

Curriculum Vitae

État Civil

Luc HILLAIRET

né le 30 décembre 1973 à Poitiers (86).

nationalité française.

marié, deux enfants.

Adresse personnelle :

184 Rue Marcel Mérieux
Allée 7
F-69007 Lyon
tel : 04 78 72 04 71

Adresse professionnelle :

ENS-Lyon, UMPA
46 allée d'Italie
F-69364 Lyon cedex 7
tel : 04 72 72 84 18
fax : 04 72 72 84 80
e-mail : lhillair@umpa.ens-lyon.fr

Situation professionnelle : Agrégé préparateur à l'École Normale Supérieure de Lyon.

Parcours :

- Depuis sept. 2002 : Agrégé Préparateur à l'ENS Lyon.
- Sept. 2000-août 2002 : Thèse de mathématiques à l'Institut Fourier (Grenoble), monitorat à l'Université Joseph Fourier (Grenoble I).
- Sept. 1998-août 2000 : Service national en coopération, professeur de mathématiques au Lycée Français de Vienne (Autriche).
- Sept. 1997-août 1998 : Thèse de mathématiques à l'Institut Fourier (Grenoble), monitorat à l'Université Joseph Fourier (Grenoble I).
- Sept. 1996-août 1997 : Thèse de mathématiques à l'Institut Fourier (Grenoble).
- Sept. 1993-août 1997 : Elève à l'ENS-Lyon.
- Sept. 1991-août 1993 : Classe préparatoire au Lycée Clemenceau (Nantes)

Langues : Bonne maîtrise de l'allemand et de l'anglais, écrit et parlé.

Divers : Logiciel Matlab.

Titres, Concours

- Inscription sur la liste de qualification aux fonctions de Maître de conférences, section 25, janvier 2003.
- Doctorat en Mathématiques de l'Université Joseph Fourier (Grenoble I), mention très honorable.
Soutenu le *24 juin 2002* à l'Institut Fourier (Grenoble).
titre : Contribution d'orbites périodiques diffractives à la formule de trace
directeur : Y. Colin de Verdière (Institut Fourier, Grenoble)
rapporteurs : R. Brummelhuis (Université de Reims et Birbeck college, Londres)
G. Popov (Université de Nantes)
Jury : Pierre Bérard (président) (Institut Fourier, Grenoble)
R. Brummelhuis
Y. Colin de Verdière
A. Joye (Institut Fourier)
G. Popov
- Sept. 1996 : DEA de Mathématiques (Université Joseph Fourier Grenoble I), mention TB
Mémoire préparé sous la direction d'Y. Colin de Verdière, à l'Institut Fourier ;
titre : Propagation des ondes sur un cône.
- Juin 1996 : Agrégation de Mathématiques, rang 27.
- Juin 1995 : Maîtrise de mathématiques pures (ENS-Lyon, Université Claude Bernard Lyon I), mention TB.
- Juin 1994 : Licence de mathématiques pures (ENS-Lyon, Université Claude Bernard Lyon I), mention TB.
- Juin 1993 : Admission à l'ENS-Lyon, rang 23.
- Juin 1991 : Baccalauréat série C, mention TB.

Activités d'enseignement :

- Agrégé Préparateur à l'ENS-Lyon (4 ans)
- Monitorat à l'Université Joseph Fourier (Grenoble I), et à l'antenne de Valence (3 ans)
- Professeur au lycée français de Vienne (2 ans)
- Projet de troisième année du CIES de Grenoble
Titre : "Valorisation de la science auprès des lycéens"

Je suis actuellement agrégé préparateur à l'ENS-Lyon ; mes activités d'enseignement sont doubles. D'une part elles consistent à préparer les étudiants pour l'épreuve orale de l'agrégation (y compris à l'épreuve de modélisation : j'ai ainsi participé à la semaine d'introduction au logiciel Matlab organisée en vue de cette épreuve). D'autre part, je suis chargé d'un TD. Pendant trois ans, j'ai fait celui relatif au cours de première année (correspondant au L3) intitulé "EDP". Ce cours abordait les sujets suivants : rudiments de distributions, espaces de Sobolev, formulation variationnelle pour une EDP elliptique, lois de conservation hyperboliques, solutions entropiques, schémas numériques, équation de la chaleur, équation des ondes. Cette année, je fais le TD du cours de deuxième année (M1) "Analyse Approfondie". Ce cours pose les bases de l'analyse fonctionnelle en établissant un panorama des espaces fonctionnels habituels, suivi d'une partie sur l'interpolation et il se termine par la théorie des distributions.

