal{S} , on obtient que $\mathcal{S}(c') \subset \mathcal{S}$.

Posons $\mathcal{S}' = \mathcal{S} \setminus \{A/\lambda_A \neq 0\}$. Soit $B \in \mathcal{S}'$. Montrons que γ_B est en fait dans $C_{B/\mathcal{S}'}^0$. Soient $a_1, a_2 \in B$ représentant le même élément de B/\mathcal{S}' . Il existe donc $A \in \mathcal{S}'$ strictement incluse dans B , contenant a_1 et a_2 . On a ainsi $\lambda_A = 0$. De plus, si $C \in \mathcal{S}$ est telle que $A \subsetneq C \subset B$, alors a_1 et a_2 ont même image par i'_C , puisque a_1 et a_2 représentent le même élément de C/\mathcal{S}' (par définition) et que C/\mathcal{S}' est quotient de C/\mathcal{S} . En examinant la formule 6 servant à définir γ_B , on obtient (récursivement) que a_1 et a_2 ont même image par γ_B .

Soient maintenant $a_1, a_2 \in B$ représentant des éléments différents dans B/\mathcal{S}' ; nous voulons montrer que γ_B sépare a_1 et a_2 . Soit A le plus petit élément de \mathcal{S} contenant a_1 et a_2 . On a $A \subset B$. Si $A = B$, alors a_1 et a_2 représentent des éléments distincts dans B/\mathcal{S} ; comme γ_B sépare les éléments de B/\mathcal{S} , on obtient alors que γ_B sépare a_1 et a_2 . Sinon, on sait quand même que γ_A sépare les éléments de A/\mathcal{S} , donc γ_A sépare a_1 et a_2 . Or, d'après la formule (1), γ_B s'obtient à partir de γ_A par un nombre fini d'homothéties ≥ 0 et translations. Comme le plus petit élément de \mathcal{S}' contenant a_1 et a_2 est B , les homothéties sont de rapport non nul. Donc γ_B sépare a_1 et a_2 .

Cela achève de démontrer le lemme.

Le troisième point consiste à trouver un inverse continu à h_c . Supposons donc que c' est "proche" de c dans F (dans un sens que l'on déterminera plus tard) et essayons de trouver (i', λ) tel que $c' = h_c(i', \lambda)$.

Soit $A \in \mathcal{S}$. Notons a_1, \dots, a_r les éléments privilégiés des éléments de A/\mathcal{S} . En nous inspirant de la formule 6, nous posons

$$i'_A = c'_A|_{\{a_1, \dots, a_r\}} \quad (7)$$

Il est clair qu'il existe un voisinage W_1 de c dans F tel que $c' \in W_1 \Rightarrow i'_A \in U_A$.

Soit $A_1 \in \mathcal{S}, A_1 \neq X$. On note A le plus petit élément de \mathcal{S} contenant strictement A_1 (il n'est pas gênant ici de garder les notations de la formule 6). Supposons d'abord avoir trouvé λ tel que $c' = h_c(i', \lambda)$. D'après la formule 6,

$$\Phi_{A,a}(c'_A) \text{ et } \Phi_{A,a}(i'_A) + \sum_{j=1}^r \lambda_{A_j} \Phi_{A_j,a_j}(c'_{A_j})$$

sont deux représentants du même élément $c'_A \in C^A$. Nous utilisons ensuite le lemme élémentaire suivant :

Lemme 3.16. *Soient $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ deux représentants du même élément $\gamma \in C^A$. Soit x, y, z, t des points de A tels que x et y ont des images distinctes par γ .*

Alors

$$\frac{\|\tilde{\gamma}_1(t) - \tilde{\gamma}_1(z)\|}{\|\tilde{\gamma}_2(y) - \tilde{\gamma}_2(x)\|} = \frac{\|\tilde{\gamma}_2(t) - \tilde{\gamma}_2(z)\|}{\|\tilde{\gamma}_2(y) - \tilde{\gamma}_2(x)\|}$$

($\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de \mathbf{R}^n).

Soit $b_1 \in A_1$ tel que $b_1 \neq a_1$ dans A_1/S . Soit également $b \in A$ l'élément privilégié d'un élément de A/S autre que A_1 . En appliquant le lemme aux deux représentants de c'_A décrits ci-dessus et avec les points $x = b, y = a_1, z = a_1, t = b_1$, on constate que l'on obtient une formule (non explicitée ici) donnant λ_{A_1} en fonction de c'_A, i'_A et c'_{A_1} .

En récapitulant, nous avons défini une application continue $g : c' \mapsto (i', \lambda)$, d'un voisinage de c dans F , à valeurs dans $\prod_{A \in \mathcal{S}} C_{A/S}^0 \times \prod_{A \in \mathcal{S}, A \neq X} [0, +\infty[$. Comme cette application est continue et envoie c sur $(i, 0)$, on en déduit qu'il existe un voisinage W de c dans F tel que $c' \in W \Rightarrow \lambda \in [0, \epsilon]$.

Un calcul montre que g et h_c sont bien inverses l'une de l'autre. On en déduit que h_c réalise un homéomorphisme entre un voisinage de c dans F et $\prod_{A \in \mathcal{S}} U_A \times \prod_{A \in \mathcal{S}, A \neq X} [0, \epsilon]$. Cela achève la démonstration de la proposition. ■

Comme corollaire de la proposition précédente, nous avons :

Corollaire 3.17. $\overline{i(C_X^0)} = F$

Démonstration. L'inclusion directe a été montrée en 3.6. Soit $c \in F$, on a

$$c \in h_c\left(\prod U_A \times \prod [0, \epsilon]\right) \subset \overline{h_c\left(\prod U_A \times \prod [0, \epsilon]\right)}$$

Or, d'après le lemme 3.15, l'arborescence associée à un élément de $h_c(\prod U_A \times \prod [0, \epsilon])$ est l'arborescence réduite à $\{X\}$. Donc

$$c \in \overline{i(C_X^0)} \quad \blacksquare$$

Théorème 3.18. $\overline{i(C_X^0)} = F$ est une variété à coins différentiable compacte. Son bord ∂F est réunion disjointe, indexée par les arborescences $\mathcal{S} \neq \{X\}$, de variétés lisses sans bord, de codimension $(\#\mathcal{S} - 1)$ dans F .

