

Centralisateurs des difféomorphismes de la demi-droite

Hélène EYNARD

Résumé

Soit f un difféomorphisme lisse de \mathbb{R}_+ fixant seulement l'origine, et \mathcal{Z}^r son centralisateur dans le groupe des difféomorphismes \mathcal{C}^r . Des résultats classiques de Kopell et Szekeres montrent que \mathcal{Z}^1 est toujours un groupe à un paramètre. En revanche, Sergeraert a construit un f dont le centralisateur \mathcal{Z}^∞ est réduit au groupe des itérés de f . On présente ici le résultat principal de [Ey1] : \mathcal{Z}^∞ peut en fait être un sous-groupe propre et non-dénombrable (donc dense) de \mathcal{Z}^1 .

Abstract

Let f be a smooth diffeomorphism of the half-line fixing only the origin and \mathcal{Z}^r its centralizer in the group of \mathcal{C}^r diffeomorphisms. According to well-known results of Szekeres and Kopell, \mathcal{Z}^1 is a one-parameter group. On the other hand, Sergeraert constructed an f whose centralizer \mathcal{Z}^∞ reduces to the infinite cyclic group generated by f . We present here the main result of [Ey1]: \mathcal{Z}^∞ can actually be a proper and uncountable (hence dense) subgroup of \mathcal{Z}^1 .

1 Introduction

Soit f un difféomorphisme lisse de \mathbb{R}_+ ayant pour seul point fixe 0. Le but de cet exposé est de comprendre à quoi peut ressembler l'ensemble des difféomorphismes lisses de \mathbb{R}_+ qui commutent avec f . C'est une question qui apparaît de façon naturelle (comme sous-question) lorsqu'on s'intéresse aux actions lisses de \mathbb{Z}^2 sur $[0, 1]$ ou sur le cercle (préservant l'orientation). Il s'avère judicieux de commencer par regarder le centralisateur \mathcal{C}^1 de f , que la théorie classique décrit complètement.

On note \mathcal{D}^r , $r \geq 1$ (resp. $r = 0$), le groupe des difféomorphismes \mathcal{C}^r (resp. des homéomorphismes) de \mathbb{R}_+ , muni de la topologie de la convergence \mathcal{C}^r sur les compacts de \mathbb{R}_+ , et \mathcal{Z}_f^r le centralisateur de f dans \mathcal{D}^r , muni de la topologie induite :

$$\mathcal{Z}_f^r = \{g \in \mathcal{D}^r \mid g \circ f = f \circ g\} \subset \mathcal{D}^r.$$

1.1 Centralisateur \mathcal{C}^0

En guise d'échauffement, commençons par décrire \mathcal{Z}_f^0 . On suppose dorénavant, pour fixer les idées, que $f(x) < x$ pour tout $x > 0$. Soit $g \in \mathcal{Z}_f^0$ et $x = g(1)$. Comme g commute avec f ,

$$g(f(1)) = f(g(1)) = f(x),$$

donc g induit un homéomorphisme entre les domaines fondamentaux $[f(1), 1]$ et $[f(x), x]$. Réciproquement, soit $x > 0$ et g un homéomorphisme quelconque de $[f(1), 1]$ dans $[f(x), x]$ préservant l'orientation. Il existe un unique $\tilde{g} \in \mathcal{Z}_f^0$ induisant g sur $[f(1), 1]$; c'est l'homéomorphisme défini par :

$$\tilde{g}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{g}|_{[f^{n+1}(1), f^n(1)]} = f^n \circ g \circ f^{-n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z}$$

(ces relations déterminent complètement \tilde{g} , les intervalles $]f^{n+1}(1), f^n(1)[$ constituant une partition de $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$, et on vérifie facilement que \tilde{g} est bien un homéomorphisme). On exhibe alors aisément un homéomorphisme (non canonique) entre \mathcal{Z}_f^0 et $\mathbb{R} \times \text{Homeo}(J)$, pour un segment J quelconque. Il existe ainsi une description générale des centralisateurs \mathcal{Z}_f^0 , valable pour tout $f \in \mathcal{D}^\infty$ fixant seulement 0. On va voir que c'est aussi le cas pour \mathcal{Z}_f^1 .