Pendant ma thèse, j'ai été trois ans moniteur à l'université de Grenoble. Au cours de ces trois années, j'ai donné des TD en première et deuxième année de DEUG scientifique à l'université Grenoble I (ou son antenne à Valence). Les sujets que j'ai pu y traiter sont assez représentatifs de ce niveau : analyse réelle, équations différentielles, algèbre linéaire ... En troisième année de monitorat au CIES de Grenoble, j'ai participé, avec d'autres moniteurs, à l'élaboration d'un projet intitulé "valorisation de la science auprès des lycéens". Nous avons organisé des visites de plusieurs laboratoires de recherche de l'université de Grenoble pour des lycéens de 1ère S. Nous sommes aussi intervenus auprès de ces lycéens pour essayer d'évaluer l'impact de ces visites sur leur conception du travail d'enseignant-chercheur. Enfin, j'ai interrompu ma thèse pendant deux ans pour effectuer mon service national en coopération. J'ai alors été professeur au lycée Français de Vienne, et j'ai enseigné à cette occasion dans tous les niveaux du collège.

Publications :

Les publications 1 à 6 seront envoyées à la commission en cas d'audition.

Acceptées

- [1] L. Hillairet. Formule de trace semi-classique sur une variété riemannienne avec un potentiel Dirac. **Comm. PDE**, 27 (9&10):1751-1791, 2002.
- [2] L. Hillairet. Formule de trace sur une surface euclidienne à singularités coniques. **C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I**, 335:1047–1052, 2002.
- [3] L. Hillairet. Contribution of periodic diffractive orbits. **Journ. Funct. Anal.**, 226:48–89, 2005.
- [4] L. Hillairet. Diffractive geodesics of polygonal billiards. **Proc. Edinb. Math. Soc.**, 49:71–86, 2006
- [5] L. Hillairet. Clustering of eigenvalues on translation surfaces.¹ Accepté aux **Annales Henri Poincaré**, 2006.

Soumises

- [6] L. Hillairet. Spectral decomposition of square-tiled surfaces. <http://www.umpa.ens-lyon/~lhillair/rech.html>, 28p, 2005.

En préparation

- [7] L. Hillairet. Dirichlet to Neumann isospectrality on translation surfaces, 2006.
- [8] L. Hillairet, C. Judge. Spectral degeneration of translation surfaces, 2006.

¹prépublié sous le titre “*Weyl’s remainder on translation surfaces*”.

Groupes de Travail :

- “Physique Mathématique”, Institut Fourier, 2000-2002
Exposé : Distributions associées à l’intersection de variétés lagrangiennes (d’après Melrose-Uhlmann)
- “Relativité Générale”, ENS-Lyon, 2004-2005.
- “Random partitions”, ENS-Lyon, 2004-2005,
Exposé : Compter des revêtements ramifiés (d’après Eskin-Okounkov).
- “Physique mathématique, Géométrie ...”, organisé par D. Gayet, Lyon 1-ENS Lyon, 2005-2006,
- “Ergodicité quantique, résonances, entropie ...” ENS-Lyon, Institut Fourier, organisé par N. Anantharaman, F. Faure et prolongé par l’ANR “Résonances et décohérence en chaos quantique” organisée par S. Nonnenmacher (CEA, Saclay).
- Projet d’ANR “dynamique dans l’espace de Teichmüller, application aux échanges d’intervalles et aux billards rationnels” organisée par P. Hubert (Aix-Marseille 3).

Organisation :

- Co-organisateur des rencontres mathématiques “Flot de Teichmüller” à l’ENS-Lyon, mai 2006.

Séjours de recherche, Collaborations :

- Du 26/03/2003 au 03/04/2003 à l’université de Northwestern (Illinois, USA) sur l’invitation de J. Wunsch.
- Du 31/10/2005 au 04/11/2005 à l’université de Neuchatel (Suisse) sur l’invitation de C. Vernicos.
- Du 04/01/2006 au 21/01/2006 à l’université de Toronto (Canada) sur l’invitation de G. Forni.
- Collaboration avec C. Judge (Indiana University), 2006.