Démonstration. Soit $c \in F$. La proposition 3.13 fournit clairement un homéomorphisme entre un voisinage V de c dans F et un ouvert d'un espace du type $\mathbf{R}^p \times [0, +\infty[^q$. Nous considérerons l'atlas constitué des h_c , pour $c \in F$.

Montrons que les changements de carte locale sont différentiables. Soient $c, c' \in F$. On note V, V' les voisinages respectifs de c, c' dans F , et $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ les arborescences respectivement associées à c, c' . On note aussi $h : \Omega_{\mathcal{S}} \rightarrow V$ et $h' : \Omega_{\mathcal{S}'} \rightarrow V'$ les cartes locales en c, c' , avec

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathcal{S}} &= \prod_{A \in \mathcal{S}} U_A \times \prod_{A \in \mathcal{S}, A \neq X} [0, \epsilon[\\ \Omega_{\mathcal{S}'} &= \prod_{A \in \mathcal{S}'} U'_A \times \prod_{A \in \mathcal{S}', A \neq X} [0, \epsilon'[\end{aligned}$$

Le changement de carte est défini d'un ouvert Ω de $\Omega_{\mathcal{S}}$ dans un ouvert Ω' de $\Omega_{\mathcal{S}'}$.

Il suffit de montrer le résultat dans le cas où $c' \in V$. Remarquons qu'alors $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$.

Le changement de carte est décrit par la composée

$$\Omega \rightarrow V \cap V' \rightarrow \Omega'$$

Or, $V \cap V' \subset F \subset H$ et nous pouvons utiliser la structure différentiable naturelle de $H = \prod_{A \subset X, \#A \geq 2} C^A$.

D'une part, l'application $h : \Omega \rightarrow H$ est de classe C^∞ d'après la formule 6.

D'autre part, soit $c'' \in V \cap V'$. Considérons l'application $(h')^{-1} : V \cap V' \rightarrow \Omega'$ au voisinage de c'' . D'après la démonstration de la proposition précédente, $(h')^{-1}$ est la restriction d'une application $U \rightarrow \Omega'$ de classe C^∞ , où U est un voisinage de c'' dans H (il s'agit de l'application que nous avons noté $g : c' \mapsto (i', \lambda)$).

Par composition, le changement de carte est de classe C^∞ . ■

Exemple 3.19. Prenons le cas $n = 1$. Lorsque $\#X = 2$, $\overline{i(C_X^0)}$ est la sphère de dimension 0. Lorsque $\#X = 3$, on trouve que $\overline{i(C_X^0)}$ est la réunion disjointe de 6 segments $[0, 1]$. Enfin, lorsque $\#X = 4$, on trouve que $\overline{i(C_X^0)}$ est la réunion disjointe de 24 pentagones (compacts).

3.2 Espaces de configurations d'un nœud

Nous allons maintenant compactifier l'espace $\Omega_{G,K}$ des configurations injectives, associé au diagramme G et au nœud K .

Définition 3.20. On note \overline{G} le graphe obtenu à partir de G en rajoutant des arêtes entre toutes les paires de sommets univalents consécutifs (ce graphe correspond au graphe en trait plein et trait pointillé de l'exemple 1.16). On note $\mathcal{A} = \{A \subset V \mid A \text{ connexe dans } \overline{G} \text{ et } \#A \geq 2\}$

Définition 3.21. Soit i l'application

$$\begin{aligned} i : \Omega_{G,K} &\rightarrow (S^1)^U \times (S^3)^T \times \prod_{A \in \mathcal{A}} C^A \\ (s, p) &\mapsto (s, p, c = (c_A)_{A \in \mathcal{A}}) \end{aligned}$$

où S^3 est le compactifié d'Alexandroff de \mathbf{R}^3 et où c_A est obtenu en projetant dans C^A l'injection $V \rightarrow \mathbf{R}^3$ issue de $K \circ s$ et p .

On appelle espace de configurations associé à G et K , et on note $\mathcal{C}_{G,K}$, l'espace $\overline{i(\Omega_{G,K})}$, où l'adhérence est prise dans $(S^1)^U \times (S^3)^T \times \prod_{A \in \mathcal{A}} C^A$.

Cette définition appelle la justification suivante :

Proposition 3.22. i est injective et réalise un homéomorphisme sur son image.

Démonstration. Le fait que i est continue ne pose pas de problème. D'autre part, i est clairement injective. Enfin, $i^{-1} : i(\Omega_{G,K}) \rightarrow \Omega_{G,K}$ est la restriction de la projection naturelle $(S^1)^U \times (\mathbf{R}^3)^T \times \prod_{A \in \mathcal{A}} C^A \rightarrow (S^1)^U \times (\mathbf{R}^3)^T$, qui est continue. Ainsi i réalise un homéomorphisme sur son image. ■

Le résultat principal est le suivant :

Théorème 3.23. $\mathcal{C}_{G,K} = \overline{i(\Omega_{G,K})}$ est une variété à coins différentiable compacte.

La démonstration de ce théorème est similaire à celle faite dans le cas des injections de X dans \mathbf{R}^n , mais est plus technique en raison de la présence du nœud qui “impose” une échelle particulière.

Donnons quelques éléments nécessaires à la démonstration de ce théorème.

Définition 3.24 (Arborescence associée à $x \in \mathcal{C}_{G,K}$). Pour tout $x \in \mathcal{C}_{G,K}$, on définit une arborescence \mathcal{S} de parties de V en procédant ainsi :

- On pose $V \in \mathcal{S}$.
- Soient V_1, \dots, V_r les composantes connexes dans \overline{G} des parties maximales sur lesquelles c_V est constante. Pour tous les $j \in \{1, \dots, r\}$ tels que $\#V_j \geq 2$, on pose $V_j \in \mathcal{S}$.
- On procède de la même manière, récursivement, avec les c_{V_j} , pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$ tel que $\#V_j \geq 2$.

De la même manière que dans le cas des injections de X dans \mathbf{R}^n , \mathcal{S} est l'arborescence des “échelles” de la configuration x . Remarquons que $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$.

Définition 3.25 (Partition des univalents associée à $x \in \mathcal{C}_{G,K}$). Pour tout $x \in \mathcal{C}_{G,K}$, on définit une partition \mathcal{P} de l'ensemble U des sommets univalents, comme étant la partition de U suivant les préimages de $s : U \rightarrow S^1$.

Remarque. \mathcal{P} est toujours une partition en sommets univalents consécutifs.

