Couches limites non caractéristiques pour les systèmes de lois de conservation ; un guide pour utilisateurs

Denis Serre
UMPA, UMR # 5669 CNRS-ENS Lyon
Ecole Normale Supérieure de Lyon
46, allée d'Italie
F-69364 Lyon cedex 07

Abstract

Ce texte a été écrit à la suite de l'atelier scientifique organisé à l'IHP le 11 Juin 2001 par E. Godlewski, F. Dubois et P.-A. Raviart. Celui-ci était intitulé "Conditions limites numériques pour les systèmes hyperboliques. Applications en mécanique des fluides". Ce texte aborde le cas d'un bord non-caractéristique. Il évite donc le cas gouverné par les équations de Prandtl. Comme les effets dûs à la discrétisation sont très semblables à ceux produits par des termes de diffusion, on s'étend largement sur le système de Navier-Stokes, lorsque les coefficients de viscosité et de conduction sont petits.

Contents

1 Introduction **2**

2 Entropies et dissipation **5**

3 Ondes de choc **6**

4 Stabilité des ondes de chocs **9**
4.1 Cas multi-dimensionnel 11
4.2 Cas scalaire 12

5 Problèmes aux limites hyperboliques **13**
5.1 Le cas multi-dimensionnel 14

6 Problèmes aux limites paraboliques-hyperboliques **15**
6.1 Le nombre de conditions aux limites 18

7 Couches limites **20**
7.1 La condition aux limites résiduelle 23
7.2 L'exemple linéaire 24
7.3 Stabilité du cas linéaire 27
7.4 Cas parabolique 28

8 Cas non-linéaire **29**
8.1 Structure de l'ensemble $\mathcal{C}(t)$; (I) 29
8.2 Stabilité spectrale 30
8.3 La fonction d'Evans 31
8.4 Structure de l'ensemble $\mathcal{C}(t)$; (II) 33
8.5 Cas multi-dimensionnel 34
8.6 Stabilité non linéaire 34

9 Application : la dynamique des gaz **35**
9.1 Cas incompressible 37

10 Couches limites numériques **37**
10.1 Structure de $\mathcal{C}(a)$ 39
10.2 Un problème inverse 41
10.3 Aspects multidimensionels 41

1 Introduction

On traite des systèmes de lois de conservation sous la forme

$$\partial_t u + \sum_{\alpha=1}^{d} \partial_\alpha f^\alpha(u) = \epsilon \sum_{\alpha,\beta} \partial_\alpha (B^{\alpha\beta}(u)\partial_\beta u), \tag{1}$$

où la variable spatiale x parcourt un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$. L'inconnue $u(x,t)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$. La partie du premier ordre (membre de gauche) est hyperbolique. Le membre de droite représente les processus de diffusion, la présence de ϵ, nombre petit positif, indiquant que ces processus sont de faible importance, au moins là où la solution ne varie pas trop vite.

L'exemple typique est donné par la dynamique des gaz, lorsqu'on tient compte de la viscosité et de la conduction de chaleur (loi de Fourier). En notant ρ la densité, v la vitesse du gaz, e l'énergie interne par unité de masse, p la pression et θ la température, on écrit la conservation de la masse,

$$\partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho v) = 0,$$

celle de la quantité de mouvement,

$$\partial_t(\rho v_j) + \mathrm{div}(\rho v_j v) + \partial_j p = \mathrm{div} T_{\cdot j},$$

et celle de l'énergie,

$$\partial_t E + \mathrm{div}((E+p)v) = \mathrm{div}(Tv) + \mathrm{div}(\kappa \nabla \theta).$$

Dans ces identités, T est le tenseur symétrique

$$T_{jk} = \lambda(\partial_j v_k + \partial_k v_j) + \mu(\mathrm{div} v)\delta^k_j.$$

Les nombres positifs $\lambda, \mu, \kappa, p, \theta$ sont des fonctions de ρ et de e. L'existence d'une entropie physique $S(\rho, e)$ (second principe de la thermodynamique) est assurée par l'identité

$$\theta dS = de + p d\frac{1}{v},$$

qui impose une relation entre les fonctions θ et p. Pour un gaz, la viscosité et la conduction thermique ont des effets beaucoup plus petits que ceux dûs à la convection. En d'autres termes, λ, μ, κ sont petits, cette petitesse devant être caractérisée par le facteur ϵ. Bien entendu, un changement d'échelle peut rendre ces coefficients plus grands. Le choix des unités physiques dépend essentiellement de la taille du domaine et du temps sur lequel on observe ou calcule l'écoulement considéré. Ce texte se limite donc aux situations pour lesquelles les coefficients de diffusion sont petits.

