Dossier de candidature à un poste de maître de conférence

Hélène Eynard-Bontemps

Section 25

Mots-clefs. Géométrie différentielle, systèmes dynamiques, feuilletages de codimension 1, difféomorphismes de l'intervalle.

Table des matières

1. Curriculum Vitæ

État civil et fonction

Hélène Eynard-Bontemps
Née le 21 décembre 1982 à Riom, Puy-de-Dôme (27 ans)
Nationalité française. Célibataire.
Adresse permanente : La Ronzière, Saint-Genest l'Enfant, 63200 Malauzat, FRANCE

Postdoctorante JSPS (Japanese Society for the Promotion of Science) d'octobre 2009 à août 2010
Équipe : Géométrie et Topologie
Laboratoire d'accueil : Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo
Adresse professionnelle : Komaba, Meguro, Tokyo 153-8914 , JAPON

E-mail : `heynardb@ms.u-tokyo.ac.jp`
Page personnelle : `http://www.umpa.ens-lyon.fr/~heynardb`

Évolution professionnelle

2009-2010	**Postdoctorante JSPS**, responsable : Pr. Takashi Tsuboi, Université de Tokyo.
2006-2009	**Allocataire de recherche monitrice** (Allocation Couplée). Enseignement : Département de Mathématiques de l'ENS Lyon. Équipe de recherche : équipe de Géométrie de l'Unité de Mathématiques Pures et Appliquées, ENS Lyon.
Depuis 2006	**Professeur agrégée de Mathématiques**, titularisée le 1er sept. 2009.
2002-2006	**Élève fonctionnaire stagiaire**, ENS Lyon.

Cursus universitaire

2006–2009	**Thèse** sous la direction d'Emmanuel Giroux. UMPA, ENS Lyon. Soutenue le 28 septembre 2009 (cf. page suivante).
2005–2006	**Licence (L3) de Lettres Modernes**, Université Paris VII Denis Diderot, *mention Très Bien.*
2004–2005	**Master de Mathématiques** ($2^{ème}$ année), ENS Lyon, *mention Très Bien.* **Agrégation de Mathématiques** (*rang :* $59^{ème}$ *sur* 388).
2003–2004	**Maîtrise de Mathématiques**, ENS Lyon et Imperial College of London, *mention Très Bien.*
2002–2003	**Licence de Mathématiques**, ENS Lyon, *mention Très Bien.*
2000–2002	**Classes préparatoires aux grandes écoles MPSI-MP***, Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand. *Admission à l'École Normale Supérieure de Lyon.*
2000	**Baccalauréat** (section S), *mention Très Bien.*

Recherche

Centres d'intérêt : Topologie, géométrie et dynamique : théorie des feuilletages, dynamique en dimension 1, géométrie symplectique, de contact, h-principe de Gromov.

Thèmes de recherche : Feuilletages de codimension 1 sur les variétés compactes, difféomorphismes de l'intervalle (en particulier actions lisses de $\mathbb{Z}^2$ sur $[0,1]$).

Thèse

Titre : *Sur deux questions connexes de connexité concernant les feuilletages et leurs holonomies.*

Laboratoire : Unité de Mathématiques Pures et Appliquées, ENS Lyon, CNRS UMR 5669.

École doctorale : Informatique et Mathématiques de Lyon.

Thèse soutenue publiquement le **28 septembre 2009** à Lyon devant un jury composé de :

M. Sylvain Crovisier	Université Paris 13	*Membre*
M. Étienne Ghys	ENS Lyon	*Membre*
M. Emmanuel Giroux	ENS Lyon	*Directeur*
M. Patrice Le Calvez	Université Paris 6	*Rapporteur*
M. Jean-Christophe Yoccoz	Collège de France	*Président*

Second rapporteur : Yakov Eliashberg, Stanford University, Californie, États-Unis.

Diplôme de doctorat délivré par l'École Normale Supérieure de Lyon, avec la mention Très Honorable.

Autres formations, stages

2006-2009 **Formation à l'enseignement supérieur** prodiguée par le *Centre d'Initiation à l'Enseignement Supérieur* de Lyon, sous forme de 24 journées de stages et de colloques.

Master 2 *Homotopie de champs d'hyperplans, feuilletages de codimension 1*, stage sous la direction d'Emmanuel Giroux, ENS Lyon.

Maîtrise *The geometrization conjecture*, stage d'initiation à la recherche sous la direction de Richard Thomas, Imperial College de Londres.

Licence *Introduction à la théorie de Morse*, stage d'initiation à la recherche sous la direction de Michael Heusener, Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand.

Groupe de lecture autour du livre *Three-Dimensional Geometry and Topology* de W. P. Thurston, dirigé par Emmanuel Giroux, ENS Lyon.

Langues

français	Langue maternelle
anglais	Lu, écrit, parlé.
allemand	Niveau moyen.
japonais	Bases.

2. Publications

Thèse

[1] *Sur deux questions connexes de connexité concernant les feuilletages et leurs holonomies* (128 pages), disponible sur `http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00436304/fr/`.

Articles à paraître

[2] *On the centralizer of diffeomorphisms of the half-line* (21 pages), à paraître dans Commentarii Mathematici Helvetici (version initiale : arXiv :0811.1173v1).

[3] *A connectedness result for commuting diffeomorphisms of the interval* (10 pages), à paraître dans Ergodic Theory and Dynamical Systems (version initiale : arXiv :0912.1464).

Articles en préparation

[4] *An arithmetic result concerning the centralizers of diffeomorphisms of the half-line*, disponible sur `http://www.umpa.ens-lyon.fr/~heynardb`.

[5] *On the homotopy type of the space of codimension one foliations on a closed 3-manifold.*

Autres

[6] *Centralisateurs des difféomorphismes de la demi-droite*, notes d'exposé à paraître dans les Actes du Séminaire TSG de Grenoble (2008-2009), disponible sur `http://www.umpa.ens-lyon.fr/~heynardb`.

En cas de convocation aux auditions, les travaux [1], [2] et [3] seront transmis à l'établissement.

3. Responsabilités collectives

2007-2009 Chargée de l' annonce hebdomadaire des séminaires de l'UMPA.