Congrès, séminaires :

- Congrès :

- Journées semi-classiques, Lille, janvier 1997
- Journées Scattering, Marseille, mai 1997
- Journées semi-classiques, Grenoble, février 1998
- Spectral Theory and Geometry, Edinburgh, avril 1998
- Journées semi-classiques, Nantes, février 1999
- Journées semi-classiques, Paris 13, janvier 2001,
Exposé : *Formule de trace avec un potentiel Dirac*
- Atelier Billards, Montpellier, juin 2001,
Exposé : *Vers la formule de trace pour un billard polygonal*
- Semiclassical Meeting, Nantes, janvier 2003
Exposé : *Trace formula with conical singularities*
- Semiclassical methods in Physics and Chemistry, MSRI, Berkeley, avril 2003
Exposé : *Trace formula with conical singularities*
- Dynamics in Teichmüller space and applications to rational billiards, CIRM, Marseille, juillet 2003
- Quantum Chaos on hyperbolic manifolds, Guenzburg, octobre 2003.
- Semi-classical theory of eigenfunctions and PDE's, CRM-Fields Inst. Montréal - Toronto, juin 2004
Exposé : *Weyl's remainder on surfaces with many cylinders.*
- Resonances and periodic orbits : spectrum and zeta functions in quantum and classical chaos, IHP, Paris, juillet 2005.
- Partially hyperbolic dynamics, laminations, and Teichmüller flow, Fields Inst., Toronto, janvier 2006.

- Séminaires :

1. Titre : *Géodésiques diffractives d'un billard polygonal*
– université d'Aix-Marseille 2, avril 2002.
2. Titre : *Formule de trace avec singularités coniques*
– université de Nantes, mai 2002,
– université d'Avignon, juin 2002,
– université de Montpellier, juin 2002,
– université de Nancy, novembre 2002,
– université de Rennes, décembre 2002,
– université de Northwestern (Illinois, USA), avril 2003.
3. Titre : *Reste de Weyl pour les surfaces de translation*
– université de Nantes, juin 2004,

- université de Rennes, décembre 2004,
- université d’Aix-Marseille 1, février 2005,
- université de Lille 1, mars 2005.

4. Titre : *Décomposition spectrale des surfaces à petits carreaux*

- université d’Aix-Marseille 1, octobre 2004,
 - université de Rennes, décembre 2004,
 - université d’Aix-Marseille 2, février 2005,
 - université de Paris 11, avril 2005,
 - université de Neuchatel, novembre 2005,
 - université de Nancy, novembre 2005
 - université de Clermont-Ferrand, novembre 2005,
 - université d’Avignon, février 2006,
 - université de Lyon 1, février 2006,
- à venir* université de Toulouse, avril 2006.

Thématiques de recherche

Comme je le décrirai par ailleurs, l'essentiel de mes travaux de recherche vise à comprendre les relations entre le spectre d'un opérateur et une certaine dynamique sous-jacente. Ce type de problématique peut se rattacher à différentes branches des mathématiques, et j'aimerais préciser un peu ici les thématiques dont je me sens le plus proche - élargissant ainsi celles qui apparaîtront clairement dans l'exposé de mes travaux de recherche. La liste des congrès et groupes de travail auxquels j'ai participé reflète aussi assez bien mes centres d'intérêt.

Tout d'abord, je suis issu du groupe "Physique Mathématique" de l'Institut Fourier et plus précisément de sa composante semi-classique. Je suis resté proche d'un certain nombre de questions traditionnellement rattachées à ce thème : (unique) ergodicité quantique, concentration de fonctions propres (propriétés des mesures semi-classiques), théorie de la diffusion, résonances ... Remarquons qu'un certain nombre des questions ci-dessus se rattachent aussi à la géométrie en étant reformulées comme des questions sur le spectre (ou les fonctions propres) d'un laplacien riemannien.

Par ailleurs, mes travaux les plus récents concernent la théorie spectrale des surfaces de translation. Ces objets sont habituellement étudiés d'un autre point de vue (dynamique, géométrique, combinatoire ...). J'ai ainsi participé à plusieurs colloques sur des thèmes a priori éloignés de mes préoccupations d'origine mais qui nourrissent ma réflexion actuelle. Je pense notamment à l'étude du flot de Teichmüller (cf. congrès au CIRM en juillet 2003) et aux questions plus proches des systèmes dynamiques (opérateur de transfert, fonction zeta dynamique- cf colloque à l'IHP en juin 2005).