On est alors confronté au problème du passage à la limite quand ϵ tend vers zéro. Formellement, le système (1) devient

$$\partial_t u + \sum_{\alpha=1}^{d} \partial_\alpha f^\alpha(u) = 0. \tag{2}$$

Déjà dans le cas du problème de Cauchy ($\Omega = \mathbb{R}^d$, avec une condition initiale $u_0(x)$ donnée), peu de choses sont connues. L'existence d'une solution classique, locale en temps, du problème avec diffusion, peut être assez délicate. Cependant, il ne semble pas qu'il y ait d'obstruction, sous des hypothèses raisonnables. Nous tiendrons donc pour acquise l'existence de cette solution $u^\epsilon(x,t)$. De même, le problème sans diffusion admet une solution classique locale $u(x,t)$ sous des hypothèses couramment satisfaites en physique. Nous rappelons les bonnes hypothèses ci-dessous. La convergence de u^ϵ vers u tant que u reste de classe $\mathcal{C}^1$ ne semble pas plus compliquée que l'existence de u^ϵ et de u elles-même.

L'existence locale d'une solution régulière (qui est alors unique) au problème de Cauchy pour (2) est obtenue lorsque ce système admet une forme *symétrique*, à savoir

$$A^0(v)\partial_t v + \sum_\alpha A^\alpha(v)\partial_\alpha v = 0, \tag{3}$$

où les matrices A^α sont symétriques, A^0 est symétrique définie positive, et leurs coefficients sont des fonctions régulières de v. Rappelons qu'une forme symétrique est obtenue dès que le système (2) est compatible avec une loi de conservation supplémentaire

$$\partial_t \eta(u) + \sum_\alpha \partial_\alpha q_\alpha(u) = 0, \tag{4}$$

où η est fortement convexe, c'est-à-dire satisfait $D^2\eta > 0_n$. La fonction η est une *entropie* du système et $\vec{q}$ est son *flux*. Dans ce cas, on peut prendre $v := \nabla_u \eta$, et on a $A^0 = \nabla_v u = (D^2\eta)^{-1}$. Ce résultat est dû à Godunov d'une part, à Lax et Friedrichs d'autre part. Il permet d'appliquer le théorème suivant d'existence locale, dû à de nombreuses personnes (Gårding, Leray, Kato, Klainerman) :

Théorème 1 *Soit $s > 1 + d/2$ et v_0 une donnée initiale appartenant à l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$. Alors il existe une et une seule solution maximale (T, v) pour (3), avec $T > 0$ et*

$$v \in \mathcal{C}(0,T;H^s) \cap \mathcal{C}^1(0,T;H^{s-1}).$$

Remarquons que H^{s-1} est une algèbre de fonctions continues. En particulier, la solution est *classique*, c'est-à-dire de classe $\mathcal{C}^1$. Dans le théorème, on peut

remplacer H^s par sa version uniformément locale, ce qui permet de traiter des données qui ne sont pas constantes à l'infini.

Pour la dynamique des gaz, cette technique fournit une solution locale régulière lorsque la donnée initiale, régulière, a une densité uniformément strictement positive :

$$\min_{x\in\mathbb{R}^d} \rho_0(x) > 0.$$

Cette restriction est due au fait que le vide est une singularité pour l'entropie (entropie mathématique, qui est ici $-\rho S$), qui n'est plus définie. À cause de cela, les matrices de la forme symétrique (3), avec $v = \nabla\eta$, ont des coefficients singuliers près du vide. Cependant, la forme symétrique (3) peut s'obtenir par une transformation *ad hoc*, qui n'est liée à aucune entropie. C'est ainsi que Kawashima, Makino et Ukai, puis Chemin, ont établi l'existence d'une solution locale régulière en présence de vide. Dans ce cas, la régularité des données initiales et de la solution porte sur l'entropie physique S, la vitesse $\vec{v}$ et la vitesse du son c. Pour un gaz parfait à D degrés de liberté, cela revient à la régularité de $S, \vec{v}$ et $\rho^{2/D}$.

2 Entropies et dissipation

L'existence d'un couple entropie-flux $(\eta, \vec{q})$ est un phénomène exceptionnel pour un système de lois de conservation (2), fut-il hyperbolique. C'est pourtant la règle parmi les systèmes qui modélisent la mécanique et la physique des milieux continus. La loi de conservation (4) est alors la manifestation du second principe de la thermodynamique.