4. Activités pédagogiques

Enseignement

Tous les enseignements ci-dessous (hors colles) ont été effectués au sein du département de Mathématiques de l'ENS Lyon dans le cadre d'un monitorat. J'ai en outre bénéficié d'une formation à l'enseignement supérieur prodiguée par le CIES de Lyon, sous forme de conférences et de stages pratiques.

2008-2009 **Préparation à l'agrégation** : entraînement aux épreuves orales, correction de leçons, jury d'oraux blancs (total : 24 h, durée d'une séance : 1h ou 2h, fréquence : irrégulière).

L3 : **TD d'analyse complexe** : élaboration de planches d'exercices et de devoirs maison (total : 40 h, séance : 2h, fréquence : hebdomadaire).
Séries entières. Fonctions transcendentes élémentaires. Fonctions holomorphes, conformité, conditions de Cauchy-Riemann. Intégration complexe, formule de Cauchy, analyticité. Zéros isolés, principe du maximum, application ouverte, inversion. Fonctions méromorphes, séries de Laurent, théorème des résidus. Exemples d'uniformisation...

Colles en classes préparatoires MP (Lycée du Parc, Lyon).

2007-2008 **Préparation à l'agrégation** : oraux blancs (4h).

L3 : **TD de Calcul Différentiel 2 : E.D.O. et sous-variétés**, élaboration de planches d'exercices et de devoirs maison (total : 40 h, séance : 2h, fréquence : hebdomadaire).
Équations différentielles linéaires. Théorème de Cauchy-Lipschitz. Boîte de flot. Complétude, intégrales premières, fonctions de Liapounov. Points singuliers : stabilité, stabilité asymptotique, sources, puits, selles, centre. Lemme de Morse. Sous-variétés, cartes, paramétrages locaux. Espace tangent. Extréma liés. Applications différentiables entre sous-variétés, difféomorphismes. Étude métrique des courbes. Classification à difféomorphisme près. Courbes paramétrées dans $\mathbb{R}^3$ *: étude locale, courbure, torsion. Surfaces dans* $\mathbb{R}^3$*...*
Tutorat (20h).

2006-2007 **L3** : **TD de Calcul Différentiel 2** (44h), **Tutorat** (20h).

Autres activités pédagogiques

2007 **Animation d'un stand pour la Fête de la science**, *La lune*, Lyon.

Animation scientifique à l'école primaire, *La lune*, intervention (2 heures) en classe de CM1, Grand Lyon, dans le cadre d'un atelier-projet C.I.E.S.

2006 **Accueil grand public et groupes scolaires** (2 demi-journées) lors de l'exposition temporaire *Pourquoi les Mathématiques ?* Museum de Lyon.

Co-animation d'un atelier mathématique pour enseignants du secondaire, Congrès National de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, Clermont-Ferrand.

2002-2003 **Soutien scolaire aux enfants du quartier de Gerland** (tous niveaux), Lyon.

5. Activités de recherche

Communications orales

Écoles et Workshops :

2010	*School on Periodic Approximation in Ergodic Theory*, Centro di Ricerca Matematica Ennio De Giorgi, Pisa, Italie.
2009	*Workshop on Foliations and Groups of Diffeomorphisms*, Tambara Institute of Mathematical Sciences, the University of Tokyo, Japon.

Séminaires :

2010	Séminaire de Topologie, University of Tokyo (avril).
	Séminaire de Géométrie Symplectique et Applications, IRMA, Strasbourg (février).
	Séminaire de Mathématiques Pures, Clermont-Ferrand (février).
2009	Séminaire de Topologie et Dynamique, Orsay (octobre).
	Séminaire de Topologie, Géométrie et Dynamique, Laboratoire Jean Leray, Nantes (mai).
	Séminaire de Systèmes Dynamiques et Géométrie, Avignon (avril).
	Séminaire Théorie Spectrale et Géométrie, Institut Fourier, Grenoble (janvier).
2008	Journée Rennes-Nantes, IRMAR, Rennes (décembre).
	Sém'In (séminaire interne), UMPA, ENS Lyon (octobre).
2007	Séminaire des étudiants du Pr. Tsuboi, Université de Tokyo (juin).
	Séminaire de Topologie, Université de Keio, Tokyo (mai).

Exposés introductifs, mini-cours :

2009	École d'hiver *Homologie de Heegaard Floer et géométrie de contact* (mini-cours de 2h), La Llagonne.
2007	*Introduction à la géométrie de contact* (exposé de 2h au sein d'un cours de plusieurs semaines), Groupe de travail des étudiants, UMPA, ENS Lyon.
2006	Exposé introductif sur le thème *Feuilletages et structures de Haefliger*, UMPA, ENS Lyon.

Participation à des conférences, colloques, écoles

2010	*School on Periodic Approximation in Ergodic Theory*, Centro di Ricerca Matematica Ennio De Giorgi, Pisa, Italie.
2009	Conférence *Foliations and groups of diffeomorphisms*, Tambara Institute of Mathematical sciences, the University of Tokyo, Japon.
	École d'hiver *Homologie de Heegaard Floer et géométrie de contact*, La Llagonne.
2008	Rencontre ANR Symplexe, *Dynamique et feuilletages complexes : quelques exemples*, Orsay.
	Rencontre ANR Symplexe, *Dynamique topologique sur les surfaces*, Rennes.
	Workshop on Symplectic Geometry, Contact Geometry and Interactions, Bruxelles.
2007	Rencontre ANR Symplexe, *L'homologie de Floer*, ENS Lyon.
	Contact Week, Université de Tokyo.
	Rencontre ANR Symplexe, *Autour de la topologie de contact*, Villetaneuse.
	Workshop on Symplectic Geometry, Contact Geometry and Interactions, Lille.
2006	Park City Summer Institute, *Low dimensional topology*, Utah, États-Unis.