Travaux de recherche

On appelle problème "classique" l'étude d'un système dynamique hamiltonien d'énergie H sur une variété symplectique Z et problème quantique l'étude d'un opérateur autoadjoint A sur un espace de Hilbert \mathcal{H} . Dans beaucoup de situations il est possible d'associer à un problème classique un problème quantique et vice-versa. Des exemples de problèmes associés sont donnés dans le tableau suivant ((M, g) désigne une variété riemannienne) :

Problème Classique	Problème quantique
Flot géodésique dans T^*M	Laplacien dans M
$Z = T^*M, H(p, q) = g_q^*(p, p) + V(q)$	$\mathcal{H} = L^2(M) \quad A = \hbar^2 \Delta + V$
Billard dans un domaine Ω	Laplacien dans Ω avec conditions aux bord

Mes travaux de recherche s'inscrivent dans la problématique générale cherchant à comprendre la façon dont les problèmes classiques et quantiques s'influencent. Des questions typiques concernent par exemple le spectre de l'opérateur A , ou les fonctions propres associées :

- Le spectre détermine-t-il le problème classique ? (surfaces isospectrales)

- En a-t-on une description à l'aide d'objets classiques ? (conditions de Bohr-Sommerfeld)
- Comment se concentrent les fonctions propres ? (Ergodicité quantique)
- Que peut-on dire si la dynamique classique est intégrable, chaotique ? (systèmes quantiquement intégrables, chaos quantique)

D'une façon générale, la dynamique et la géométrie du problème classique jouent un rôle essentiel dans cette approche, d'une part parce que les réponses aux questions présentées ci-dessus ont d'autant plus d'intérêt que la dynamique classique est riche et d'autre part parce qu'il faut constamment interpréter géométriquement les objets quantiques qu'on manipule (opérateurs intégraux de Fourier par exemple).

Ces problèmes nécessitent donc des techniques géométriques et dynamiques pour comprendre le problème classique et des techniques relevant de la théorie spectrale et de l'analyse des équations aux dérivées partielles pour l'étude du problème quantique. Comme quasiment toutes les informations reliant les problèmes classiques et quantiques s'obtiennent en passant à la limite (limite semi-classique $\hbar \rightarrow 0$, ou limite haute fréquence), le cadre naturel pour l'étude de ces problèmes est celui de l'analyse semi-classique ou microlocale (suivant que le petit/grand paramètre est explicite ou non). Dans ce cadre général, les résultats que j'ai obtenus jusqu'à présent peuvent être regroupés de la façon suivante :

- formule de trace dans des contextes classiques singuliers,
- étude spectrale des surfaces de translation.

Je vais dans ce qui suit détailler ces résultats ainsi que les directions qui me semblent intéressantes.

Formules de trace

L'expression "formule de trace" est un terme générique pour décrire un certain nombre de résultats (en particulier et sauf dans de très rares cas, il ne s'agit pas d'une formule à proprement parler). Le théorème suivant (souvent appelé "relation de Poisson") est typique de ce genre de résultat :

Théorème 1 *Soit M une variété riemannienne compacte et Δ le laplacien (positif) associé, soit $\sigma(t)$ la distribution $\text{Trace}(\cos(t\sqrt{\Delta}))$ alors :*

$$\text{supp. sing. } \sigma \subset L,$$

où L est formé des longueurs des géodésiques périodiques de M .

Le terme formule de trace renvoie aux cas suivants pour lesquels on peut exprimer la distribution σ comme une somme de distributions explicites associées aux géodésiques périodiques :

- formule de Poisson pour un tore,

- formule de Selberg pour une surface de Riemann compacte.

L'interprétation de ces deux formules comme formules de trace associées à l'équation des ondes se fait *a posteriori*, la formule de Selberg relevant plutôt *a priori* de la géométrie hyperbolique que de l'analyse microlocale.

Dans le cas général, on essaie de compléter la relation de Poisson par la description de la singularité de σ en un point L_0 correspondant à la longueur d'une orbite périodique. Cela se fait en étudiant le comportement asymptotique de la quantité :

$$(1) \quad I(s) = \langle \sigma(t), h(t) \exp(-ist) \rangle,$$

où h localise près de L_0 . Dans la plupart des situations, on ne dispose en fait que d'une information microlocale sur le type de singularité créée en L par une géodésique de cette longueur. Concrètement, cela signifie que dans la définition de I , σ est remplacée par $\text{Tr}(\cos(t\sqrt{\Delta})\Pi)$ où Π est un opérateur microlocalisant le long de la géodésique choisie. C'est cette information que l'on appelle contribution d'une orbite à la formule de trace. La singularité complète en L_0 est alors obtenue en sommant sur toutes les orbites de cette longueur. Cela nécessite une connaissance assez poussée de l'ensemble des géodésiques périodiques.