Comme le système (1) est une version plus précise, sur le plan physique, de (2), il n'est pas étonnant qu'il y ait également un lien entre (1) et (4). Bien entendu, Les solutions de (1) ne satisfont pas (4), puisque (1) n'est manisfestement pas invariant par le renversement $(x,t) \mapsto (-x,-t)$ (ce système est *irréversible*), tandis que (4) l'est, comme (2) d'ailleurs. L'irréversibilité se traduit donc par une inégalité : toute solution de (1) satisfait

$$\eta(u)_t + \operatorname{div} q(u) + \epsilon\omega \sum_\alpha \|V^\alpha\|^2 \leq \epsilon \sum_\alpha \partial_\alpha (d\eta(u) V^\alpha), \tag{5}$$

où $V^\alpha := B^{\alpha\beta}(u)\partial_\beta u$ et $\omega > 0$ est un nombre indépendant de ϵ, qui peut dépendre de l'état u. La compatibilité de (5) avec (1) revient à l'inégalité

algébrique

$$\sum_\alpha D^2\eta(V^\alpha, z_\alpha) := \sum_{\alpha,\beta} D^2\eta(B^{\alpha\beta} z_\beta, z_\alpha) \geq \omega \sum_\alpha \|V^\alpha\|^2, \tag{6}$$

avec $V^\alpha := \sum_\beta B^{\alpha\beta} z_\beta$, pour tout choix des vecteurs z_α dans $\mathbb{R}^n$.

L'intérêt de (6) est multiple. Du point de vue algebrique, il assure que les valeurs propres non nulles des matrices $B(u;\xi) := \sum_{\alpha,\beta} \xi_\alpha \xi_\beta B^{\alpha\beta}$ ont des parties réelles strictement positives, et que zéro est au pire valeur propre semi-simple (dans beaucoup de situations, comme en dynamique des gaz, zéro est bien valeur propre), c'est-à-dire que $\ker B(\xi)^2 = \ker B(\xi)$. Ces propriétés sont nécessaires pour que le problème de Cauchy soit localement bien posé.

Du point de vue physique, (6) entraine la baisse tendancielle de l'entropie totale :

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \eta(u)dx + \int_{\partial\Omega} \vec{q}(u)\cdot\nu ds \leq -\omega\epsilon \int_\Omega \|V\|^2 dx \leq 0.$$

Par ailleurs, l'estimation ci-dessus montre que le terme non-linéaire $V := B(u)\nabla u$ est naturellement dans $L^2_{x,t}$, ce qui donne un sens au second membre de (1). Il montre aussi que, lorsque ϵ tend vers 0^+, le produit $\sqrt{\epsilon}V_\epsilon$ reste borné dans le même espace. Ainsi, ϵV_ϵ tend vers zéro dans $L^2_{x,t}$, et le second membre de (1) tend vers zéro au sens des distributions. Les valeurs d'adhérence de la suite u^ϵ, si elles sont obtenues dans un sens assez fort (convergence presque partout, avec borne uniforme), sont donc des solutions de (2), au sens des distributions. De même, le second membre de (5) tend vers zéro dans $\mathcal{D}'$. En revanche, il n'en est pas de même du terme $\epsilon\|V\|^2$. On ne déduit donc de (5) qu'une inégalité d'entropie :

$$\eta(u)_t + \operatorname{div} q(u) \leq 0. \tag{7}$$

L'inégalité (7) n'étant en général pas une égalité pour les solutions de (2) ainsi obtenues, elle traduit l'irréversibilité inhérente au processus physique, dès que la solution cesse d'être régulière. C'est une forme du second principe de la thermodynamique.

3 Ondes de choc

La perte de régularité est, croit-on, liée à l'apparition de discontinuités, notamment des discontinuités irréversibles appelées *ondes de choc*. Lorsque

$u(x,t)$ est continue par morceaux, de classe $\mathcal{C}^1$ de part et d'autre d'une hypersurface Γ, u est solution de (2) si et seulement si c'est d'une part une solution classique hors de Γ, d'autre part si elle satisfait le long de Γ la *condition de Rankine-Hugoniot* :

$$[u]n_t + \sum_\alpha [f_\alpha(u)]n_\alpha = 0, \tag{8}$$

où $(n_1, \ldots, n_d, n_t)$ désigne la normale à Γ et $[\cdot]$ désigne le saut d'un quantité à travers Γ. Dans ce contexte, l'inégalité d'entropie s'exprime par

$$[\eta(u)]n_t + \sum_\alpha [q_\alpha(u)]n_\alpha \leq 0, \tag{9}$$

où le saut est calculé dans le sens de la normale :

$$[h(u)]_Y := \lim_{\tau\to 0^+} h \circ (Y + \tau\vec{n}) - \lim_{\tau\to 0^+} h \circ (Y - \tau\vec{n}) =: h(u^+) - h(u^-).$$