Séjours à l'étranger (non encore mentionnés)

2007	Un mois à l'Université de Tokyo (Japon), sur invitation du Pr. Takashi Tsuboi.

6. Résumé des travaux

Introduction

Mes travaux se situent au carrefour entre géométrie différentielle et systèmes dynamiques. Ils concernent plus précisément les **feuilletages** de codimension 1 sur les variétés compactes sans bord et des questions de **dynamique unidimensionnelle** liées à leurs représentations d'holonomie. Il existe diverses façons (équivalentes) de définir les feuilletages. La suivante a l'avantage d'être visuelle et de bien correspondre à l'idée que l'on se fait d'une structure « feuilletée ». Dorénavant, M désigne une variété compacte sans bord de dimension n, et, sauf mention contraire, les objets considérés sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Un *feuilletage de codimension* 1 sur M est une partition de M en ensembles connexes, nommés *feuilles*, telle que chaque point de M possède un voisinage U muni de coordonnées $(x, y)\colon U \to \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ dans lesquelles toute composante de $F \cap U$, où F est une feuille, est définie par $y =$ constante . Autrement dit, un feuilletage est une partition de M en hypersurfaces immergées qui sont « agencées localement comme une famille d'hyperplans affines parallèles ».

La collection des hyperplans tangents à toutes ces hypersurfaces constitue ce qu'on appelle le *champ d'hyperplans tangent au feuilletage*, et détermine complètement celui-ci. Ainsi, on ne fera pas de distinction entre un feuilletage et son champ d'hyperplans tangent. Un champ d'hyperplans qui est tangent à un feuilletage est dit *(complètement) intégrable*. Notons qu'en dimension 2, tout champ d'hyperplans ($i.e$ de droites) est intégrable (tangent à un feuilletage de dimension 1). A partir de la dimension 3 en revanche, l'existence de champs intégrables sur une variété M donnée (admettant des champs d'hyperplans) n'a rien d'évident, les champs non intégrables constituant un ouvert dense de l'espace $\mathcal{P}(M)$ des champs d'hyperplans sur M.

Cette question a été résolue indépendamment par Lickorish [Li] et Novikov et Zieschang [N] en dimension 3 puis par Thurston [T2] en toute dimension. On dispose en fait du résultat plus précis suivant, qui remonte aux années 70 (son équivalent pour les variétés ouvertes, légèrement antérieur, est dû à Gromov, Haefliger et Phillips).

Théorème (Wood [W] en dim. 3, Thurston [T2] en dim. quelconque)**.** *Tout champ d'hyperplans sur M est homotope au champ tangent à un feuilletage.*

Ma problématique générale est d'essayer de mieux comprendre l'ensemble des feuilletages qui existent sur une variété donnée. L'existence étant connue, un type d'approche consiste à classifier les feuilletages selon différents critères : à isotopie près, à difféomorphisme près, à concordance près. De nombreux résultats ont été obtenus dans ces directions.

Le théorème ci-dessus suggère quant à lui de s'intéresser à la classification *homotopique* des feuilletages, problème très peu exploré jusqu'ici. Il s'agit de considérer l'ensemble $\mathcal{F}(M)$ des feuilletages/champs intégrables sur M comme un espace topologique (sous-espace de $\mathcal{P}(M)$, lui-même muni d'une topologie naturelle) et de s'intéresser à son type d'homotopie. C'est cette direction que j'examine dans ma thèse. Le théorème de Wood et Thurston affirme que l'application $\pi_0\mathcal{F}(M) \to \pi_0\mathcal{P}(M)$ induite par l'inclusion $\mathcal{F}(M) \to \mathcal{P}(M)$ est surjective. On peut alors se demander si cette inclusion n'est pas en fait une équivalence d'homotopie faible (conformément au h-principe de Gromov). La question est d'autant plus tentante qu'un résultat de ce type existe en géométrie de contact : Eliashberg [E] a généralisé les idées de Thurston [T1] (en dimension 3) pour prouver ce type d'équivalence pour les structures de contact vrillées (un autre sous-espace de $\mathcal{P}(M)$). Durant ma thèse, je me suis limitée à la dimension 3 et concentrée sur l'injectivité de l'application entre les π_0 :

Question 1. *Deux feuilletages dans $\mathcal{F}(M)$ dont les champs de plans tangents sont homotopes dans $\mathcal{P}(M)$ peuvent-ils être reliés par un chemin continu dans $\mathcal{F}(M)$?*

Cette question a été résolue (positivement) par Larcanché [La] dans deux cas particuliers : le cas où M est un fibré en cercles et où les deux feuilletages considérés sont transverses aux fibres, et le cas où les deux feuilletages sont *tendus* et suffisamment proches (on reviendra ultérieurement sur la définition de « tendu »). L'outil clef de Larcanché, commun à ses deux résultats, joue également un rôle majeur dans la preuve du résultat principal de ma thèse, qui fournit une réponse partielle à la question 1 :

Théorème A. *Soit M une variété compacte sans bord orientée de dimension 3. Deux feuilletages $\mathcal{C}^\infty$ coorientés dont les champs de plans tangents sont homotopes dans $\mathcal{P}(M)$ peuvent être reliés par un chemin continu dans $\mathcal{F}^1(M)$.*

Ici, $\mathcal{F}^r(M)$ désigne l'espace des champs de plans intégrables de classe $\mathcal{C}^r$ (la notion d'intégrabilité introduite précédemment pour les champs de plans $\mathcal{C}^\infty$ a en fait un sens en toute régularité : un champ de plans $\mathcal{C}^r$ est dit intégrable si par tout point de M passe une hypersurface $\mathcal{C}^r$ qui est tangente en chacun de ses points à ce champ). Tout comme $\mathcal{F}(M)(=\mathcal{F}^\infty(M))$, l'espace $\mathcal{F}^r(M)$ est muni d'une topologie naturelle, héritée de l'espace $\mathcal{P}^r(M)$ des champs de plans $\mathcal{C}^r$ sur M. Dans ce qui suit, on confond « feuilletage $\mathcal{C}^r$ » et « champ de plans intégrable de classe $\mathcal{C}^r$ » (la définition habituelle de feuilletage $\mathcal{C}^r$ est un peu différente).