Soit $U_{\mathcal{S}}$ le plus petit élément de \mathcal{S} contenant U . Si \mathcal{P} n'est pas la partition triviale $\{U\}$ (autrement dit si s n'est pas constante), alors $U_{\mathcal{S}} \in \mathcal{S}$ est l'échelle du nœud : c'est le seul sommet A de \mathcal{S} tel que c_A soit visualisée à l'échelle du nœud. Plus précisément, si $A \in \mathcal{S}$ est strictement inclus dans $U_{\mathcal{S}}$ (i.e. l'échelle de A est située en dessous de l'échelle du nœud), alors $c_A|_{A \cap U}$ (du moins pour $\#(A \cap U) \geq 2$) doit être portée par une droite parallèle à la tangente au nœud au point du collapse, et l'ordre des points de $A \cap U$ sur cette droite est donné par l'ordre cyclique sur U .

Grossièrement, une configuration proche d'une configuration limite $x \in \mathcal{C}_{G,K}$ est décrite par ses valeurs aux échelles représentatives (correspondant aux éléments de \mathcal{S}_x) et les paramètres $\lambda \geq 0$ décrivant les rapports d'échelle (avec éventuellement, lorsque \mathcal{P}_x est triviale, le paramètre ≥ 0 correspondant à l'échelle du nœud).

Le nombre des paramètres ≥ 0 indique la codimension de la face dans laquelle se trouve x .

On partitionne ensuite $\mathcal{C}_{G,K}$ en strates indexées par les couples $(\mathcal{S}, \mathcal{P})$ où \mathcal{S} est une arborescence de parties de V et \mathcal{P} est une partition de U . La codimension de la strate $(\mathcal{S}, \mathcal{P})$ dans $\mathcal{C}_{G,K}$ vaut

- $\#\mathcal{S} - 1$ si \mathcal{P} est non triviale.
- $\#\mathcal{S} - 1$ ou $\#\mathcal{S}$ si \mathcal{P} est triviale.

Définition 3.26 (Espace de configurations associé à une isotopie). Soit G un diagramme uni-trivalent et K une isotopie reliant les nœuds K_0 et K_1 . $\Omega_{G,K}$ est l'espace des configurations injectives associé à G et K . C'est un ouvert de $(S^1)^U \times (\mathbf{R}^3)^T \times [0, 1]$. On note i_t l'injection de Ω_{G,K_t} dans \mathcal{C}_{G,K_t} . Soit i l'application

$$\begin{aligned} i : \Omega_{G,K} &\rightarrow (S^1)^U \times (S^3)^T \times \prod_{A \in \mathcal{A}} C^A \times [0, 1] \\ (s, p, t) &\mapsto (i_t(s, p), t) \end{aligned}$$

On appelle espace de configurations associé au diagramme G et à l'isotopie K , et on note $\mathcal{C}_{G,K}$, l'espace

$$\mathcal{C}_{G,K} = \overline{i(\Omega_{G,K})}$$

où l'adhérence est prise dans $(S^1)^U \times (S^3)^T \times \prod_{A \in \mathcal{A}} C^A \times [0, 1]$.

Proposition 3.27. Pour tout $t \in [0, 1]$, l'espace Ω_{G,K_t} est difféomorphe à Ω_{G,K_0} . L'espace $\Omega_{G,K}$ est difféomorphe à $\Omega_{G,K_0} \times [0, 1]$.

Démonstration. L'isotopie de nœuds K s'étend en une isotopie de difféomorphismes $H : \mathbf{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^3$ vérifiant

- H_0 est l'identité de \mathbf{R}^3 .
- $K_t = H_t \circ K_0$.
- $\exists C \subset \mathbf{R}^3$ compact tel que $\forall t \in [0, 1]$, H_t est l'identité hors de C .

Alors H_t induit de façon naturelle un difféomorphisme de Ω_{G,K_0} dans Ω_{G,K_t} . On obtient également ainsi le difféomorphisme entre $\Omega_{G,K}$ et $\Omega_{G,K_0} \times [0, 1]$. ■

On admet le résultat suivant :

Proposition 3.28. Le difféomorphisme $\Omega_{G,K_0} \rightarrow \Omega_{G,K_t}$ défini en 3.27 s'étend en un difféomorphisme $\mathcal{C}_{G,K_0} \rightarrow \mathcal{C}_{G,K_t}$.

Définition 3.29 (Espace de configurations associé à un nœud vertical K_0). Soit G un diagramme uni-trivalent dessiné sur \mathbf{R} et K_0 un nœud vertical. Ω_{G,K_0} est l'espace des configurations injectives associé à G et K_0 . C'est un ouvert de $\mathbf{R}^U \times (\mathbf{R}^3)^T$. Soit i l'application

$$\begin{aligned} i : \Omega_{G,K_0} &\rightarrow \overline{\mathbf{R}}^U \times (S^3)^T \times \prod_{A \in \mathcal{A}} C^A \\ (s, p) &\mapsto (s, p, c) \end{aligned}$$

où $\overline{\mathbf{R}} = [-\infty, +\infty]$ et où les composantes de c sont obtenues à partir de $K \circ s$ et p .

On appelle espace de configurations associé au diagramme G et au nœud vertical K_0 , et on note \mathcal{C}_{G, K_0} , l'espace

$$\mathcal{C}_{G, K_0} = \overline{i(\Omega_{G, K_0})}$$

où l'adhérence est prise dans $\overline{\mathbf{R}}^U \times (S^3)^T \times \prod_{A \in \mathcal{A}} C^A$.