Remarque. On ne s'est servi nulle part de la régularité de f dans ce paragraphe. Elle aura en revanche de l'importance dans le paragraphe suivant.

1.2 Centralisateur \mathcal{C}^1

Un point remarquable dans l'étude de ces objets est le gouffre qui sépare les régularités \mathcal{C}^0 et \mathcal{C}^1 : le centralisateur \mathcal{C}^1 de f est beaucoup plus petit que son centralisateur \mathcal{C}^0 , c'est (toujours) un groupe à un paramètre de difféomorphismes \mathcal{C}^1 . Ce fait découle des deux théorèmes suivants. Outre les références originales [Sz, Ko], on peut consulter [Na] et [Yo] par exemple, pour des preuves détaillées (et bien plus).

Théorème (Szekeres [Sz]). *Tout difféomorphisme $f \in \mathcal{D}^r$, $r \geq 2$, ayant 0 pour seul point fixe est le temps 1 du flot d'un champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ et \mathcal{C}^{r-1} sur \mathbb{R}_+^* .*

Théorème (Lemme de Kopell [Ko]). *Soient f et g deux difféomorphismes de \mathbb{R}_+ qui commutent, de classe \mathcal{C}^2 et \mathcal{C}^1 respectivement. Si f n'a pas de point fixe dans \mathbb{R}_+^* et si g en a au moins un, alors $g = \text{id}$.*

Remarque. Ces énoncés (et leur corollaire) sont faux si l'on suppose f de classe \mathcal{C}^1 seulement.

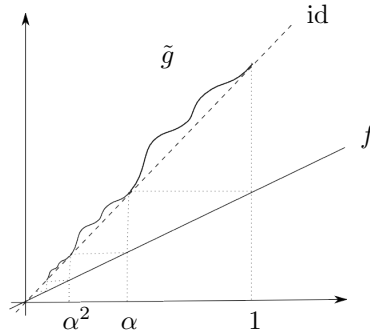
Corollaire. *Soit $f \in \mathcal{D}^r$, $r \geq 2$, fixant seulement 0. Il existe un unique champ de vecteurs ν_f de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ dont f soit le flot au temps 1. On l'appellera champ de Szekeres de f . Le centralisateur \mathcal{Z}_f^1 est réduit au flot de ce champ de vecteurs et est donc un groupe à un paramètre de difféomorphismes \mathcal{C}^1 .*

Arrêtons-nous un instant sur ce phénomène. Dans le cas \mathcal{C}^0 traité au paragraphe précédent, le fait que le domaine de f soit fermé en 0 ne jouait aucun rôle ; il serait revenu au même de décrire le centralisateur \mathcal{C}^0 du difféomorphisme f^* induit par f sur \mathbb{R}_+^* . Dans le cas \mathcal{C}^1 au contraire, le point fixe change tout. Pour nous en convaincre, intéressons-nous au centralisateur \mathcal{C}^1 de f^* . On peut procéder comme dans le paragraphe précédent pour construire une multitude de difféomorphismes \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}_+^* qui commutent avec f^* . Pour tout $x > 0$ et tout \mathcal{C}^1 -difféomorphisme g de $[f(1), 1]$ dans $[f(x), x]$ préservant l'orientation et satisfaisant $Dg(f(1)) = Dg(1) \frac{Df(x)}{Df(1)}$ (condition nécessaire évidente pour que g se prolonge en difféomorphisme \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}_+^* commutant avec f^*), on vérifie facilement que l'application $\tilde{g} : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par

$$\tilde{g} |_{[f^{n+1}(1), f^n(1)]} = f^n \circ g \circ f^{-n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z}$$

est un difféomorphisme \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}_+^* qui commute avec f^* . Il se prolonge sans problème en homéomorphisme de \mathbb{R}_+ , mais il n'y a en revanche aucune raison que le prolongement soit \mathcal{C}^1 jusqu'en 0. Et de fait, ce qu'affirme le lemme de Kopell, c'est que pour un $x > 0$ donné, il y a *au plus un* $g : [f(1), 1] \rightarrow [f(x), x]$ pour lequel \tilde{g} se prolonge en difféomorphisme \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}_+ .