En fait, les feuilletages du chemin que je construis sont $\mathcal{C}^\infty$ en dehors de tores épais $\mathbb{T}^2\times[0,1]\subset M$ sur lesquels ils sont transverses au facteur $[0,1]$ (on verra dans la dernière section comment apparaissent ces tores épais). La question 1 se réduit alors à une nouvelle question de connexité : l'espace des feuilletages de $\mathbb{T}^2\times[0,1]$ tangents au bord et transverses au facteur $[0,1]$ est-il connexe par arcs ? Un tel feuilletage est entièrement décrit par sa *représentation d'holonomie*, un morphisme h de $\pi_1(\mathbb{T}^2)=\mathbb{Z}^2$ dans $\mathcal{D}^\infty_+[0,1]$, que nous allons décrire en quelques mots (pour tout $r\geq 1$, $\mathcal{D}^r_+[0,1]$ désigne l'espace des difféomorphismes $\mathcal{C}^r$ de $[0,1]$ préservant l'orientation, muni de la topologie $\mathcal{C}^r$). Pour tout lacet (lisse) γ de $\mathbb{T}^2$ basé en 0, le feuilletage de $\mathbb{T}^2\times[0,1]$ considéré est transverse à l'anneau $\gamma\times[0,1]$, et trace donc sur cet anneau un feuilletage de dimension 1, lui aussi transverse au facteur $[0,1]$. On peut donc lui associer une application de premier retour sur la transversale $\{0\}\times[0,1]\subset\gamma\times[0,1]$, que l'on appelle *holonomie du feuilletage le long de* γ : $h(\gamma)\in\mathcal{D}^\infty_+[0,1]$. La question sur les feuilletages du tore épais se ramène donc en fait à la suivante :

Question 2. *L'espace des représentations de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathcal{D}^\infty_+[0,1]$ est-il connexe par arcs ?*

Notons qu'une telle représentation n'est rien d'autre que la donnée d'un couple de difféomorphismes $f,\ g\in\mathcal{D}^\infty_+[0,1]$ qui commutent. Il s'agit donc de fabriquer des chemins continus de couples de difféomorphismes qui commutent. Ce problème s'avère délicat, comme le montre la section suivante, qui présente les principaux résultats de la première partie de ma thèse. Nous reviendrons au Théorème A dans la dernière section, où nous donnerons un aperçu des outils mis en jeu dans sa démonstration (Partie II de ma thèse).

Sur les difféomorphismes de l'intervalle

Pour attaquer la question 2, plusieurs idées se présentent naturellement. Soient $f,\ g\in\mathcal{D}^\infty_+[0,1]$ un couple de difféomorphismes qui commutent.

Première idée. Soit $\mathcal{Z}^r_f=\{h\in\mathcal{D}^r_+[0,1]\,;\,h\circ f=f\circ h\}$, $1\leq r\leq\infty$. Si $\mathcal{Z}^\infty_f$ est connexe par arcs, on relie g à Id dans $\mathcal{Z}^\infty_f$, et donc (f,g) à (f,Id) parmi les couples de difféomorphismes qui commutent, puis, $\mathcal{D}^\infty_+[0,1]$ étant contractile, on relie f à Id, et donc (f,Id) à $(\mathrm{Id},\mathrm{Id})$.

Malheureusement, $\mathcal{Z}^\infty_f$ est rarement connexe. Il y a à cela au moins deux types d'obstructions.

Obstruction de nature locale. Si $[a,b]\subset[0,1]$ est un intervalle stable par f, où f a pour seuls points fixes a et b, le centralisateur $\mathcal{C}^1$ de $f\mid_{[a,b[}$ est toujours un groupe à un paramètre, d'après des résultats de G. Szekeres [Sz] et N. Kopell [K]. En revanche, son centralisateur $\mathcal{C}^\infty$ est en général plus petit et peut notamment être réduit au groupe cyclique infini engendré par $f\mid_{[a,b[}$. Un tel exemple a été construit par F. Sergeraert dans [Se, §4].

Obstruction de nature globale. Bien que les centralisateurs $\mathcal{C}^1$ de $f\mid_{[a,b[}$ et $f\mid_{]a,b]}$ soient des groupes à un paramètre, Kopell [K] a montré que le centralisateur $\mathcal{C}^1$ (et *a fortiori* $\mathcal{C}^\infty$) de $f\mid_{[a,b]}$ est génériquement réduit au groupe cyclique infini engendré par $f\mid_{[a,b]}$. Comme l'explique J.-C. Yoccoz dans [Y2], l'obstruction à ce que le centralisateur $\mathcal{C}^1$ de $f\mid_{[a,b]}$ soit un groupe à un paramètre est mesurée par un invariant introduit par J. Mather dans [M], qui prend ses valeurs essentiellement dans $\mathcal{D}^\infty_+(\mathbb{S}^1)$.

Deuxième idée. Si $\mathcal{Z}^\infty_f$ est le groupe cyclique engendré par f, il est très facile de relier $(f,g)=(f,f^k)$ à $(\mathrm{Id},\mathrm{Id})$ par des couples de difféomorphismes qui commutent : n'importe quelle isotopie $(f_t)_{t\in[0,1]}$ reliant f à l'identité donne un chemin (f_t,f_t^k) qui convient.

Malheureusement il existe des cas où $\mathcal{Z}^\infty_f$ n'est ni connexe, ni cyclique. C'est la recherche d'un tel exemple qui a motivé l'article [2] (cf. 2. Publications), dont le résultat principal est :

Théorème B. *Il existe un difféomorphisme lisse f de $\mathbb{R}_+$ ne fixant que l'origine dont le centralisateur $\mathcal{C}^r$, $2\leq r\leq\infty$, est un sous-groupe propre, dense et non dénombrable de son centralisateur $\mathcal{C}^1$.*

Rappelons que d'après Szekeres et Kopell, $\mathcal{Z}^1_f$ est dans ce cas un groupe à un paramètre. Plus précisément, f est le temps 1 du flot d'un unique champ de vecteurs $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, que l'on appellera *champ de Szekeres de* f, et $\mathcal{Z}^1_f$ est réduit au flot de ce champ. Ceci fournit une identification canonique entre $\mathcal{Z}^1_f$ et $\mathbb{R}$, avec $f \cong 1$. Le Théorème B découle alors de la proposition suivante, en prenant pour f le flot au temps 1 du champ de vecteurs qu'elle fournit.