De (8), on observe que la discontinuité ne peut pas être purement temporelle : le vecteur $\nu := (n_1, \ldots, n_d)$ n'est pas nul.

On notera que les conditions (8,9) sont essentiellement mono-dimensionnelles : elles expriment les relations analogues pour le système qui gouverne les ondes planes dans la direction ν, à savoir

$$u_t + f(u;\nu)_x = 0, \quad f(\cdot;\nu) := \sum_\alpha n_\alpha f^\alpha, \tag{10}$$

qui admet lui aussi l'entropie η.

Les conditions (8,9) sont des conditions nécessaires à *l'admissibilité* de la discontinuité $(u^-, u^+; \vec{n})$. Elles ne sont pas toujours suffisantes. Revenant au système visqueux, on se convainc sans peine qu'un choc de (2) doit admettre une structure interne pour (1), de la forme $U(((x,t) - Y)\cdot\vec{n}/\epsilon)$. Ceci n'est en fait pas vrai pour les discontinuités dites *de contact*, que nous n'étudierons pas ici. Cette structure interne, autrement appelée *profil* du choc, est elle aussi de nature mono-dimensionnelle. C'est une onde progressive, solution exacte de (1). Notant $f = f(\cdot;\nu)$ et

$$B := \sum_{\alpha,\beta} n_\alpha n_\beta B^{\alpha\beta},$$

un profil est une solution de l'équation

$$B(U)U' = f(U) - f(u^-) - n_t(U - u^-). \tag{11}$$

Dans (11), la condition de Rankine-Hugoniot permet de remplacer u^- par u^+. Le profil doit en plus satisfaire

$$U(\pm\infty) = u^\pm.$$

À première vue, (11) est un système d'EDOs, qu'on a avantage à réécrire sous la forme $U' = g(U)$, avec $g(u^\pm) = 0$. Cependant, dans les cas réalistes, la matrice $B(u)$ n'est pas inversible. Par exemple, pour la dynamique des gaz, la première ligne de B est identiquement nulle. Il s'agît donc plutôt d'un système *différentiel-algébrique*, dans lequel on doit distinguer les variables z dont les dérivées premières apparaissent vraiment. On complètera en un changement de variables $u \mapsto (w, z)$. Le système (11) comprend des équations algébriques (autrement dit, non différentielles) qui, sous des hypothèses convenables satisfaites en dynamique des gaz, permettent d'exprimer w en fonction de z. On est alors ramené à un système différentiel usuel pour la variable z : $Z' = h(Z)$ où, avec des notations évidentes, $h(z^\pm) = 0$. On notera r le rang de B, qui est aussi le nombre de coordonnées de z. On trouvera dans [22, 25, 38], ainsi que ci-dessous la liste d'hypothèses naturelles et minimales pour traiter les modèles réalistes (systèmes dit "de Kawashima"). L'existence de profils de viscosité pour les chocs de petite amplitude a été traitée par Majda et Pego [26], lorsque B est inversible, puis par Freistüler [11], pour le cas général.

Un profil de choc est donc une orbite hétérocline d'un certain champ de vecteurs dont u^+ et u^- (ou plutôt z^+ et z^-) sont deux points fixes. Il n'y a pas *a priori* de raison pour qu'une telle orbite existe. Sa présence est en soi une condition d'admissibilité du choc, dont on voit qu'elle entraine (8,9). On l'appelle *critère de viscosité*. En général, u^- et u^+ ne sont pas échangeables, l'existence simultanée de deux orbites joignant ces points dans les deux sens étant un événement très rare, et même impossible en dynamique des gaz.