Essayons de comprendre ce qui se passe sur un exemple simple : prenons pour f l'homothétie de rapport $\alpha < 1$, et pour g un difféomorphisme \mathcal{C}^1 de $[f(1), 1] = [\alpha, 1]$ dans lui-même, \mathcal{C}^1 -tangent à l'identité au bord. Dans cette situation, \tilde{g} est simple à décrire : $\tilde{g} |_{[\alpha^{n+1}, \alpha^n]}$ est conjugué à g par l'homothétie de rapport α^n . Autrement dit, \tilde{g} a l'allure suivante :



En particulier, $D\tilde{g} \circ f^n = D\tilde{g}$ pour tout n . Notons encore \tilde{g} le prolongement de \tilde{g} en homéomorphisme de \mathbb{R}_+ , et supposons que ce prolongement est \mathcal{C}^1 . La dérivée de \tilde{g} en 0 est nécessairement 1, puisque 0 est un point d'accumulation de points fixes de \tilde{g} . Mais pour tout $x > 0$ et pour tout n , $D\tilde{g}(x) = D\tilde{g}(\alpha^n x)$, donc

$$D\tilde{g}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} D\tilde{g}(\alpha^n x) = D\tilde{g}(0) = 1$$

puisque \tilde{g} est \mathcal{C}^1 , ce qui signifie que \tilde{g} est l'identité.

La preuve complète du Lemme de Kopell (que nous venons de démontrer pour les homothéties) demande un peu plus d'efforts, mais le cas particulier ci-

dessus permet déjà d'entrevoir la différence entre le problème \mathcal{C}^0 et le problème \mathcal{C}^1 , et de constater qu'elle se concentre au voisinage du point fixe de f .

Maintenant, comment caractériser les rares g qui se prolongent en éléments de \mathcal{Z}_f^1 ? Ou, de façon équivalente, à quoi ressemble le fameux champ de Szekeres ν_f qui engendre tout le centralisateur \mathcal{C}^1 de f ? On peut l'exprimer de façon « explicite » :

$$\nu_f = \lambda \lim_{k \rightarrow +\infty} (f^k)^* \eta \quad (1)$$

où

$$\eta = (f - \text{id})\partial_x, \quad \lambda = \begin{cases} \frac{\log Df(0)}{Df(0)-1} & \text{si } Df(0) \neq 1 \\ 1 & \text{si } Df(0) = 1 \end{cases}$$

et $(f^k)^*\eta$ désigne le tiré en arrière du champ de vecteurs η par le k -ième itéré de f . Pour un f dilatant (*i.e.* tel que $f(x) > x$ pour tout $x > 0$), il faut remplacer $+\infty$ par $-\infty$ dans l'expression (1). La preuve du théorème de Szekeres consiste à montrer que la suite de champs de vecteurs $(f^k)^*\eta$ converge en topologie \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ et \mathcal{C}^{r-1} sur \mathbb{R}_+^* . En revanche, comme le sous-entend l'énoncé, on ne peut en général pas espérer de convergence plus forte sur \mathbb{R}_+ (ce qui motive le paragraphe suivant).

1.3 Centralisateur \mathcal{C}^∞

On veut maintenant décrire \mathcal{Z}_f^∞ (pour un f lisse). On peut déjà faire deux remarques élémentaires :

- \mathcal{Z}_f^∞ est inclus dans \mathcal{Z}_f^1 (et constitué des temps du flot de ν_f qui sont lisses);
- \mathcal{Z}_f^∞ contient tous les itérés de f et de son inverse.

Et c'est en fait tout ce qu'on peut dire (qui soit vrai pour tout f). En effet, les deux cas limites permis par les inclusions :

$$\mathbb{Z} \cong \{f^n, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{Z}_f^\infty \subset \mathcal{Z}_f^1 \cong \mathbb{R}$$

peuvent se produire. Si le champ de Szekeres de f est lisse, alors bien entendu $\mathcal{Z}_f^\infty = \mathcal{Z}_f^1$. D'après un résultat de F. Takens [Ta], c'est notamment le cas si f n'est pas infiniment tangent à l'identité en 0. D'après F. Sergeraert [Se, §3], c'est aussi le cas si f est infiniment tangent à l'identité en 0 mais n'oscille pas trop au sens où

$$\sup_{0 < y \leq x} (y - f(y)) = O(x - f(x)). \quad (2)$$

Mais dans le même article, il construit un difféomorphisme f dont le centralisateur \mathcal{C}^2 est strictement contenu dans \mathcal{Z}_f^1 (ce qui signifie en particulier que ν_f n'est pas \mathcal{C}^2), et on peut en fait vérifier que dans son exemple, \mathcal{Z}_f^2 (et a fortiori \mathcal{Z}_f^∞) est réduit au groupe engendré par f . Autrement dit, ν_f est un champ de vecteurs \mathcal{C}^1 dont seuls les temps entiers du flot sont \mathcal{C}^2 (et en fait lisses). Le

coeur de cet exposé va consister à montrer qu’il peut se passer des choses encore plus compliquées :