Les formules de trace ont été établies dans diverses situations, généralisant les travaux initiaux de Duistermaat-Guillemin et Chazarain (cf [9, 5]) et la démonstration fait appel à des techniques d'analyse microlocale (calculs de *Wave-Front*, en général appliqués aux opérateurs intégraux de Fourier, cf. [8]). Dans ma thèse, je m'attache à montrer, en présence d'une ou plusieurs singularités ponctuelles, la contribution à la formule de trace d'orbites périodiques passant par les points singuliers (orbites diffractives). J'étudie plus particulièrement les deux types suivants de singularités ponctuelles.

- Potentiel Dirac :

Sur une variété M , considérer un potentiel Dirac en un point p revient à choisir une autre extension autoadjointe du laplacien défini sur $\mathcal{C}_0^\infty(M \setminus \{p\})$ (quand c'est possible). Le livre [1] fournit une introduction très complète à ce type d'objet et des motivations "physiques" à leur étude ; mentionnons notamment le problème à plusieurs corps, en remarquant toutefois qu'il ne s'agit plus d'un potentiel Dirac ponctuel, mais d'une généralisation de celui-ci. Ce problème fournit aussi un cadre naturel pour voir apparaître des orbites diffractives. De plus, on peut mettre en oeuvre une méthode perturbative qui rend les choses un peu plus simples. Ce travail est l'objet de l'article paru [14]. Si Δ_β est le potentiel Dirac en un point p associé au paramètre β et Δ_∞ le laplacien habituel sur M de dimension 3, le résultat principal est le

Théorème 2 *On note L l'ensemble des longueurs l pour lesquelles il existe k tel que*

$$l = \sum_{i=1}^k l_i,$$

où chaque l_i est la longueur d'un lacet géodésique joignant p à p . On a alors la relation suivante :

$$\text{supp. sing } Tr(\cos(t\sqrt{\Delta_\beta}) - \cos(t\sqrt{\Delta_\infty})) \subset L.$$

De plus, on donne le premier ordre de chaque singularité.

- Singularités coniques :

Le deuxième type de singularités que j'ai étudié est celui des singularités coniques. L'équation des ondes en présence de singularités coniques est un sujet intéressant (cf. [6, 12, 25]) et l'établissement de la formule de trace dans ce cadre est l'objet principal de la deuxième partie de ma thèse. J'y montre notamment le théorème suivant :

Théorème 3 *Soit M une surface compacte euclidienne à singularités coniques, Δ le laplacien sur M et σ défini comme auparavant :*

$$\text{supp. sing } \sigma \subset L,$$

où L désigne l'ensemble des longueurs des géodésiques périodiques (éventuellement diffractives) de M .

Dans la note [15], je montre la localisation des singularités telle qu'elle est exprimée dans le théorème précédent. Dans ma thèse et dans [16], je m'attache de plus à calculer la contribution principale d'orbites périodiques diffractives en fonction des diffractions rencontrées. Elle est obtenue de la façon suivante : il faut tout d'abord étudier l'ensemble des géodésiques diffractives apparaissant dans la relation de Poisson. C'est un objet géométrique, associé à une surface euclidienne à singularités coniques, qui généralise la notion de flot géodésique. Il s'agit de prendre en compte le fait qu'il y a plusieurs façons de continuer une géodésique qui frappe une singularité conique. Cet objet est intéressant à étudier déjà du point de vue classique ; il est notamment naturellement stratifié par le nombre de diffractions le long de chaque géodésique diffractive. Dans [17] je décris la géométrie locale de cet ensemble et en particulier la façon dont les strates se recollent. Pour obtenir la contribution des orbites périodiques, il faut ensuite microlocaliser le long d'une géodésique périodique g choisie. On obtient alors des opérateurs $U_g(t)$ version microlocalisée du propagateur $\exp(it\sqrt{\Delta})$. Dans la définition de $I(s)$, c'est la trace de cet opérateur qui remplace $\sigma(t)$. On a alors le théorème suivant :

Théorème 4

- *La contribution d'une orbite périodique diffractive régulière g de période L , et de période primitive L_0 est donnée, au premier ordre par*

$$I(s) \sim s^{-\frac{n}{2}} c_g h(L) e^{-isL} L_0,$$

où c_g est une constante explicite dépendant de la géodésique et n est le nombre de diffractions.