Proposition 1. *Il existe un champ de vecteurs ν complet $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et ne s'annulant qu'en 0 dont le flot au temps t est lisse sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $t \in \mathbb{Z} \oplus \sum_{\tau \in K} \tau\mathbb{Z}$, où $K \subset \mathbb{R}$ est un ensemble de Cantor, mais n'est pas $\mathcal{C}^2$ en 0 pour d'autres t.*

La preuve de cette proposition combine la construction de Sergeraert évoquée précédemment et des techniques de type « déformation par conjugaisons successives » introduites par Anosov et Katok [A–K] (cf. [F–K] pour une présentation de ces techniques et d'autres références sur le sujet). Comme on peut s'y attendre avec ce type de constructions, les éléments du Cantor obtenu sont toujours des nombres de Liouville [1] (*i.e.* des nombres qui ne satisfont pas de condition diophantienne). J'ai récemment démontré dans [4] que l'on pouvait en fait prescrire un élément du Cantor K (parmi les nombres de Liouville) :

Théorème B'. *Pour tout nombre de Liouville α, il existe un difféomorphisme lisse f de $\mathbb{R}_+$ fixant seulement 0 dont le centralisateur $\mathcal{C}^r$, pour tout $2 \leq r \leq \infty$, est un sous-groupe propre de $\mathcal{Z}^1_f \cong \mathbb{R}$ et contient un ensemble de Cantor K contenant lui-même α.*

Ce résultat ouvre de nouvelles pistes de recherche, développées dans la partie suivante (7. Programme de recherche).

Concernant la question 2, j'ai tout de même obtenu le résultat suivant, qui fait l'objet de l'article [3], en exploitant les travaux de Szekeres et Kopell.

Théorème C. *Deux représentations quelconques de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathcal{D}^\infty_+[0,1]$ peuvent être reliées par un chemin continu de représentations de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathcal{D}^1_+[0,1]$.*

Remarque. La preuve de ce théorème fonctionne encore pour des difféomorphismes de classe $\mathcal{C}^r$, $r \geq 2$, mais pas pour des difféomorphismes $\mathcal{C}^1$. Ce théorème ne dit donc rien sur la connexité de l'espace des représentations de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathcal{D}^1_+[0,1]$.

Sur les feuilletages de codimension 1

Revenons au Théorème A. Nous souhaitons maintenant, à travers une présentation synthétique de sa preuve, préciser la nature des outils mis en oeuvre (signalés en gras) et dégager quelques énoncés intermédiaires qui la structurent. Le point de départ est la **preuve de Thurston du théorème de Wood** énoncé plus haut, dont il nous faut donner les grandes lignes.

Étape 1. Soit M une variété close de dimension 3 et ξ un champ de plans coorientés sur M. Thurston construit une « bonne » triangulation Δ de M, et déforme ξ en un champ intégrable sur un voisinage V du 2-squelette et presque constant sur chaque 3-simplexe. Plus précisément, au terme de cette étape, chaque composante de ∂V est une sphère S incluse dans un 3-simplexe sur laquelle ξ est presque horizontal au sens où il trace sur S un feuilletage ayant seulement deux singularités, les pôles, qui sont reliés (sur S) par un champs de vecteurs transverse à ξ.

Étape 2. On tente d'étendre le feuilletage $\xi\,|_V$ à M tout entière. À vrai dire, en raison du théorème de stabilité de Reeb, ceci n'est possible que si chaque feuilletage $\xi\,|_S$ est un feuilletage par cercles en dehors des pôles. Une observation fondamentale de Thurston est qu'on peut néanmoins s'en sortir si, pour chaque sphère S, il existe dans V un arc proprement plongé A transverse au feuilletage $\xi\,|_V$ qui relie les pôles de S. En effet, dans ce cas, l'union de la boule B bordée par S et d'un tube autour de A feuilleté par disques forme un tore plein $W = \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ sur le bord duquel ξ induit un feuilletage transverse à $\mathbb{S}^1$. Thurston montre qu'un tel feuilletage est la trace d'un feuilletage du tore plein (homotope à ξ relativement au bord), en utilisant la simplicité du groupe $\mathcal{D}^\infty_+(\mathbb{S}^1)$, démontrée par M. Herman et J. Mather.

Étape 3. Les arcs transverses A utilisés ci-dessus n'existent pas forcément. Une condition suffisante pour qu'il y en ait est que toutes les feuilles de $\xi\,|_V$ soient non compactes. Une astuce permet à Thurston, en rajoutant un certain nombre de boules et en cassant l'intégrabilité sur ces boules, de se ramener à cette situation.

L'idée de départ pour démontrer le théorème A est de donner une version à paramètres de la construction de Thurston.

Étape 1. Soit M une variété close de dimension 3 et ξ_t, $t \in [0,1]$, une famille continue dans $\mathcal{P}(M)$, avec ξ_0 et ξ_1 intégrables. Une **version « à paramètres » de l'étape 1 de Thurston** a déjà été **réalisée par Y. Eliashberg [E] dans le cas des champs de contact**. Sa construction s'adapte au cas des feuilletages, et permet de déformer continûment les ξ_t en champs intégrables en dehors de boules (une dans chaque 3-simplexe d'une triangulation bien choisie) et presque horizontaux sur leur bord, les pôles variant continûment avec t. On note V le complémentaire de ces boules dans M. Notons que garantir la presque-horizontalité des champs perturbés est un problème aussi crucial que délicat, qui nécessite de contrôler à la fois la taille des perturbations et la taille du voisinage du 2-squelette sur lequel les champs sont rendus intégrables.