Théorème 1. *Il existe un difféomorphisme lisse f de \mathbb{R}_+ fixant seulement l’origine, dont le centralisateur \mathcal{C}^r , pour tout $2 \leq r \leq \infty$, est un sous-groupe propre et non dénombrable du groupe à un paramètre \mathcal{Z}_f^1 .*

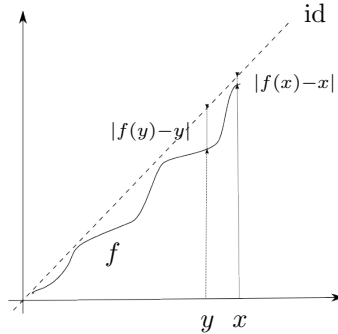
Ce théorème découle de la proposition suivante, en prenant pour f le temps 1 du champ de vecteurs qu’elle fournit.

Proposition 2. *Il existe un champ de vecteurs ν complet \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ et ne s’annulant qu’en 0 dont le flot f^t au temps t n’est pas \mathcal{C}^2 en 0 pour $t = 1/2$ mais est lisse sur \mathbb{R}_+ pour tout $t \in \mathbb{Z} \oplus \sum_{\tau \in K} \tau\mathbb{Z}$, où $K \subset \mathbb{R}$ est un ensemble de Cantor.*

Ce résultat fait l’objet de l’article [Ey1]. Le point clef de la preuve, esquissée dans les deux sections suivantes, est d’interpréter la construction de Sergeraert évoquée précédemment en termes de déformation par conjugaisons successives, ce qui permet de l’enrichir par des techniques de type Anosov–Katok [A–K] pour obtenir la proposition 2 (on pourra consulter [F–K] pour une présentation des méthodes « à la Anosov–Katok », et pour d’autres références sur le sujet).

2 Construction de Sergeraert

On explique ici comment Sergeraert construit un difféomorphisme lisse f de \mathbb{R}_+ sans autre point fixe que 0 dont le centralisateur \mathcal{C}^∞ est réduit au groupe des itérés de f . Notons que d’après le théorème de Takens évoqué précédemment et le critère (2) de Sergeraert qui le suit, ce f va nécessairement être infiniment tangent à l’identité en 0, tout en « oscillant » (cf. figure ci-dessous).



Sergeraert part d’un difféomorphisme f_0 qui est le flot au temps 1 d’un champ de vecteurs lisse ν_0 « bien choisi » (décrit plus loin). Il lui fait subir une infinité de « petites » perturbations (explicites) à supports disjoints de plus en plus proches de 0, notées γ_k , $k \in \mathbb{N}^*$, de sorte que

$$f = f_0 + \sum_{k \geq 1} \gamma_k$$

soit encore un difféomorphisme lisse de \mathbb{R}_+ (il suffit pour cela que la somme converge en topologie \mathcal{C}^∞ et soit \mathcal{C}^1 -petite par rapport à f_0), mais que son champ de Szekeres, lui, ne soit plus lisse. Plus précisément, il fait en sorte que le temps 1/2 du champ ainsi obtenu ne soit pas \mathcal{C}^2 .

Remarque. D'après le théorème de Szekeres, le champ de Szekeres de f et son flot au temps 1/2 sont lisses sur \mathbb{R}_+^* . Leur défaut de régularité se situe en 0.

Il n'est pas évident (même quand on connaît leur expression) de comprendre pourquoi les perturbations γ_k ont cet effet sur le champ de Szekeres de f_0 et sur le temps 1/2 de son flot. Pour mieux voir ce qui se passe, on va traduire la construction de Sergeraert en termes de « déformation par conjugaison ». Pour cela, on oublie ce qui précède, et on reprend la construction depuis le début, dans un langage différent.