- La contribution d'une famille régulière d'orbites périodiques non-diffractives est donnée par

$$I(s) \sim \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} s^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{L}} h(L) e^{-isL} |A_g|,$$

où $|A_g|$ est l'aire balayée par la famille et L est la période (nécessairement primitive).

La notion de “régulière” découle de l'étude classique des géodésiques périodiques. Dans le cas d'une orbite diffractive cela signifie que tous les angles de diffractions sont différents de $\pm\pi$, et dans le cas d'une famille, cela signifie que les orbites diffractantes bordant la famille n'ont qu'une diffraction. Il y a deux points importants de la méthode qui méritent d'être mentionnés : tout d'abord on montre que toutes les compositions d'opérateurs et toutes les traces se font loin des points coniques (ce point est déjà détaillé dans [15]) et ensuite on se ramène le plus possible à la théorie des Opérateurs Intégraux de Fourier. Les restrictions sur les types d'orbites périodiques traités viennent de l'utilisation de l'expression exacte du propagateur près des angles de diffraction $\pm\pi$: expression dont il est difficile d'extraire la partie principale près de ces directions exceptionnelles.

Les motivations pour comprendre les formules de trace dans ces cadres singuliers étaient nombreuses et on pourra consulter l'introduction de ma thèse pour en avoir un aperçu. Rappelons simplement ici que l'étude des surfaces à singularités coniques contient notamment l'étude des billards polygonaux et que la compréhension du spectre de ces objets semblaient (et semble toujours) un objectif particulièrement intéressant du fait, d'une part de la “simplicité” apparente du cadre géométrique et d'autre part de la richesse des situations dynamiques rencontrées (suivant le polygone, la dynamique est intégrable, chaotique, pseudo-intégrable ...). Cependant, les résultats prouvés dans ma thèse ne reflètent pas cette diversité, notamment on ne sait pas dire plus de choses pour un billard polygonal rationnel (i.e. dont les angles sont des multiples rationnels de π). Il semblait donc naturel d'essayer de trouver des techniques spécifiques à ce type de billard ou à leur équivalent sans bord : les surfaces de translation.

Spectre des surfaces de translation

Les surfaces de translation sont des surfaces pour lesquelles on peut, en dehors d'un nombre fini de points trouver un atlas dont les fonctions de transition sont des translations. On peut les munir d'une métrique plate en dehors des singularités et qui, au voisinage des singularités, est localement isométrique à un voisinage du sommet d'un cône euclidien. De telles surfaces arrivent naturellement dans l'étude du billard dans un polygone rationnel. Elles font l'objet d'une active recherche (cf [10, 24, 22, 26]) notamment parce qu'il existe une action de $SL(2, \mathbb{R})$ sur “l'espace des surfaces de translations”. Toutes ces recherches concernent l'aspect classique de la dynamique et étudient par exemple le nombre de cylindres d'orbites périodiques de longueur bornée par T (comme la métrique est localement

plate, une géodésique périodique non-diffractive est forcément intérieure à une famille qui forme un cylindre euclidien dont les bords passent par les singularités). On peut, par exemple, montrer l'équivalent suivant pour une surface de translation générique² :

$$N_c(T) \sim c_V T^2,$$

où $N_c(T)$ désigne le nombre de cylindres d'orbites périodiques de longueur inférieure à T (cf [10]). La constante c_V est au coeur de nombreux travaux (cf [24, 11] entre autres) et, comme habituellement les cylindres d'orbites périodiques sont reliés au spectre (par exemple en utilisant les formules de trace), on peut se demander s'il existe une interprétation spectrale à celle-ci. Cette question peut être déclinée pour chacune des caractéristiques dynamiques spécifiques aux surfaces de translation, on peut ainsi se demander si le groupe de Veech d'une surface est déterminé par le spectre, ou si les surfaces dont le groupe de Veech est particulier (par exemple si le groupe de Veech est un réseau, ou bien si le groupe de Veech est arithmétique) ont aussi un spectre particulier. Une autre motivation pour étudier le spectre de ces surfaces renvoie à la philosophie générale du chaos quantique qui essaie de prédire les statistiques spectrales d'un système quantique suivant que le système classique est complètement intégrable, ou au contraire chaotique. Pour une surface de translation, la dynamique est souvent qualifiée de "pseudo-intégrable" et il est donc intéressant de savoir comment les statistiques spectrales se comportent (cf [4]).