4 Démonstration du théorème 2.1

Achevons la preuve du théorème 2.1. Nous gardons les notations du paragraphe 2.1. Il s'agit de montrer

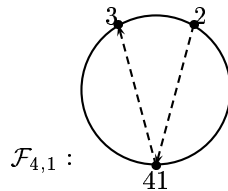
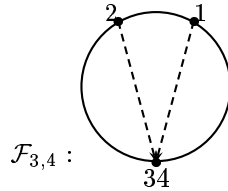
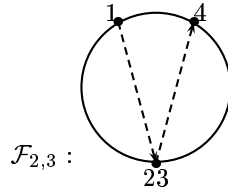
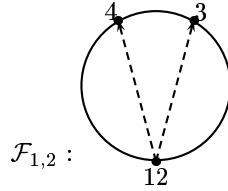
$$\frac{1}{3}I_{\oplus}(K_0) - \frac{1}{4}I_{\otimes}(K_0) = \frac{1}{3}I_{\oplus}(K_1) - \frac{1}{4}I_{\otimes}(K_1)$$

D'après la formule 4, il suffit de montrer que le tiers de la contribution du bord latéral de $\mathcal{C}_{\oplus, K_0}$ est égal au quart de la contribution du bord latéral de $\mathcal{C}_{\otimes, K_0}$. Or, d'après la proposition 2.11, l'aire recouverte par $\psi(\partial_L \mathcal{C}_{G, K})$ sur $(S^2)^E$ s'écrit

$$\sum_{F \text{ face de } \mathcal{C}_{G, K_0}} \int_{\overline{\mathcal{F}} \times [0,1]} \psi^* \Omega$$

La quantité $\int_{\overline{\mathcal{F}} \times [0,1]} \psi^* \Omega$ est appelée *contribution* de la face \mathcal{F} .

Considérons dans un premier temps l'espace $\mathcal{C}_{\otimes, K_0}$. Il possède exactement 12 faces essentielles que nous pouvons schématiser ainsi :



On a de même des faces essentielles $\mathcal{F}_{123}, \mathcal{F}_{234}, \mathcal{F}_{341}, \mathcal{F}_{412}$ correspondant à un collapse de 3 sommets, et des faces essentielles $\mathcal{F}_{1234}, \mathcal{F}_{2341}, \mathcal{F}_{3412}, \mathcal{F}_{4123}$ correspondant à un collapse des 4 sommets. Pour les faces \mathcal{F} faisant intervenir 4 sommets, on a $\text{codim}(\psi(\overline{\mathcal{F}} \times [0, 1])) = 2$, et pour les faces \mathcal{F} faisant intervenir 3 sommets, la structure de l'espace de configuration montre qu'en tout point $x \in \mathcal{F} \times [0, 1]$, $d\psi_x$ est non inversible; donc la contribution de la face est nulle (par le théorème de Sard).

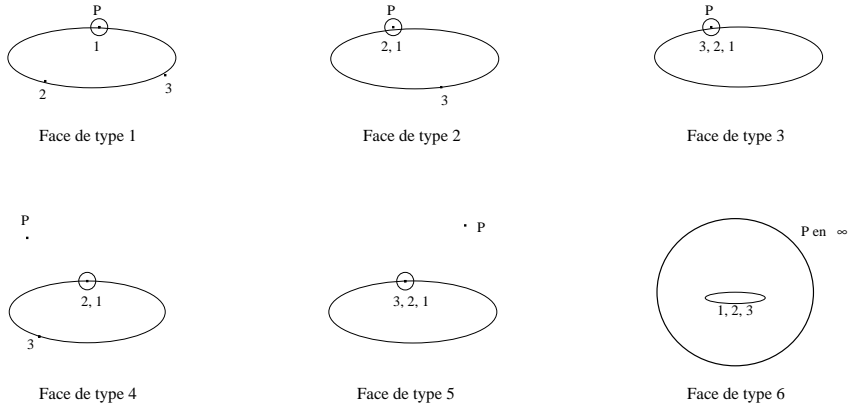
Montrons que les contributions des faces $\mathcal{F}_{1,2}, \mathcal{F}_{2,3}, \mathcal{F}_{3,4}, \mathcal{F}_{4,1}$ sont égales. La permutation suivante des sommets univalents

$$\sigma : 1, 2, 3, 4 \mapsto 2, 3, 4, 1$$

induit pour tout $i \in \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ un difféomorphisme $q : \mathcal{F}_{i,i+1} \rightarrow \mathcal{F}_{i+1,i+2}$. σ étant une permutation impaire, ce difféomorphisme renverse l'orientation. De plus, σ transforme les arêtes orientées (13) et (24) en les arêtes (24) et (31). En conséquence $\psi \circ q = r \circ \psi$, où r envoie $(v_1, v_2) \in (S^2)^2$ sur $(-v_2, v_1) \in (S^2)^2$ (nous avons ici choisi d'ordonner les arêtes de la manière suivante : (13), (24)). Comme r est un difféomorphisme renversant l'orientation et préservant la mesure de $(S^2)^2$, on en déduit

$$\begin{aligned} \int_{\overline{\mathcal{F}_{i+1,i+2}} \times [0,1]} \psi^* \Omega &= - \int_{\overline{\mathcal{F}_{i,i+1}} \times [0,1]} (\psi \circ q)^* \Omega = - \int_{\overline{\mathcal{F}_{i,i+1}} \times [0,1]} (r \circ \psi)^* \Omega \\ &= \int_{\overline{\mathcal{F}_{i,i+1}} \times [0,1]} \psi^* \Omega \end{aligned}$$

Considérons maintenant l'espace $\mathcal{C}_{\otimes, K_0}$. Il possède exactement 16 faces qui se regroupent en 6 types :



Pour $1 \leq k \leq 5$, il y a exactement 3 faces de type k (correspondant aux trois permutations circulaires de 1, 2, 3). Par un argument similaire à celui utilisé pour le diagramme \otimes , les contributions de ces 3 faces sont égales (les permutations circulaires de 1, 2, 3 sont paires).

Pour $1 \leq k \leq 6$, on notera \mathcal{F}_k la face de type k représentée ci-dessus.

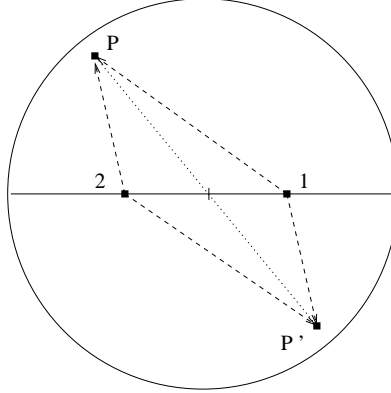
Montrons que les contributions des faces $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4, \mathcal{F}_5, \mathcal{F}_6$ sont nulles.

Pour $k = 4, 5, 6$, cela vient du fait que $\psi(\overline{\mathcal{F}_k} \times [0, 1])$ est inclus dans le lieu de $(S^2)^3$ décrit par l'égalité d'au moins deux des trois composantes. Ce lieu est de codimension 2 donc de mesure nulle.