Le critère de viscosité a été complètement élucidé par Gilbarg [15] en ce qui concerne la dynamique des gaz, lorsque B représente la viscosité newtonnienne et la loi de Fourier. Gilbarg montre qu'il équivaut à la *condition de Liu*, qui est une généralisation au cas des systèmes de la condition d'Oleinik. Cette condition est en fait due antérieurement à Chang et Hsiao. Elle ne met absolument pas en jeu le tenseur B, mais seulement l'*ensemble de Hugoniot*, défini par la condition de Rankine-Hugoniot (8). Nous ne la décrirons pas ici en détail, mais il nous suffira de dire que l'équivalence est vraie (Liu) pour tout système strictement hyperbolique satisfaisant des propriétés de nature physique, pourvu que le choc considéré soit d'amplitude modérée.

Le résultat de Gilbarg est remarquable en ce qu'il est indépendant des valeurs relatives des coefficients de viscosité et de conduction thermique, c'est-à-dire de la matrice B, tant qu'elle satisfait les propriétés physiques. Ainsi, l'admissibilité d'un choc ne dépend que de sa loi d'état et non de ses effets du second ordre, ceux qui n'apparaissent qu'hors équilibre. Nous verrons plus loin que cette remarque doit être relativisée. Le résultat de Liu confirme cette observation dans une certaine mesure.

On est donc tenté d'ignorer l'influence du tenseur de viscosité B et de travailler directement sur le modèle du premier ordre (2), les équations d'Euler par exemple. C'est bien ce qu'on fait en pratique dans une large mesure. Ce faisant, on ne risque rien tant que les chocs rencontrés restent modérés. Mais on commet un oubli qui peut s'avérer désastreux dans des situations où la solution varie beaucoup.

4 Stabilité des ondes de chocs

Pour comprendre cette mise en garde, nous revenons au modèle visqueux (1), dont le profil U d'un choc $(u^-, u^+; \vec{n})$ est une solution exacte. Dans un premier temps, nous supposons un modèle mono-dimensionnel, ce qui revient à ne considérer, parmi toutes les solutions, que celles qui ne dépendent que du temps et de la variable spatiale $x \cdot \nu$. Il s'écrit donc

$$u_t + f(u)_x = \epsilon(B(u)u_x)_x, \tag{12}$$

avec les mêmes notations que précédemment. Quitte à choisir un référentiel en mouvement avec le choc et son profil, nous pouvons supposer que le choc est stationnaire. Le profil U est alors une solution stationnaire de (12) pour $\epsilon = 1$:

$$B(U)U' = f(U) - f(u^-) = f(U) - f(u^+).$$

Il lui correspond, par changement d'échelle, une solution stationnaire de (12), qu'on notera U^ϵ.

Linéarisons (12) autour de U^ϵ. Nous obtenons une équation d'évolution

$$v_t = L_\epsilon v, \tag{13}$$

dans laquelle l'opérateur L_ϵ est à coefficients variables, puisque U^ϵ n'est pas constant, et dépend du paramêtre ϵ de deux façons : premièrement parce que

le système (12) en dépend, deuxièmement parce que le profil est lui-même une fonction de x/ϵ.

Notons $L := L_1$ l'opérateur obtenu pour $\epsilon = 1$. Il est facile de voir que le changement d'échelle $x \mapsto x/\epsilon$ induit une conjugaison entre L_ϵ et $\epsilon^{-1}L$. Il revient au même de remarquer que $(x,t) \mapsto (x/\epsilon, t/\epsilon)$ ramène le système (13) à sa version normalisée (i.e. pour $\epsilon = 1$). On a donc la relation suivante entre les spectres des opérateurs :

$$\sigma(L_\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}\sigma(L).$$

Si le nombre

$$r(L) := \sup\{Re\lambda\,;\, \lambda \in \sigma(L)\}$$

est strictement positif, alors $r(L_\epsilon)$ tend vers $+\infty$ lorsque $\epsilon \to 0+$. Typiquement[1], les perturbations subies par le profil sont amplifiées par un facteur de l'ordre de $\exp(r(L)t/\epsilon)$. Leur taille devient comparable au profil lui-même au bout d'un temps de l'ordre de ϵ, ce qui revient à dire que ce profil n'est jamais rencontré en pratique. Et, certainement, un tel profil n'est pas compatible avec la convergence de (12) vers (10).

En conclusion, pour qu'un choc de (10) puisse apparaître dans une solution obtenue comme limite de (12), il semble nécessaire que $r(L)$ soit négatif ou nul. Nous disons qu'un tel profil est *linéairement stable*. En fait, *spectralement* stable est un adjectif plus approprié, *linéairement* exprimant plutôt l'inégalité $\rho(\exp L) \leq 1$, concernant le rayon spectral.