Étape 2. On tente d'étendre les feuilletages $\xi_t|_V$ à M tout entière. Comme dans la preuve de Thurston, une situation très favorable est celle où, pour chaque sphère S de ∂V et pour chaque t, il existe dans V un arc proprement plongé A_t transverse au feuilletage $\xi_t \mid_V$ qui relie les pôles de S et dépend continûment de t. L'outil crucial est ici un **travail d'A. Larcanché [La], fondé sur un théorème d'Herman concernant les difféomorphismes du cercle**, qui donne un procédé continu explicite pour prolonger à $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ des feuilletages de $\partial\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ transverses au facteur $\mathbb{S}^1$. Ces prolongements seront appelés dans la suite feuilletages de Larcanché.

Malheureusement, deux problèmes se présentent :
- on peut appliquer une version à paramètre de l'astuce de Thurston (étape 3 précédente) pour garantir l'existence des arcs A_t pour tout $t \in]0,1[$, mais pas pour $t = 0$ et $t = 1$, puisqu'on veut garder intacts ξ_0 et ξ_1 ;
- même quand on peut construire ces arcs A_t, il n'est en général pas possible de les faire dépendre continûment de t.

Étape 3. On résout le second problème grâce à un **lemme dit « des vases communicants »**, qui assure que la classe d'homotopie du feuilletage obtenu à partir du champ ξ_t (pour un t donné) et des arcs A_t par la construction de Larcanché (cf. étape 2) est indépendante du choix des A_t. Ce lemme fait lui aussi intervenir le procédé de Larcanché. On appelle *malléables* les feuilletages obtenus de cette façon : *tendus*[1] en dehors d'un nombre fini de tores pleins, de type Larcanché sur ces tores avec une holonomie au bord admettant un intervalle non trivial de points fixes.

À ce stade, on est en mesure de démontrer le théorème A pour cette classe particulière de feuilletages, et sans perte de régularité :

Théorème D. *Deux feuilletages malléables dont les champs de plans tangents sont homotopes dans $\mathcal{P}^\infty(M)$ sont homotopes dans $\mathcal{F}^\infty(M)$.*

Corollaire. *Deux feuilletages tendus dont les champs de plans tangents sont homotopes dans $\mathcal{P}^\infty(M)$ sont homotopes dans $\mathcal{F}^\infty(M)$.*

Ceci généralise le résultat de Larcanché évoqué précédemment, où les feuilletages étaient supposés proches l'un de l'autre.

Pour démontrer le théorème A, il reste donc à montrer que tout feuilletage $\mathcal{C}^\infty$ est homotope dans $\mathcal{F}^1(M)$ à un feuilletage malléable. Pour cela, on passe par une **classe intermédiaire de feuilletages : les feuilletages *nets***. Un feuilletage est dit *net* s'il est tendu en dehors d'un nombre fini de feuilles toriques, au voisinage desquelles les représentations d'holonomies de part et d'autre sont à valeur dans le flot d'un champ de vecteurs lisse sur $\mathbb{R}$ ne s'annulant qu'en 0.

Étape 4. Un avantage des feuilletages nets est que leurs feuilles toriques ont une holonomie flexible. L'**étude des feuilletages sur $\mathbb{P} \times \mathbb{S}^1$ transverses au facteur** $\mathbb{S}^1$, où $\mathbb{P}$ est le pantalon, et la construction de Larcanché une fois encore permettent de montrer :

Théorème E. *Tout feuilletage net est homotope dans $\mathcal{F}^\infty(M)$ à un feuilletage malléable.*

1. un feuilletage est dit *tendu* dans une certaine région si toute feuille est coupée par une transversale fermée au feuilletage dans cette région.

Étape 5. Pour se ramener aux feuilletages nets, on utilise la **théorie géométrique des feuilletages due à Novikov** [N] : étant donné un feuilletage quelconque ξ, il existe dans M un nombre fini de tores épais disjoints $\mathbb{T}^2 \times J$ en dehors desquels le feuilletage est tendu, et sur lesquels il est transverse au facteur J et transverse au bord. Il reste alors à prouver que deux feuilletages lisses sur $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$ transverses à $[0,1]$ et au bord et coïncidant sur ce bord sont homotopes relativement au bord parmi les feuilletages transverses à $[0,1]$. Ceci se déduit du **théorème C, combiné aux résultat de Szekeres et Kopell** déjà évoqués, mais nécessite donc de passer par les feuilletages $\mathcal{C}^1$. Ainsi,

Théorème F. *Tout feuilletage $\mathcal{C}^\infty$ est homotope dans $\mathcal{F}^1(M)$ à un feuilletage net.*

7. Programme de recherche

Mes travaux de thèse et de post-doctorat suggèrent plusieurs pistes de recherche que je souhaite explorer. Je les répartis elles aussi en deux grands thèmes, en autorisant toutefois quelques incursions d'un thème dans l'autre, la distinction étant principalement formelle. Les numéros et notations utilisés ci-dessous sont ceux du chapitre précédent (6. Résumé des travaux).

Concernant les feuilletages

Piste 1. La plupart des méthodes mises en oeuvre pour démontrer le théorème A (constructions d'Eliashberg, de Larcanché, astuce de Thurston...) s'appliquent à des familles de feuilletages dépendant d'un nombre quelconque de paramètres. Dès lors, la conjecture suivante semble très accessible :

Conjecture. *Soit $\mathcal{N}^\infty(M)$ l'espace des feuilletages nets d'une variété close M de dimension 3. L'inclusion $\mathcal{N}^\infty(M) \to \mathcal{P}^\infty(M)$ est une équivalence d'homotopie faible.*

Projets à plus long terme. On aimerait aussi conjecturer que l'espace des représentations de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathcal{D}^\infty_+[0,1]$ est connexe, et même contractile, ce qui entraînerait que l'inclusion $\mathcal{F}^\infty(M) \to \mathcal{P}^\infty(M)$ est une équivalence d'homotopie faible, mais cela paraît nettement plus hasardeux (cf. section suivante).