$\psi(\overline{\mathcal{F}_3} \times [0, 1])$ est inclus dans le lieu de $(S^2)^3$ décrit par la coplanarité des trois arêtes. Ce lieu est de codimension 1; donc la contribution de \mathcal{F}_3 est nulle.

Pour $k = 2$, introduisons la symétrie suivante :

$$\begin{aligned} q : \mathcal{F}_2 &\rightarrow \mathcal{F}_2 \\ (1, 2, 3, P) &\mapsto (1, 2, 3, P') \end{aligned}$$



q est un difféomorphisme de \mathcal{F}_2 . Ce difféomorphisme renverse l'orientation car les sommets univalents 1, 2, 3 sont inchangés et le sommet trivalent P subit une symétrie par rapport à un point. Mais $\psi \circ q = r \circ \psi$, où r envoie $(v_1, v_2, v_3) \in (S^2)^3$ sur $(-v_2, -v_1, v_3) \in (S^2)^3$ (l'ordre choisi sur les arêtes est $(1P), (2P), (3P)$). r est un difféomorphisme préservant l'orientation et la mesure de $(S^2)^3$. Ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\overline{\mathcal{F}_2} \times [0, 1]} \psi^* \Omega &= - \int_{\overline{\mathcal{F}_2} \times [0, 1]} (\psi \circ q)^* \Omega = - \int_{\overline{\mathcal{F}_2} \times [0, 1]} (r \circ \psi)^* \Omega \\ &= - \int_{\overline{\mathcal{F}_2} \times [0, 1]} \psi^* \Omega \end{aligned}$$

En conséquence la contribution de la face \mathcal{F}_2 est nulle.

À ce stade, il reste à montrer que la contribution de la face \mathcal{F}_1 égale la contribution de la face $\mathcal{F}_{1,2}$.

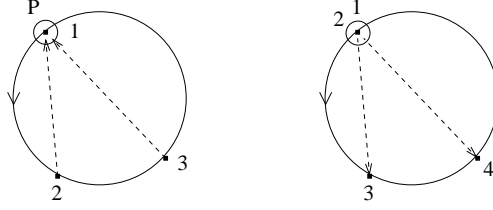
D'après les résultats de la partie 3, \mathcal{F}_1 est décrit par les paramètres suivants :

$$\text{la direction } v \text{ de l'arête } (1P), \quad s_1, s_2, s_3 \in S^1$$

et $S^2 \times \mathcal{F}_{1,2}$ par les paramètres suivants

$$v \in S^2, \quad s'_1, s'_3, s'_4 \in S^1$$

Une correspondance évidente fournit un difféomorphisme $q : \mathcal{F}_1 \rightarrow S^2 \times \mathcal{F}_{1,2}$.



On notera encore ψ l'application

$$\begin{aligned} S^2 \times \mathcal{F}_{1,2} &\rightarrow S^2 \times (S^2)^2 \\ (v, x) &\mapsto (v, \psi(x)) \end{aligned}$$

Alors $\psi \circ q = r \circ \psi$, où r envoie $(v_1, v_2, v_3) \in (S^2)^3$ sur $(v_1, -v_2, -v_3) \in (S^2)^3$. Comme r est un difféomorphisme préservant l'orientation et la mesure de $(S^2)^3$, il reste à voir que q préserve l'orientation.

Rappelons que \mathcal{F}_1 et $\mathcal{F}_{1,2}$ sont orientées comme les bords des espaces de configurations $\mathcal{C}_{\otimes, K_0}$ et $\mathcal{C}_{\otimes, K_0}$.

Dans $\mathcal{C}_{\otimes, K_0}$, les coordonnées naturelles sont $(s_1, x_P, s_2, y_P, s_3, z_P)$, et cet ordre spécifie l'orientation.

Un point de \mathcal{F}_1 admet un voisinage dans $\mathcal{C}_{\otimes, K_0}$ paramétré par les coordonnées $s_1, s_2, s_3, \lambda, v$ (λ est un paramètre ≥ 0), pour lesquelles nous avons la correspondance

$$P = K(s_1) + \lambda v$$

L'application $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$ étant directe, on en déduit sans peine que l'orientation de \mathcal{F}_1 est décrite par l'ordre suivant :

$$(s_1, s_2, s_3, v) \tag{8}$$

(on convient ici que le symbole v remplace deux coordonnées écrites dans un ordre correspondant à l'orientation de S^2).

Dans $\mathcal{C}_{\otimes, K_0}$, l'orientation est donnée par l'ordre suivant : (s'_1, s'_3, s'_2, s'_4) . Un point de $\mathcal{F}_{1,2}$ admet un voisinage dans $\mathcal{C}_{\otimes, K_0}$ paramétré par $s'_1, s'_3, s'_4, \lambda$, et la correspondance est

$$s'_2 = s'_1 + \lambda$$

On en déduit que l'orientation de $S^2 \times \mathcal{F}_{1,2}$ est décrite par l'ordre suivant :

$$(v, s'_1, s'_3, s'_4) \tag{9}$$

La considération des orientations 8 et 9 et de l'expression du difféomorphisme q permet d'affirmer que q préserve l'orientation. Cela achève de démontrer 2.1. ■

Appendice : La théorie du degré en topologie différentielle

La théorie du degré, introduite par Brouwer et développée notamment par Milnor, affirme que lorsque l'on a une application $\psi : X \rightarrow Y$ de classe C^∞ , entre une variété X compacte orientée sans bord, et une variété Y connexe orientée de même dimension, le nombre algébrique de préimages (ou *degré*) d'une valeur régulière $y \in Y$ ne dépend pas du choix de cette valeur régulière. L'entier ainsi obtenu est appelé le degré de l'application ψ . Il est noté $\deg(\psi)$.

L'objet de cet appendice est d'étendre cette théorie au cas où X est une variété compacte à coins (proposition 4.4), puis au cas où X est un recollement de variétés à coins (proposition 4.7).

Notons que dans le cas où X est une variété compacte à coins, le degré n'est plus nécessairement constant, comme le montre l'exemple très simple de l'inclusion $[0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$.

Plaçons-nous dans le cadre suivant : X est une variété à coins compacte orientée, Y est une variété sans bord orientée de même dimension que X . ψ est une application $X \rightarrow Y$ de classe C^∞ . Nous noterons ∂X le bord de X (réunion des strates de codimension ≥ 1).