Seuls les chocs admettant un profil de viscosité spectralement stable semblent donc admissibles. À première vue, ce nouveau critère semble vraiment dépendre du choix du tenseur B. Cependant, pour des chocs modérés, on montre qu'il n'en dépend pas : le profil, dès qu'il existe, est spectralement stable. Ce n'est plus vrai pour des chocs de grande amplitude. On pourra se reporter aux travaux de Zumbrun & coll. [14, 5] pour une étude approfondie de la stabilité spectrale dans le contexte des profils visqueux d'ondes de choc. Des questions analogues concernant les profils discrets (câdre numérique) ou semi-discrets ont étés abordées par S. Benzoni et par l'auteur.

L'opérateur L est une matrice d'opérateurs différentiels. Si B est inversible (ce qui n'est pas réaliste), il est d'ordre deux. Sinon, il est d'ordre deux par rapport à certaines composantes, et d'ordre un par rapport aux

[1] Imaginer par exemple que le spectre n'est constitué que des valeurs propres de L^ϵ.

autres. Comme ses coefficients ont des limites quand $x \to \pm\infty$, on peut considérer les opérateurs limites $L^{\pm}$. On les obtient en linéarisant (12) autour des états constants u^+ et u^-. Ce sont des opérateurs à coefficients constants, dont les spectres s'obtiennent par une simple analyse de Fourier. On a $L^{\pm}v = B^{\pm}v'' - A^{\pm}v'$, avec $A^{\pm} := df(u^{\pm})$. Le spectre de $L^{\pm}$, qui ne contient pas de valeur propre mais seulement du spectre essentiel, est la réunion des spectres usuels des matrices

$$-\xi^2 B^{\pm} - i\xi A^{\pm},$$

lorsque ξ parcourt $\mathbb{R}$.

L'existence d'une entropie fortement convexe et dissipative (i.e. satisfaisant (6)) assure que $r(L^{\pm})$ est négatif ou nul (en fait nul, car zéro est évidemment dans ces deux spectres). Ceci exprime la stabilité dans L^2 des constantes pour le système (12), que cette entropie permet de démontrer (voir Dafermos [10]); Comme par ailleurs la réunion de $\sigma(L^+)$ et de $\sigma(L^-)$ constitue le spectre essentiel de L, on voit que la partie instable (c'est-à-dire de partie réelle strictement positive) du spectre de L, si elle existe, est constituée de valeurs propres au sens usuel. Son étude revient donc à la résolution du système différentiel ordinaire

$$(L - \lambda)v = 0, \tag{14}$$

où λ est un paramêtre complexe de partie réelle strictement positive et v est cherché dans $L^2(\mathbb{R})^n$. Une valeur propre λ est obtenue lorsque (14) admet une solution non triviale de carré intégrable.

Comme L est à coefficients variables, la résolution exacte de (14) n'est pas possible (on sait quand même que $LU' = 0$). Face à cette difficulté, un outil abstrait a été construit : la *fonction d'Evans*. On pourra se reporter aux travaux de Zumbrun & coll. [14, 38, 5] pour ce sujet très technique.

4.1 Cas multi-dimensionnel

Si $d \geq 2$, l'analyse n'est pas fondamentalement différente. On peut toujours supposer que le choc est stationnaire et que son front a pour direction l'axe de première coordonnée. On a donc $U = U(x_1)$. Linéarisant (1), on obtient encore une équation de la forme (13), où les coefficients de L^{ϵ} ne dépendent que de ϵ et de x_1. Cependant, il contient des dérivations dans toutes les

directions spatiales. Les opérateurs L^ϵ et $\epsilon^{-1}L$ sont encore conjugués. Ainsi, la stabilité spectrale reste un bon critère d'admissibilité.

Comme les coefficients de L ne dépendent pas de $(x_2, \dots, x_d)$, son spectre est la réunion des spectres d'opérateurs différentiels $M(x_1, d/dx_1; \eta_2, \dots, \eta_d)$, qu'on obtient par transformation de Fourier en les variables tangentielles $y =: (x_2, \dots, x_d)$. Si $V = V(x_1)$ et $\eta \in I\!R^{d-1}$:

$$M(\eta)V := e^{-i\eta\cdot y} L[e^{i\eta\cdot y} V].$$

A nouveau, la présence d'une entropie fortement convexe et dissipative assure la stabilité des constantes, et ceci entraine que le spectre essentiel de $M(\eta)$ est situé dans le demi-plan stable $\{\lambda\,;\, Re\lambda \leq 0\}$, pour tout $\eta \in I\!R^{d-1}$. La recherche d'instabilités éventuelles est donc ramenée à la résolution des équations différentielles

$$(M(\eta) - \lambda)v = 0, \tag{15}$$

où v est de carré intégrable, et les paramêtres satisfont $\eta \in I\!R^{d-1}$ et $Re\lambda > 0$.