Le premier résultat que j'obtiens concernant le spectre des surfaces de translation utilise l'existence de nombreux cylindres d'orbites périodiques. Je montre dans [18] que l'on peut utiliser cette information pour estimer le nombre de valeurs propres dans l'intervalle $[E - E^\alpha, E + E^\alpha]$ (que l'on note $R_\alpha(E)$). Un résultat précis est donné par le théorème suivant :

Théorème 5 *Pour toute surface de translation M , pour tout $\frac{1}{2} > \alpha > \frac{1}{3}$, et pour tout $\epsilon > 0$ l'estimation suivante est vérifiée*

$$(2) \quad R_\alpha(E) > E^{2(\alpha - \frac{1}{3}) - \epsilon},$$

pour E assez grand.

Ce type de question était motivé par les articles [7, 28] et ce type de résultat est à rapprocher des travaux cherchant le meilleur reste dans le problème du cercle (cf [2] par exemple). Il faut noter que ce genre de renseignement est en général assez difficile à obtenir dès que l'on s'éloigne du régime traité par le reste de la formule de Weyl (ce qui correspondrait à $\alpha > \frac{1}{2}$ dans le théorème précédent).

Dans un deuxième travail (cf [19]), je m'intéresse à une classe particulière de surfaces de translation : celles qui sont des revêtements ramifiés du tore. Cette propriété entraîne que le spectre du tore est inclus dans le spectre de la surface considérée, et la question de départ consiste à identifier le reste du spectre. Les techniques employées pour répondre à cette question sont à rapprocher des résultats de Sunada (cf [27]) pour les revêtements

²Voir page suivante.

riemanniens ainsi que de leur interprétation en terme de transplantations, initiée par Bérard (cf [3]). Ces techniques permettent de construire des surfaces à petits carreaux présentant des propriétés spectrales intéressantes. Ainsi, je donne l'exemple d'une surface M_6 à 6 carreaux et d'une surface M_3 à 3 carreaux telles qu'on ait la décomposition spectrale suivante :

$$\mathrm{Sp}(M_6) + 2\mathrm{Sp}(T_1) = 2\mathrm{Sp}(M_3) + \mathrm{Sp}(T_2),$$

où T_1 et T_2 désignent des tores construits avec, respectivement, 1 et 2 carreaux. Dans [19], je généralise l'égalité précédente à toute une famille d'exemples, et je construis aussi d'autres surfaces à petits carreaux dont le spectre présente une grande multiplicité. Il est intéressant de remarquer que, bien que très particulières, les surfaces à petits carreaux sont importantes dans la théorie classique des surfaces de translation (cf [13] par exemple), ce qui justifie leur étude du point de vue spectral.

Ces résultats nous aident à comprendre le spectre des surfaces de translation, mais il reste de nombreuses questions intéressantes. En particulier, on aimerait réussir à utiliser le flot de Teichmüller au niveau spectral. Plus précisément, rappelons que partant d'une surface de translation M , à toute matrice A de $SL_2(\mathbb{R})$ on peut associer une nouvelle surface de translation. On obtient ainsi une action sur l'espace des surfaces de translations qui est ergodique pour une mesure bien choisie. L'existence de cette action contribue grandement à l'intérêt porté aux surfaces de translation et est à l'origine de la plupart des résultats classiques évoqués ci dessus ³. Du point de vue spectral, on dispose ainsi naturellement d'une famille d'opérateurs que l'on peut essayer d'étudier dans son ensemble. On peut ainsi se poser des questions quant au comportement générique du spectre (simplicité par exemple), quant aux variations de certaines fonctions spectrales (comme le déterminant), quant au comportement du spectre quand les surfaces dégènèrent. Certaines de ces pistes sont déjà en cours d'exploration, notamment dans ma collaboration avec Chris Judge (cf [21]). Pour terminer, remarquons que les surfaces de translation les plus simples sont les tores plats. Dans ce cas, le spectre est calculable explicitement et on peut répondre à un certain nombre des questions précédentes du fait de cette connaissance explicite. Le calcul du spectre provient essentiellement du fait que les opérateurs de dérivation dans deux directions différentes commutent, ce qui cesse d'être le cas sur une surface de translation générale. L'analyse de ce défaut de commutation semble être une clé de la compréhension plus profonde du spectre des surfaces de translation. Le travail en cours de préparation [20] découle des tentatives dans cette direction.