On commence avec le même champ de vecteurs lisse ν_0 (celui de Sergeraert, décrit ci-dessous) et on va cette fois construire le champ ν recherché (*i.e* un champ dont le flot est lisse au temps 1 et pas \mathcal{C}^2 au temps 1/2) comme limite d'une suite de déformations ν_k , chaque ν_k étant le tiré-en-arrière $h_k^*\nu_0$ de ν_0 par un difféomorphisme lisse h_k de \mathbb{R}_+ . Le flot f_k^t de ν_k est alors relié au flot f_0^t de ν_0 par $f_k^t = h_k^{-1} \circ f_0^t \circ h_k$. Il s'agit donc de construire les conjugaisons h_k de sorte que f_k^1 converge en topologie \mathcal{C}^∞ mais que $f_k^{1/2}$ ne converge qu'en topologie \mathcal{C}^1 (en particulier les h_k doivent diverger en topologie \mathcal{C}^2). Pour cela, l'allure du champ initial est déterminante : il ne s'annule qu'en 0, est négatif ailleurs, et son graphe a l'allure d'un paysage sous-marin formé d'une alternance de fosses L_n et de plateaux H_n dont les altitudes respectives $-v_n$ et $-u_n$ (mesurées depuis la surface, de sorte que $0 < u_n < v_n$), tendent vers 0 très vite quand n tend vers $+\infty$ (si bien que ν_0 est infiniment plat en 0), mais oscillent violemment au sens où les quotients v_n/u_n tendent vers l'infini (concrètement, dans l'exemple de Sergeraert, $u_n = 2^{-n^4}$, $v_n = 2^{-n^2}$, et L_n est situé entre les abscisses 2^{-n-1} et 2^{-n} , où sont centrés les plateaux H_{n+1} et H_n respectivement).

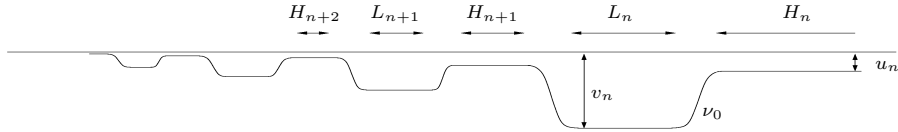


FIGURE 1 – Allure de ν_0 .

Il découle de ce comportement que si un élément f_0^t du flot envoie un segment $S \subset L_n$ (resp. H_n) dans la région L_n , alors sa restriction à S est la translation $x \mapsto x - tv_n$ (resp. une application affine de grande pente v_n/u_n). C'est une conséquence directe de l'invariance de ν_0 par son flot : $\nu_0 \circ f_0^t = \nu_0 \times Df_0^t$.

Voyons maintenant en quoi ceci va nous aider à construire les conjugaisons h_k souhaitées. On définit les h_k inductivement. On construit à l'étape k un

difféomorphisme g_k , et on définit $h_k = g_k \circ h_{k-1}$ et $\nu_k = h_k^* \nu_0 = h_{k-1}^* g_k^* \nu_0$, si bien que les flots de ν_k et ν_{k-1} sont donnés respectivement par

$$\begin{aligned} f_k^t &= h_{k-1}^{-1} \circ (g_k^{-1} \circ f_0^t \circ g_k) \circ h_{k-1} \quad \text{et} \\ f_{k-1}^t &= h_{k-1}^{-1} \circ f_0^t \circ h_{k-1}. \end{aligned}$$

Intuitivement, ce qu'on veut c'est donc construire g_k de sorte que $g_k^{-1} \circ f_0^1 \circ g_k - f_0^1$ soit très petit en norme \mathcal{C}^k (disons borné par 2^{-k}) mais que $g_k^{-1} \circ f_0^{1/2} \circ g_k - f_0^{1/2}$ soit grand en norme \mathcal{C}^2 (le domaine \mathbb{R}_+ n'étant pas compact, cela n'a pas de sens de parler de norme \mathcal{C}^k sur \mathbb{R}_+ ; mais comme on s'intéresse seulement au voisinage de 0, on peut se limiter à la norme \mathcal{C}^k sur $[0, 1]$ par exemple).