L'équation (15) présente quelques difficultés supplémentaires. D'abord, le plus grand nombre de paramêtres favorise l'apparition d'instabilités. L'opérateur $M(0)$ est en fait exactement l'opérateur L déjà étudié dans le cas monodimensionnel. Il peut arriver que le profil soit stable pour des perturbations longitudinales, ce qui se traduit par $r(M(0)) = 0$, mais qu'il soit instable pour des perturbations vraiment multi-dimensionnelles, c'est-à-dire $r(L) > 0$. Ensuite, la transformation de Fourier en y apporte naturellement des coefficients complexes dès que η n'est pas nul. Enfin, bien que zéro soit valeur propre de $M(0)$ (rappelons que $M(0)U' = 0$), le fait qu'elle soit aussi dans le spectre essentiel de $M(0)$ empêche d'appliquer des méthodes perturbatives : il n'y a pas, en général, de valeur propre $\eta \mapsto \lambda(\eta)$ de $M(\eta)$, qui soit analytique au voisinage de zéro, et telle que $\lambda(0) = 0$ (voir [40]).

4.2 Cas scalaire

Lorsque $n = 1$, le critère de viscosité est équivalent à la condition d'Oleinik. On montre que tous les profils sont spectralement stables. Le fait que $r(M(0))$ soit nul est dû au principe du maximum, à $M(0)U' = 0$ et à la monotonie de U.

Cette stabilité inconditionnelle dans $L^2(I\!R^d)$ rejoint celle dans $L^1(I\!R^d)$ liée à la proprieté de contraction (voir [28, 33, 12, 32]).

Suivant Sattinger [31], l'utilisation d'espaces à poids permet de repousser le spectre essentiel de $M(0)$ vers la gauche, et donc d'appliquer des méthodes perturbatives. Cet argument ne s'applique, dans le cas des systèmes, que lorsque toutes les caractéristiques entrent dans le choc ; une situation rarissime.

5 Problèmes aux limites hyperboliques

A partir de maintenant, nous considérons nos modèles dans un domaine Ω à bord, au lieu de $\mathbb{R}^d$. Il y a lieu de les compléter par des conditions aux limites appropriées. En général, celles-ci seront fournies par la physique qu'on cherche à traduire et donneront lieu à des problèmes aux limites bien posés.

Nous commençons par le modèle hyperbolique (2). Pour simplifier l'exposé, nous nous plaçons d'abord dans le cas mono-dimensionnel, avec pour domaine $\mathbb{R}^+$, par exemple. Linéarisant (10), nous obtenons un système de la forme

$$v_t + Av_x = 0,$$

où $A = df$ est calculé en $u(0,t)$ lorsque cette trace existe. Par hypothèse (hyperbolicité), les valeurs propres de A sont réelles. Linéarisant aussi les conditions aux limites, on obtient une équation vectorielle

$$Dv(0,t) = 0,$$

où D est une matrice rectangulaire, qu'on supposera surjective (sans quoi les conditions aux limites, généralement non homogènes, risquent d'être incompatibles entre elles).

Dans ce contexte, le problème aux limites est localement bien posé si et seulement si, dans la taille $p \times n$ de D, le nombre p est égal au nombre de valeurs propres strictement positives de A (c'est le nombre de *caractéristiques entrantes*), et si de plus la restriction de D au sous-espace instable $U(A)$ de A est injective. Ce qui revient à l'égalité

$$\mathbb{R}^n = \ker D \oplus U(A). \tag{16}$$

Une étude complète du problème aux limites mono-dimensionnel pour le modèle non-linéaire (10), sous la condition (16), se trouve dans l'ouvrage de Li & Yu [24].