- [1] S. Albeverio et P. Kurasov. *Singular perturbations of differential operators*. Cambridge University Press, 2000.
- [2] M. Babillot. Points entiers et groupes discrets: de l'analyse aux systèmes dynamiques. In *Rigidité, groupe fondamental et dynamique*, volume 13 of *Panor. Synthèses*, pages 1–119. Soc. Math. France, Paris, 2002. With an appendix by Emmanuel Breuillard.

³Expliquant notamment l'adjectif "générique" employé précédemment.

- [3] P. Bérard. Transplantation et isospectralité. *Math. Ann.*, 292:547–559, 1992.
- [4] E. Bogomolny, O. Giraud, and C. Schmit. Periodic orbits contribution to the 2-point correlation form factor for pseudo-integrable systems. *Comm. Math. Phys.*, 222(2):327–369, 2001.
- [5] J.Chazarain. Formule de Poisson pour les variétés riemanniennes. *Invent. Math.*, 24:65–82, 1974.
- [6] J. Cheeger et M. Taylor. On the diffraction of waves by conical singularities. I. *Comm. Pure Appl. Math.*, 35(3):275–331, 1982.
- [7] H. Donnelly. Quantum unique ergodicity. *Proc. A.M.S.*, 131(9):2945–2951, 2003.
- [8] J.J. Duistermaat. *Fourier Integral Operators*. Prog. in Math. Birkhäuser, 1996.
- [9] J.J. Duistermaat et V.W. Guillemin. The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics. *Invent. Math.*, 29:39–79, 1975.
- [10] A. Eskin et H. Mazur. Asymptotic formulas on flat surfaces. *Erg. Th. Dynam. Sys.*, 21 :443–478, 2001.
- [11] A. Eskin, H. Masur, et A. Zorich. Moduli spaces of abelian differentials: the principal boundary, counting problems, and the Siegel-Veech constants. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (97):61–179, 2003.
- [12] P. Gérard et G. Lebeau. Diffusion d’une onde par un coin. *J. Amer. Math. Soc.*, 6(2):341–424, 1993.
- [13] E. Gutkin et C. Judge. Affine mappings of translation surfaces: geometry and arithmetic. *Duke Math. J.*, 103(2):191–213, 2000.
- [14] L. Hillairet. Formule de trace semi-classique sur une variété riemannienne avec un potentiel Dirac. *Comm. P.D.E.*, 27 (9&10):1751-1791, 2002.
- [15] L. Hillairet. Formule de trace sur une surface euclidienne à singularités coniques. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I*, 335:1047–1052, 2002.
- [16] L. Hillairet. Contribution of periodic diffractive orbits. *Journ. Funct. Anal.*, 226:48–89, 2005.
- [17] L. Hillairet. Diffractive geodesics of polygonal billiards. *Proc. Edinb. Math. Soc.*, 49:71–86, 2006.
- [18] L. Hillairet. Clustering of eigenvalues on translation surfaces. Ann. Henri Poincaré, à paraître, 2006. <http://www.umpa.ens-lyon/~lhillairet/rech.html>, 24p.
- [19] L. Hillairet. Spectral decomposition of square-tiled surfaces. <http://www.umpa.ens-lyon/~lhillairet/rech.html>, 28p , 2005.
- [20] L. Hillairet. Dirichlet to Neumann isospectrality on translation surfaces, 2006.
- [21] L. Hillairet, C. Judge. Spectral degeneration of translation surfaces, 2006.
- [22] P. Hubert et T. Schmidt. Invariants of translation surfaces. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 51(2):461–495, 2001.
- [23] S. Kerckhoff, H. Mazur et J. Smillie. Ergodicity of billiard flows and quadratic differentials. *Ann. Math.*, 124 :293–311, 1986.
- [24] M. Kontsevich et A. Zorich. Connected components of the moduli space of holomorphic differentials with prescribed singularities. *Invent. Math.*, 153(3) :631–678, 2003.
- [25] R. Melrose et J. Wunsch. Propagation of singularities for the wave equation on conic manifolds. *Invent. Math.*, 156(2):235–299, 2004.
- [26] C. McMullen. Billiards and Teichmüller curves on Hilbert modular surface. *Journ. A.M.S.*, 16(4) :857–885, 2003.
- [27] T. Sunada. Riemannian coverings and isospectral manifolds. *Ann. Math.*, 121:169–186, 1985.
- [28] S. Zelditch. Note on quantum unique ergodicity. *Proc. A.M.S.*, 132(6):1869–1872, 2004.