Définition 4.1. Soit $R_\psi(Y)$ l'ensemble des valeurs régulières de ψ , c'est-à-dire

$$R_\psi(Y) = \{y \in Y, \psi^{-1}(y) \cap \partial X = \emptyset \text{ et } \forall x \in \psi^{-1}(y), d\psi_x \text{ est un isomorphisme}\}$$

Théorème 4.2 (Sard). $R_\psi(Y)$ est de mesure pleine dans Y (il est en particulier dense dans Y).

Définition 4.3. Pour $y \in R_\psi(Y)$, on définit le *degré* de y par

$$\deg(\psi, y) = \sum_{x \in \psi^{-1}(y)} \text{sign}(\det d\psi_x)$$

Remarque. $\psi^{-1}(y)$ est fini car c'est un ensemble compact et discret.

Proposition 4.4. Soit Ω une composante connexe de l'ouvert $Y \setminus \psi(\partial X)$. Alors l'application degré $y \mapsto \deg(\psi, y)$ est constante sur $R_\psi(Y) \cap \Omega$.

Démonstration. Il s'agit d'une adaptation de la démonstration de Milnor [Mil] (§5). Remarquons qu'il suffit de montrer que \deg est constante sur toutes les boules $B \subset \Omega$. Soit donc une boule $B \subset \Omega$ et y_0, y_1 des valeurs régulières dans B . Nous voulons démontrer $\deg(\psi, y_0) = \deg(\psi, y_1)$.

Soit $(h_t)_{t \in [0,1]}$ une isotopie de difféomorphismes de Y telle que

- $h_0 = \text{Id}$
- $h_1(y_0) = y_1$
- $\forall t \in [0, 1], h_t$ est l'identité hors de B .

Posons $M = X \times [0, 1]$. M est une variété à coins, munie de l'orientation produit. On définit l'application

$$\begin{aligned} F : M &\rightarrow Y \\ (x, t) &\mapsto h_t(\psi(x)) \end{aligned}$$

On note $\partial_1 M$ le bord de codimension 1 de M , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \partial_1 M &= \check{X} \times \{0\} \\ &\cup \check{X} \times \{1\} \\ &\cup \partial_1 X \times]0, 1[\end{aligned}$$

et ∂M le bord de M :

$$\begin{aligned} \partial M &= X \times \{0\} \\ &\cup X \times \{1\} \\ &\cup \partial X \times]0, 1[\end{aligned}$$

Remarquons tout de suite que $F^{-1}(y_1) \cap \partial_1 M = (\psi^{-1}(y_1) \times \{0\}) \sqcup (\psi^{-1}(y_0) \times \{1\})$. On en déduit que y_1 est régulière pour $F|_{\partial_1 M}$; et son degré s'exprime en fonction du degré de ψ en y_0 et en y_1 :

$$\deg(F|_{\partial_1 M}, y_1) = \deg(\psi, y_1) - \deg(\psi, y_0)$$

Il faut noter ici que $\partial_1 M$ est orienté canoniquement comme bord de la variété M . Il reste donc à montrer que $\deg(F|_{\partial_1 M}, y_1) = 0$.

Premier cas: si y_1 est une valeur régulière de F . Comme $B \subset \Omega \subset Y \setminus \psi(\partial X)$, on en déduit que $F^{-1}(y_1)$ ne rencontre aucune des strates de codimension ≥ 2 dans M . Le lemme de submersion permet d'affirmer que $V = F^{-1}(y_1)$ est une sous-variété de M de codimension 1, et que

$$\partial V = V \cap \partial M = V \cap \partial_1 M,$$

ensemble qui a été explicité plus haut. V est compacte car F est continue.

Nous allons orienter V . Soit $x \in V$; nous voulons orienter l'espace tangent $T_x V$. $dF_x : T_x M \rightarrow T_{\psi(x)} Y$ induit un isomorphisme

$$dF_x : \frac{T_x M}{T_x V} \rightarrow T_{\psi(x)} Y$$

Nous pouvons donc orienter $(T_x M)/(T_x V)$ en spécifiant que dF_x est directe. $T_x V$ est alors orienté de telle façon que l'isomorphisme

$$T_x M = T_x V \oplus \frac{T_x M}{T_x V}$$

soit direct.

Connaissant la classification des variétés de dimension 1, on peut finalement schématiser V ainsi :

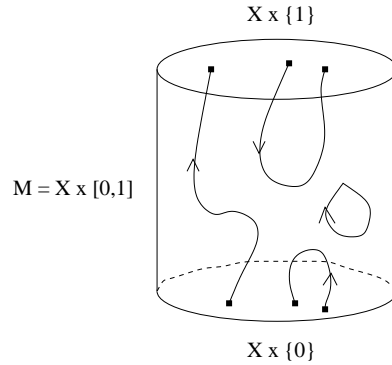


Figure : Schématisation de V

Soit $x \in \partial V$ et v_x une base directe de $T_x V$. Par définition de l'orientation de V , on a $\text{sign}(\det d(F|_{\partial_1 M})_x) = +1$ si et seulement si v_x pointe vers l'extérieur de M . Or, il y a autant de $x \in \partial V$ tels que v_x pointe vers l'extérieur de M , que de $x \in \partial V$ tels que v_x pointe vers l'intérieur de M (voir figure). En sommant sur tous les $x \in \partial V$, on obtient

$$\deg(F|_{\partial_1 M}, y_1) = 0$$

Second cas: si y_1 n'est pas régulière pour F . D'après le théorème de Sard appliqué à F , on peut choisir une valeur $z \in S^2$ régulière pour F , et suffisamment proche de y_1 pour que l'on soit assuré que $\deg(F|_{\partial_1 M}, z) = \deg(F|_{\partial_1 M}, y_1)$. En utilisant le premier cas, on en conclut encore

$$\deg(F|_{\partial_1 M}, y_1) = 0 \blacksquare$$

Considérons maintenant le cas d'un recollement de variétés à coins. Soient X_1, X_2 deux variétés à coins compactes orientées, Y une variété sans bord orientée. ($\dim X_1 = \dim X_2 = \dim Y$). Soit X un recollement de X_1 et X_2 (X désigne l'espace topologique $X_1 \sqcup X_2$ quotienté par l'identification des faces). Soit $\psi_1 : X_1 \rightarrow Y$ et $\psi_2 : X_2 \rightarrow Y$ des applications de classe C^∞ admettant un prolongement continu $\psi : X \rightarrow Y$. On note $\partial_A X$ le bord apparent de X et ∂X le bord total de X . Donnons quelques définitions :

Définition 4.5. L'ensemble des *valeurs régulières* de ψ est défini par :

$$R_\psi(Y) = \{y \in Y, \psi^{-1}(y) \cap \partial X = \emptyset \text{ et } y \text{ régulière pour } \psi_1 \text{ et } \psi_2\}$$

C'est un ouvert de Y . Pour $y \in R_\psi(Y)$ on note

$$\deg(\psi, y) = \deg(\psi_1, y) + \deg(\psi_2, y)$$

Proposition 4.6. $R_\psi(Y)$ est de mesure pleine dans Y .