Pour remplir la première de ces deux conditions, on va prendre un g_k qui :

- commute avec f_0^1 partout sauf dans une petite région : un intervalle fondamental S_k de f_0^1 situé « au milieu de L_k » (pour k assez grand, chaque orbite de f_0^1 a beaucoup de points dans L_k , deux points successifs étant distant de $v_k \ll 2^{-k-1}$);
- est \mathcal{C}^k -proche de l'identité sur cette région.

Plus précisément, on prend g_k égal à l'identité près de 0 et de la forme $\text{id} + \gamma_k$ sur S_k , où γ_k est une fonction \mathcal{C}^k -petite à support dans S_k , dont l'allure sera précisée ultérieurement. Ces informations suffisent à déterminer g_k sur \mathbb{R}_+ tout entier (cf. Introduction). En particulier, g_k vaut nécessairement l'identité sur $[0, \inf S_k]$. Bien que ce ne soit pas évident à première vue, le résultat de cette étape k est précisément :

$$f_k^1 = f_{k-1}^1 + \gamma_k,$$

(et on rejoint ici la première version de la construction de Sergeraert). Justifions-le rapidement. Par construction, $h_{k-1} = g_{k-1} \circ \dots \circ g_1$ vaut l'identité sur L_k (puisque pour tout $j \leq k-1$, le support de g_j est inclus dans $[\inf S_j, +\infty[\subset [\inf L_{k-1}, +\infty[)$). Ainsi, sur $S_k \subset L_k$,

$$\begin{aligned} f_k^1 - f_{k-1}^1 &= h_{k-1}^{-1} \circ (g_k^{-1} \circ f_0^1 \circ g_k) \circ h_{k-1} - h_{k-1}^{-1} \circ f_0^1 \circ h_{k-1} \\ &= g_k^{-1} \circ f_0^1 \circ g_k - f_0^1 \\ &= \text{id}^{-1} \circ (\text{id} - v_k) \circ (\text{id} + \gamma_k) - (\text{id} - v_k) \\ &= \gamma_k. \end{aligned} \tag{3}$$

Et en dehors de S_k , l'hypothèse de commutativité signifie que $g_k^{-1} \circ f_0^1 \circ g_k = f_0^1$, donc $f_k^1 = f_{k-1}^1$. Ainsi, l'étape k a un effet *local* sur f_{k-1}^1 (localisé dans S_k). Pourtant, observons bien que le difféomorphisme g_k utilisé pour la conjugaison diffère de l'identité bien au-delà de S_k (cette affirmation clef va devenir claire dans quelques instants).

Voyons maintenant quelle forme donner à γ_k pour que $g_k^{-1} \circ f_0^{1/2} \circ g_k - f_0^{1/2}$ soit grand en norme \mathcal{C}^2 . Le choix de Sergeraert est représenté ci-dessous.

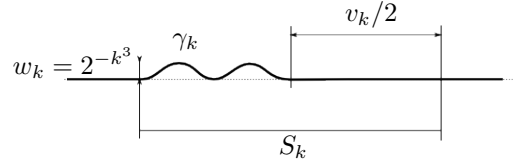


FIGURE 2 – Allure de γ_k

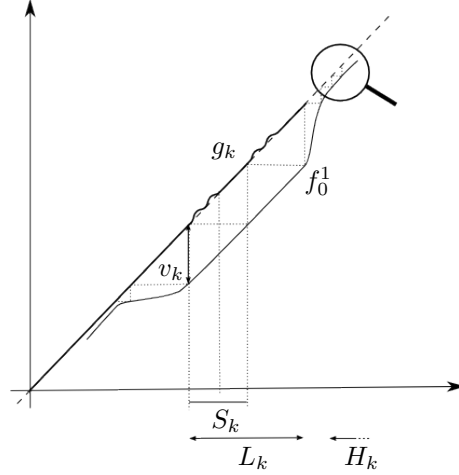


FIGURE 3 – Allure de g_k sur L_k .