Il serait également intéressant de se pencher sur **d'autres classes de feuilletages** ($\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^0$, PL...). Le cadre $\mathcal{C}^1$ peut sembler propice, au vu du théorème A. Cependant l'holonomie de tels feuilletages (au voisinage de feuilles toriques notamment) est décrite par des difféomorphismes de classe $\mathcal{C}^1$, auxquels les résultats de Kopell et Szekeres ne s'appliquent pas. Or ces résultats interviennent de façon cruciale dans la preuve des théorèmes C, E et F, et la régularité $\mathcal{C}^\infty$ des feuilletages intervient également dans les contrôles quantitatifs que nécessite la construction d'Eliashberg, sur laquelle repose le théorème D. Prouver l'équivalent $\mathcal{C}^1$ du théorème A demande donc *au minimum* une adaptation non triviale des stratégies employées dans le cadre $\mathcal{C}^\infty$, et nécessite notamment de se pencher sur les représentations de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathcal{D}^1_+[0,1]$, ou encore sur les centralisateurs des difféomorphismes $\mathcal{C}^1$ de l'intervalle, qui sont loin d'être aussi « simples » que leurs homologues $\mathcal{C}^\infty$, comme le montrent notamment des travaux de Farb et Franks [F–F].

Se pose bien sûr la question de la **dimension supérieure**. Il s'agit de se demander si là encore, les constructions de Thurston peuvent servir de base à des constructions à paramètres. Malheureusement, sa démonstration en dimension supérieure à 4 est nettement plus complexe que celle en dimension 3. En outre, si l'étude de la dimension 3 passe par la compréhension des représentations de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathcal{D}^\infty_+[0,1]$ (cf. question 2), il est fort possible que la dimension supérieure nécessite l'étude des représentations d'autres groupes G (groupes fondamentaux d'hypersurfaces compactes) dans $\mathcal{D}^\infty_+[0,1]$, vaste programme qui relève plutôt de la section suivante (notons que le cas $G = \mathbb{Z}^k$ se traite de la même façon que $G = \mathbb{Z}^2$).

Concernant les difféomorphismes de l'intervalle

Projet 2. Plusieurs questions se posent pour **compléter l'étude des centralisateurs** de difféomorphismes lisses de $\mathbb{R}_+$ fixant seulement 0. On rappelle que le centralisateur $\mathcal{C}^1$ d'un tel difféomorphisme f coïncide avec le flot d'un unique champ de vecteurs $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ ayant f pour temps 1, appelé *champ de Szekeres* de f, ce qui donne une identification canonique entre $\mathcal{Z}^1_f$ et $\mathbb{R}$, avec $f \cong 1$. Supposons que le centralisateur $\mathcal{C}^\infty$ de f soit un sous-groupe propre de $\mathcal{Z}^1_f \cong \mathbb{R}$. Quelle peut alors être sa structure ? D'après Sergeraert, il peut être réduit à $\frac{1}{q}\mathbb{Z}$, pour n'importe quel $q \in \mathbb{N}^*$. D'après [4], il peut contenir $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, pour un nombre de Liouville α donné quelconque. Il s'agit maintenant de déterminer la classe exacte des nombres α pour lesquels un tel exemple existe. On sait déjà que la construction de [4] ne fonctionne que pour des α de type Liouville, pas pour des nombres diophantiens (cf. [1]). La question majeure est alors :

$\mathcal{Z}^\infty_f$ peut-il contenir un nombre diophantien et être quand-même strictement plus petit que $\mathcal{Z}^1_f \cong \mathbb{R}$?

On peut penser que des estimations inspirées de celles d'Herman [H] et Yoccoz [Y1] dans le cadre des difféomorphismes du cercle pourraient montrer qu'un champ de vecteurs dont les temps 1 et α sont lisses, pour un α diophantien, est nécessairement lisse lui-même. Il est en effet tentant d'essayer de se ramener au cas du cercle en remarquant que l'action induite par notre difféomorphisme f sur $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ est conjuguée (par un difféomorphisme lisse ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$) à celle de la translation de longueur 1 sur $\mathbb{R}$. Supposons alors que le temps α du champ de Szekeres ν_f de f soit lisse, pour un α diophantien, *i.e* que $f^\alpha \in \mathcal{Z}_f^\infty$, où $\{f^t,\, t \in \mathbb{R}\}$ désigne le flot de ν_f. Alors $\psi^{-1} \circ (f^\alpha \mid_{\mathbb{R}_+^*}) \circ \psi$ est un difféomorphisme $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ qui commute à la translation unitaire, et induit donc un difféomorphisme du cercle. Mais la théorie des difféomorphismes du cercle n'aura rien à nous apprendre ici, la situation étant en fait triviale : le difféomorphisme ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ défini par $\psi(t) = f^t(1)$ est *lisse* d'après Szekeres, et conjugue, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le difféomorphisme induit par f^t sur $\mathbb{R}_+^*$ à la translation de longueur t sur $\mathbb{R}$. Il n'y a donc pas de traduction directe de notre problème sur $\mathbb{R}_+$ en problème sur le cercle, les problèmes de régularité sur $\mathbb{R}_+$ se situant précisément au point fixe 0, que l'on oublie lorsqu'on se ramène au cercle.

Un parallèle est néanmoins possible entre les deux situations. De nombreux résultats sur le cercle reposent sur des estimations des quantités $\|T^{q_n} - \mathrm{Id}\|_r$, $r \geq 0$, où $T \in \mathcal{D}_+^\infty(\mathbb{S}^1)$ est le difféomorphisme étudié, de nombre de rotation irrationnel α, et p_n/q_n, $n \geq 0$, désignent les réduites de α. Or c'est le même type de quantités que l'on doit estimer pour établir la régularité du champ de Szekeres d'un difféomorphisme de la demi-droite. En effet, si f est un difféomorphisme lisse de $\mathbb{R}_+$ sans autre point fixe que 0, α un élément irrationnel de son centralisateur $\mathcal{C}^\infty$, p_n/q_n les réduites d'α, et si l'on pose $\alpha_n = q_n\alpha - p_n$, alors on montre facilement que $\alpha_n^{-1}(f^{\alpha_n} - \mathrm{Id})$ converge point par point vers ν_f sur $\mathbb{R}_+$. Pour prouver la régularité de ν_f, on peut donc essayer de contrôler $\|f^{\alpha_n} - \mathrm{Id}\|_r = \|f^{-p_n} \circ (f^\alpha)^{q_n} - \mathrm{Id}\|_r$, en s'inspirant des méthodes employées pour contrôler $\|T^{q_n} - \mathrm{Id}\|_r$.