Démonstration. On a $R_\psi(Y) = R_{\psi_1}(Y) \cap R_{\psi_2}(Y) \cap (Y \setminus \psi(\partial X))$. D'après le théorème de Sard, $R_{\psi_1}(Y)$ et $R_{\psi_2}(Y)$ sont de mesure pleine dans Y . D'autre part, si \mathcal{F} est une face de X_1 ou X_2 , le théorème de Sard appliqué à $\psi : \overline{\mathcal{F}} \rightarrow Y$ affirme que $\psi(\mathcal{F})$ est de mesure nulle dans Y . En prenant la réunion sur toutes les faces, on obtient que $\psi(\partial X)$ est de mesure nulle, d'où le résultat. ■

La proposition principale est la suivante.

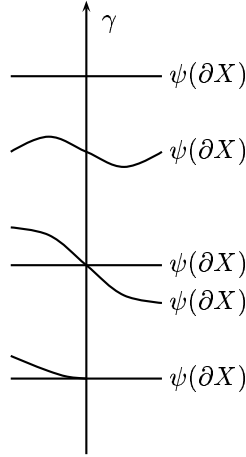
Proposition 4.7. Soit Ω une composante connexe par arcs de $Y \setminus \psi(\partial X)$. Alors la fonction degré est constante sur $R_\psi(Y) \cap \Omega$.

Remarque. La proposition 4.4 nous permet a priori d'affirmer que le degré est constant sur chaque composante connexe de $Y \setminus \psi(\partial X)$.

Démonstration. Soit $y_0, y_1 \in R_\psi(Y) \cap \Omega$; nous voulons montrer $\deg(\psi, y_0) = \deg(\psi, y_1)$.

Montrons que l'on peut se ramener au cas où $Y = \mathbf{R}^d$. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y$ un chemin continu reliant y_0 à y_1 . Pour tout $t \in [0, 1]$, il existe un voisinage W_t de $\gamma(t)$ dans Y difféomorphe à \mathbf{R}^d . Soit I_t un intervalle ouvert voisinage de t dans $[0, 1]$ tel que $\gamma(I_t) \subset W_t$. Par compacité de $[0, 1]$, il existe une suite finie $0 \leq t_1 < \dots < t_k \leq 1$ telle que les I_{t_i} , pour $1 \leq i \leq k$, recouvrent $[0, 1]$. On peut également toujours supposer que $I_{t_i} \cap I_{t_{i+1}} \neq \emptyset$. D'après le théorème de Sard, on peut choisir, pour $1 \leq i \leq k-1$, une valeur régulière $z_i \in W_{t_i} \cap W_{t_{i+1}} \cap R_\psi(Y)$. On peut alors trouver des chemins continus $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow W_{t_i}$ reliant z_{i-1} à z_i (en posant $z_0 = y_0$ et $z_k = y_1$). Il est clair maintenant que si nous connaissons le résultat dans \mathbf{R}^d , nous pourrions en déduire $\deg(\psi, y_0) = \deg(\psi, y_1)$.

Dans le cas $Y = \mathbf{R}^d$, soit γ le chemin de classe C^∞ défini par $\gamma(t) = y_0 + t(y_1 - y_0)$. Soit H l'hyperplan médiateur du segment $[y_0, y_1]$ et $m = \frac{y_0 + y_1}{2} \in H$. Soit p la projection orthogonale de Y dans H . $Y \setminus \psi(\partial X)$ étant un ouvert contenant y_0 et y_1 , on peut trouver des voisinages $y_0 \in W_0 \subset Y \setminus \psi(\partial X)$ et $y_1 \in W_1 \subset Y \setminus \psi(\partial X)$. Soit $W = p(W_0) \cap p(W_1)$. W est un voisinage de m dans H ; on peut donc trouver une valeur régulière $z \in W$ pour l'application $p \circ \psi|_{\partial X}$. Soit $z_0 \in W_0$ et $z_1 \in W_1$ tel que $p(z_0) = p(z_1) = z$. Nous modifions γ en un chemin de classe C^∞ allant en ligne droite de z_0 à z_1 . En utilisant l'hypothèse faite sur z , on a que γ ne rencontre pas l'image du bord de codimension ≥ 2 de X , et que $\gamma^{-1}(\psi(\partial X))$ est fini. Nous sommes donc dans la situation suivante :



Par hypothèse sur z , il existe un voisinage ouvert U de z dans H tel que

$$(p \circ \psi|_{\partial X})^{-1}(U) = \bigsqcup_{i=1}^k U_i$$

$p \circ \psi|_{\partial X} : U_i \rightarrow U$ est un difféomorphisme

Il s'agit exactement de la situation représentée ci-dessus. On notera h_i le difféomorphisme $U_i \rightarrow U$. On veut remplacer U par un ouvert plus petit U' tel que

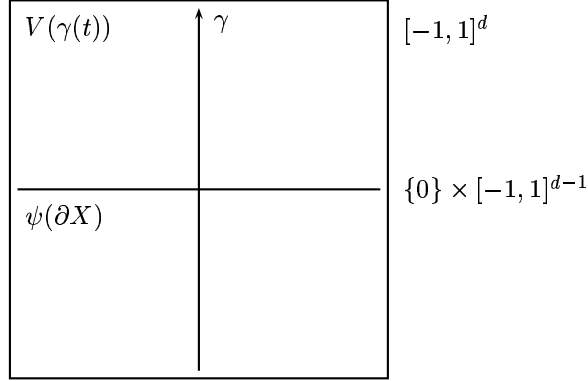
$$\begin{aligned} & \forall 1 \leq i < j \leq k, \\ & - \text{ ou bien } \forall x \in U', \psi(h_i^{-1}(x)) \neq \psi(h_j^{-1}(x)) \\ & - \text{ ou bien } \forall x \in U', \psi(h_i^{-1}(x)) = \psi(h_j^{-1}(x)) \end{aligned}$$

Soit $1 \leq i < j \leq k$. Définissons $V_{i,j}$ comme l'ensemble des $x \in U$ possédant un voisinage sur lequel la condition ci-dessus est satisfaite. Il est aisé de vérifier que $V_{i,j}$ est un ouvert dense de U . On peut alors prendre pour U' une composante connexe de l'ouvert

$$\bigcap_{1 \leq i < j \leq k} V_{i,j}$$

qui est non vide car dense dans U .