On peut alors visualiser g_k sur L_k et H_k . Sur $[\sup S_k, \sup L_k]$, f_0^1 coïncide avec la translation de $-v_k$, donc g_k commute avec cette translation (cf. figure 3). Plus généralement, pour tout $p \geq 1$, si S_k^p désigne le segment $f_0^{-p}(S_k)$,

$$g_k |_{S_k^p} = f_0^{-p} \circ (g_k |_{S_k}) \circ f_0^p.$$

Or si p est tel que $S_k^p \subset H_k$, on a vu que la restriction de f_0^p à S_k^p était une application affine de la forme

$$x \in S_k^p \mapsto \frac{v_k}{u_k} x + c_k,$$

où c_k désigne une constante réelle. Ainsi, $g_k |_{S_k^p}$ est conjugué à $g_k |_{S_k}$ par une application affine ayant un très grand coefficient directeur :

$$(g_k |_{S_k^p})(x) = \left(\frac{v_k}{u_k}\right)^{-1} (g_k |_{S_k}) \left(\frac{v_k}{u_k} x + c_k\right) - \frac{c_k u_k}{v_k}. \quad (4)$$

L'allure de g_k sur H_k est donc celle de la figure 4.

Grâce à l'allure particulière (dysymétrique) de γ_k , un calcul similaire à (3) montre que $g_k^{-1} \circ f_0^{1/2} \circ g_k - f_0^{1/2}$ est exactement égal à $g_k - \text{id}$ sur J_k^p , intervalle

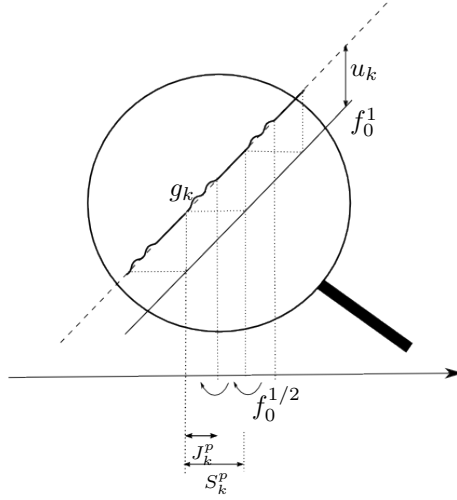


FIGURE 4 – Allure de g_k sur H_k .

moitié de S_k^p (méditer la figure 4). Or à cet endroit, d'après (4) et par définition de g_k (ou, si l'on préfère, d'après la figure 4),

$$D^2(g_k - \text{id}) = \frac{v_k}{u_k} D^2\gamma_k \circ \left(\frac{v_k}{u_k} \text{id} + c_k \right),$$

Mais les paramètres u_k , v_k et w_k ont justement été choisis pour que $\frac{v_k}{u_k} \|\gamma_k\|_2$ diverge avec k . Ainsi, comme on le souhaitait, $g_k^{-1} \circ f_0^{1/2} \circ g_k - f_0^{1/2}$ est grand en norme \mathcal{C}^2 . Il s'agit alors de vérifier que lorsqu'on superpose toutes ces perturbations g_k (*i.e* lorsqu'on conjugue par $h_k = g_k \circ \dots \circ g_1$) et qu'on fait tendre k vers l'infini, on obtient bien l'effet souhaité sur le temps 1/2 du flot du champ limite (cf. [Ey2] pour plus de détails).

3 Combinaison avec les méthodes de type Anosov–Katok

On explique maintenant de façon succincte (sans les calculs) comment modifier la construction de Sergeraert pour obtenir la proposition 2. On part du même champ de vecteurs ν_0 , et on définit là aussi ν comme limite de déformations ν_k , chaque ν_k étant le tiré en arrière $h_k^*\nu_0$ de ν_0 par un difféomorphisme lisse h_k de \mathbb{R}_+ . Là encore, le flot f_k^t de ν_k est relié au flot de ν_0 par $f_k^t = h_k^{-1} \circ f_0^t \circ h_k$. Mais cette fois, on construit les h_k de sorte que les difféomorphismes f_k^t convergent en topologie \mathcal{C}^∞ pour un ensemble dense de t , et seulement en topologie \mathcal{C}^1 pour le temps $t = 1/2$. Pour cela, on construit inductivement les difféomorphismes $g_k = h_k \circ h_{k-1}^{-1}$ de sorte qu'à l'étape k , g_k commute non plus avec f_0^1 , mais avec f_0^{1/q_k} , pour un certain entier q_k impair, en dehors d'un intervalle fondamental S_k