Ce parallèle suggère d'autres questions :

– *$\mathcal{Z}_f^\infty \subset \mathbb{R}$ peut-il être dense et dénombrable, ou a-t-il nécessairement la puissance du continu ?*

– *Existe-t-il une relation arithmétique particulière entre deux éléments de $\mathcal{Z}_f^\infty$ quand celui-ci est un sous-groupe propre de $\mathcal{Z}_f^1 \cong \mathbb{R}$?*

Projet à plus long terme. Je souhaite également **poursuivre mes recherches sur la question 2** : l'espace des représentations de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathcal{D}_+^\infty[0,1]$ est-il connexe par arcs ? Deux directions sont à envisager : prouver la connexité, ou trouver un contre-exemple.

Pour trouver un contre-exemple, il s'agit d'exhiber un couple (f, g) de difféomorphismes commutant qui ne puisse pas être relié au couple $(\mathrm{Id}, \mathrm{Id})$ par un chemin de tels couples. Il vaut donc mieux partir d'un difféomorphisme f dont le centralisateur n'est ni connexe, ni cyclique. Le premier exemple qui vient à l'esprit est celui d'un f sans point fixe sur $]0,1[$ et dont les germes en 0 et 1 sont conjugués au résultat du théorème B. Malheureusement, dans ce cas précis, pour tout $g \in \mathcal{Z}_f^\infty$, on peut construire explicitement le chemin (f_t, g_t) entre (f, g) et $(\mathrm{Id}, \mathrm{Id})$.

Voyons maintenant pourquoi la connexité pose problème, même dans le cas *a priori* plus simple de difféomorphismes ne fixant que 0 et 1. Il existe (nous venons d'en donner un exemple particulier) des difféomorphismes lisses f et g de $[0, 1]$ qui sont respectivement les temps 1 et α d'un champ de vecteurs ν de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, ne s'annulant pas sur $]0, 1[$, et dont d'autres temps ne sont pas $\mathcal{C}^2$. Essayons, sans rien savoir de plus sur f et g, de relier (f, g) à $(\mathrm{Id}, \mathrm{Id})$ par un chemin continu (f_t, g_t) de difféomorphismes lisses qui commutent. Prendre pour f_t et g_t les temps t et $t\alpha$ de ν ne convient pas, ces difféomorphismes n'étant que $\mathcal{C}^1$ pour certaines valeurs de t. On peut avoir envie de lisser ν en 0 et 1 par un chemin ν_t, avec $\nu_0 = \nu$ et ν_t lisse pour tout $t > 0$, et de prendre pour f_t et g_t les temps 1 et α de ν_t (cette fois-ci f_t et g_t sont bien lisses). Malheureusement, la famille ν_t n'étant continue qu'en topologie $\mathcal{C}^1$, il n'y a pas de raison que les familles f_t et g_t soient continues pour une topologie plus forte (et de fait, si l'on construit ν à partir de la proposition 1 et ν_t de la façon la plus naïve qui soit, on peut vérifier explicitement que ces familles ne sont pas continues en topologie $\mathcal{C}^2$).

En dépit de ces premières tentatives infructueuses, il reste de nombreuses pistes à explorer.

Comme nous l'évoquions dans la section précédente, outre la connexité de l'espace des représentations de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathcal{D}_+^\infty[0, 1]$, et plus généralement son type d'homotopie (cet espace est-il contractile ?), on peut s'intéresser aux espaces de représentations d'autres groupes de présentation finie dans $\mathcal{D}_+^\infty[0, 1]$...

Références

[A–K] D. V. Anosov et A. B. Katok — *New examples in smooth ergodic theory. Ergodic diffeomorphisms.* Trans. Moscow Math. Soc. **23** (1970), 1–35.

[E] Y. Eliashberg — *Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds.* Invent. Math. **98** (1989), 623–637.

[F–F] B. Farb et J. Franks — *Groups of homeomorphisms of one-manifolds III : nilpotent subgroups.* Ergod. Th. & Dynam. Sys. **23** (2003), 1467–1484.

[F–K] B. Fayad et A. B. Katok — *Constructions in elliptic dynamics.* Ergodic Theory & Dynam. Systems **24** (2005), no. 5, 1477–1520.

[H] M. R. Herman — *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **49** (1979), 5–233.

[K] N. Kopell — *Commuting diffeomorphisms.* In *Global Analysis*, Proc. Sympos. Pure Math. XIV, Amer. Math. Soc. (1968), 165–184.

[La] A. Larcanché — *Topologie locale des espaces de feuilletages en surfaces des variétés fermées de dimension 3.* Comment. Math. Helvetici **82** (2007), 385–411.

[Li] W. B. R. Lickorish — *A foliation dor 3-manifolds.* Ann. of Math., **82** (1965), 414–420.

[M] J. Mather — *Commutators of diffeomorphisms.* Comment.Math. Helvetici **49** (1974), 512–528.

[N] S. P. Novikov — *Topology of foliations.* Trans. Moscow Math. Soc. **14** (1965), 248–278 (en Russe), A.M.S Translation (1967), 268–304.

[Se] F. Sergeraert — *Feuilletages et difféomorphismes infiniment tangents à l'identité.* Invent. Math. **39** (1977), 253–275.

[Sz] G. Szekeres — *Regular iteration of real and complex functions.* Acta Math. **100** (1958), 203–258.

[T1] W. P. Thurston — *A local construction of foliations for three-manifolds.* Differential topology (Proc. Sympos. Pure Math. **27**, Stanford Univ., California, 1973), Amer. Math. Soc. (1975), 315–319.

[T2] W. P. Thurston — *Existence of codimension-one foliations.* Ann. of Math. (2) **104** (1976), no. 2, 249–268.

[W] J. Wood — *Foliations on 3-manifolds.* Ann. of Math. **89** (1969), 336–358.

[Y1] J-C. Yoccoz — *Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **17** (1984), 333–359.

[Y2] J-C. Yoccoz — *Centralisateurs et conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle.* Astérisque **231** (1995), 89-242.