Soit alors $z' \in U'$ une valeur régulière pour $p \circ \psi|_{\partial X}$. On modifie γ de telle sorte que γ aille en ligne droite et passe par z' . Le chemin γ vérifie alors toutes les conditions suivantes (illustrées par la figure ci-dessus) :



1. $\gamma^{-1}(\psi(\partial X))$ est un ensemble fini.
2. Tout $y \in \gamma([0, 1]) \cap \psi(\partial X)$ admet un voisinage $V(y)$ dans Y difféomorphe à $[-1, 1]^d$
3. Ce difféomorphisme envoie $\psi(\partial X) \cap V(y)$ sur $\{0\} \times [-1, 1]^{d-1}$.
4. $V_X = \psi^{-1}(\psi(\partial X) \cap V(y))$ est inclus dans le bord de codimension 1 de X
5. L'application $V_X \rightarrow [-1, 1]^{d-1}$ induite par ψ est un difféomorphisme local.

Montrons enfin que le degré de ψ est constant le long du chemin γ . On sait déjà que le degré est constant lorsque γ ne rencontre pas $\psi(\partial X)$ (remarque 4). Soit t tel que $\gamma(t) \in \psi(\partial X)$. $\gamma(t)$ est dans l'image des faces recollées de X_1 et X_2 , mais n'est dans l'image d'aucun autre bord. Soit $x \in \partial X$ une préimage par ψ de $\gamma(t)$. x appartient donc à une face recollée.

On paramètre ∂X au voisinage de x par la coordonnée $u \in [-1, 1]^{d-1}$. On paramètre un voisinage V_X de x dans X par les coordonnées (λ, u) , où $\lambda \in [-1, 1]$ représente la coordonnée "normale" (tandis que u représente la coordonnée "tangentielle"). Au point x , on a $u = \lambda = 0$.

On paramètre également le voisinage $V_Y = V(\gamma(t))$ de $\gamma(t)$ dans Y par des coordonnées $(\lambda', u') \in [-1, 1]^d$. On peut toujours faire en sorte que ψ envoie $(0, u)$ sur $(0, u)$.

Soit f une fonction de u de classe C^∞ à valeurs dans $[0, 1]$, valant 1 au voisinage de 0 et 0 hors de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^{d-1}$. Soit g une fonction de λ de classe C^∞ à valeurs dans $[0, 1]$, valant 1 au voisinage de 0 et 0 hors de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

On introduit l'isotopie

$$\psi_t : (\lambda, u) \in V_X \mapsto \psi_t(\lambda, u) \in Y$$

définie par

$$\psi_t(\lambda, u) = (1 - t)\psi(\lambda, u) + t(f(u)g(\lambda)D(\lambda, u) + (1 - f(u)g(\lambda))\psi(\lambda, u))$$

où $D(\lambda, u)$ est une fonction qui s'écrit

$$\lambda' = \lambda, \quad u' = u$$

dans les coordonnées naturelles de V_X et V_Y .

Pour $t = 0$, on a $\psi_0 = \psi$. Pour $t = 1$, on a $\psi_1(\lambda, u) = (f(u)g(\lambda)D(\lambda, u) + (1 - f(u)g(\lambda))\psi(\lambda, u))$.

Considérons maintenant des λ' strictement positifs proches de 0, et des z' proches de 0. Il est facile de voir que le degré de ψ_1 en une valeur régulière (λ', u') est égal au degré de ψ_1 en une valeur régulière $(-\lambda', u')$.

Comme l'isotopie ψ_t fixe un voisinage de x dans ∂X , la conclusion précédente subsiste pour ψ_0 ; ainsi

$$\deg(\psi_0, (\lambda', u')) - \deg(\psi_0, (-\lambda', u')) = 0$$

Or, la variation du degré le long de γ lorsque l'on passe par $\gamma(t)$, est égale à la somme sur les préimages $x \in (\psi|_{\partial X})^{-1}(\gamma(t))$ de la variation exprimée ci-dessus.

Ainsi, le degré reste constant le long de γ et $\deg(\psi, y_0) = \deg(\psi, y_1)$. ■

Remerciements

Je remercie Monsieur Jean Lannes pour avoir accepté d'être mon directeur d'option.

Je tiens à remercier Madame Christine Lescop pour avoir encadré mon stage et enrichi ma vue sur les mathématiques. Sa disponibilité et son aide dans la rédaction de ce mémoire m'ont été d'un grand secours.

Je remercie aussi les membres de l'Institut Fourier pour avoir facilité matériellement et humainement mon intégration dans le centre de recherche.

Bibliographie

- [Poi] S. Poirier, *The Configuration space integral for links and tangles in \mathbf{R}^3* (1999)
- [Mil] J. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, University of Virginia Press, 1965.
- [Hir] Hirsch, *Differential topology*, GTM, 1976.
- [Bar] D. Bar-Natan, *On the Vassiliev knot invariants*, *Topology* **34** (1995).

Table des matières

Résumé	2
1 Introduction aux intégrales de Gauss	3
1.1 L'intégrale de Gauss d'un entrelacs à 2 composantes	3
1.2 Les diagrammes uni-trivalents et les intégrales de Gauss associées	8
1.3 Les invariants de Vassiliev	16
1.4 Le développement perturbatif de Chern-Simons	19
2 L'invariant de Vassiliev de degré 2 des nœuds	21
2.1 Description intégrale	21
2.2 Recollé d'espaces de configurations	23
3 Compactifications d'espaces de configurations	28
3.1 Injection de k points dans \mathbf{R}^n	28
3.2 Espaces de configurations d'un nœud	37
4 Démonstration du théorème 2.1	41
Appendice : la théorie du degré en topologie différentielle	45
Remerciements	51
Bibliographie	51