de f_0^{1/q_k} situé dans la région L_{n_k} , pour un certain entier n_k , mais ne commute pas avec $f_0^{1/2q_k}$. On prend encore $g_k = \text{id}$ près de 0 et de la forme $\text{id} + \gamma_k$ sur S_k (cette fois, les bosses de γ_k ont pour hauteur $w_{n_k} = 2^{-n_k^3}$ et la largeur de S_k est v_k/q_k). On impose que la norme \mathcal{C}^k de $g_k - \text{id}$ soit suffisamment petite sur S_k pour que les normes \mathcal{C}^k des applications

$$g_k^{-1} \circ f_0^t \circ g_k - f_0^t \quad \text{et} \quad h_k^{-1} \circ f_0^t \circ h_k - h_{k-1}^{-1} \circ f_0^t \circ h_{k-1}, \quad t \in \frac{1}{q_k} \mathbb{Z} \cap [0, 1],$$

soient strictement inférieures à 2^{-k} (cette contrainte dicte le choix de n_k), et on note I_k un voisinage compact de $\frac{1}{q_k} \mathbb{Z} \cap]0, 1[$ tel que l'inégalité large soit vérifiée pour tout $t \in I_k$.

Lemme 3. *Il existe un choix convenable de paramètres q_k et n_k pour lesquels l'intersection des compacts I_k est un ensemble de Cantor K constitué de temps t pour lesquels les difféomorphismes $h_k^{-1} \circ f_0^t \circ h_k$, $k \geq 1$, convergent en topologie \mathcal{C}^∞ .*

Il faut en particulier choisir à chaque étape q_k assez grand pour que $\frac{1}{q_k} \mathbb{Z}$ rencontre chaque composante connexe de I_{k-1} en au moins deux points. Une fois ce lemme prouvé, l'irrégularité de la limite des $f_k^{1/2}$ s'obtient exactement comme dans la construction de Sergeraert.

Remarque et question

On montre dans [Ey2] que les éléments irrationnels du Cantor K obtenus par une telle construction sont nécessairement des nombres de Liouville, c'est-à-dire des nombres très bien approchés par des rationnels (par opposition aux nombres diophantiens). En fait, *pour tout* nombre de Liouville τ , on peut construire un ν comme celui de la proposition 2 dont le Cantor K contient τ (cf. [Ey3]). En revanche, on ne sait pas s'il est possible de construire (par une méthode différente) un champ de vecteurs ν de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ dont les temps 1 et α du flot soient lisses, pour un α diophantien, mais dont un autre temps ne soit pas \mathcal{C}^2 .

Références

- [A–K] D. V. ANOSOV et A. B. KATOK — *New examples in smooth ergodic theory. Ergodic diffeomorphisms.* Trans. Moscow Math. Soc. **23** (1970), 1–35.
- [Ey1] H. EYNARD — *On the centralizer of diffeomorphisms of the half-line.* Prépublication Comm. Math. Helv.
- [Ey2] H. EYNARD — *Sur deux questions connexes de connexité concernant les feuilletages et leurs holonomies.* Thèse (ENS Lyon), disponible sur <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00436304/fr/>.

- [Ey3] H. EYNARD — *On the centralizer of diffeomorphisms of the half-line II. Arithmetic properties.* En préparation.
- [F–K] B. FAYAD and A. B. KATOK — *Constructions in elliptic dynamics.* Ergodic Theory Dynam. Systems **24** (2005), no. 5, 1477–1520.
- [Ko] N. KOPELL — *Commuting diffeomorphisms.* In *Global Analysis*, Proc. Sympos. Pure Math. XIV, Amer. Math. Soc. (1968), 165–184.
- [Na] A. NAVAS — *Groups of circle diffeomorphisms*, chapter 4. Arxiv.
- [Se] F. SERGERAERT — *Feuilletages et difféomorphismes infiniment tangents à l'identité.* Invent. Math. **39** (1977), 253–275.
- [Sz] G. SZEKERES — *Regular iteration of real and complex functions.* Acta Math. **100** (1958), 203–258.
- [Ta] F. TAKENS — *Normal forms for certain singularities of vector fields.* Ann. Inst. Fourier **23** (1973), 163–195.
- [Yo] J-C. YOCCOZ — *Centralisateurs et conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle.* Astérisque **231** (1995), 89-242.