5.1 Le cas multi-dimensionnel

En plusieurs variables d'espace, la situation est notablement plus compliquée. On doit faire une analyse locale, en chaque point du bord. Pour cela, un point X étant choisi, on linéarise (2) en X, ce qui signifie aussi qu'on remplace Ω par le demi-espace affine qui lui est tangent en X. On se trouve alors face à un problème aux limites à coefficients constants, dans un demi-espace. Notant $\mathcal{L} = \partial_t + \sum_\alpha A^\alpha \partial_\alpha$ l'opérateur linéarisé et ν la normale sortante à $\partial\Omega$, on commence par former la matrice $A(\nu) := \sum_\alpha \nu_\alpha A^\alpha$. Par hypothèse d'hyperbolicité, cette matrice est diagonalisable à valeurs propres réelles. Notons p le nombre de ses valeurs propres strictement négatives (noter que dans le cas $d = 1$, on a $A(\nu) = -A$!). Il est alors nécessaire que le nombre de conditions aux limites indépendantes soit égal à p. Une étude des ondes dans la seule direction de ν fournit aussi la condition nécessaire

$$\mathbb{R}^n = \ker D \oplus S(A(\nu)),$$

où $Dv = 0$ est la condition aux limites linéarisée (en général, D dépend de ν) et $S(M)$ désigne le sous-espace stable d'une matrice carrée M, c'est-à-dire son sous-espace invariant associé aux valeurs propres de partie réelle strictement négative.

Cette condition est cependant loin d'être suffisante. En effet, comme dans le paragraphe précédent, on est amené à faire une transformée de Fourier dans les variables y tangentielles au bord. On obtient ainsi un opérateur

$$\mathcal{L}(\eta) = \partial_t + iA(\eta) + A(\nu)\frac{d}{dz},$$

où η est un vecteur tangent et d/dz désigne la dérivation normale. cet opérateur fournit un espace d'*ondes entrantes* $E(\tau, \eta)$, associé à la variable de Laplace (en temps) τ et à la variable de Fourier η. Pour $\eta = 0$, on a simplement $E(\tau, 0) = S(A(\nu))$. Ces sous-espaces sont tous de dimension p. Une condition nécessaire pour que le problème aux limites soit localement bien posé est la *condition de Kreiss-Lopatinskii* :

$$\mathbb{C}^n = \ker D \oplus E(\tau, \eta), \quad \forall Re\,\tau > 0, \quad \forall \eta \in T^*\partial\Omega. \tag{17}$$

Il est équivalent d'écrire qu'il existe des constantes strictement positives $c(\tau, \eta)$, telles que

$$\forall v \in E(\tau, \eta), \quad \|v\| \leq c(\tau, \eta)\|Dv\|.$$

Les sous-espaces sont des fonctions homogènes, de degré zéro, de (τ, η). Il en est donc de même des nombres $c(\tau, \eta)$. Lorsque ceux-ci sont majorés par une constante C indépendante de (τ, η), on dit que la condition de Kreiss-Lopatinskii est *uniforme*. Sous cette forme, c'est alors essentiellement une condition suffisante pour que le problème aux limites soit bien posé dans $L^2_{x,t}$, avec des estimations *a priori* agréables.

La théorie des problèmes aux limites hyperboliques, multi-dimensionnels, est due pour les systèmes du premier ordre à H.-O. Kreiss [23], et pour les opérateurs scalaires d'ordre arbitraire, à R. Sakamoto [30]. Elle est détaillée dans les ouvrages [9, 4].

6 Problèmes aux limites paraboliques-hyperboliques

Nous passons à l'étude du problème aux limites pour un modèle visqueux. Pour simplifier, nous nous limitons à la dimension $d = 1$, c'est-à-dire à un système de la forme (12).

Lorsque B est inversible, l'hypothèse de dissipation (6) entraine que le problème est parabolique. Il est donc naturel de se donner une condition aux limites de Dirichlet, à savoir

$$u(0,t) = b(t), \tag{18}$$

où b est une donnée du problème. On pourrait considérer sans difficulté supplémentaire une condition de type mixte

$$\epsilon u_x(0,t) = b(u(0,t),t). \tag{19}$$

Pour la simplicité de l'exposé, nous nous limiterons cependant au cas d'une condition de Dirichlet, laissant le soin au lecteur de développer les calculs avec une condition mixte, lorsque la physique le justifie.

Dans les exemples réalistes, B n'est pas inversible, et le système est partiellement parabolique, partiellement hyperbolique. Pour connaître le nombre et la nature des conditions aux limites qui font du problème aux limites un problème bien posé, il faut donner un sens rigoureux à la phrase précédente. Nous allons donc faire quelques hypothèses. Celles-ci seront satisfaites en dynamique des gaz.

Tout d'abord, $B(u)$ s'écrit par blocs sous la forme

$$B(u) = \begin{pmatrix} 0_{(n-r)\times n} \\ B_1(u) \end{pmatrix}.$$

La matrice B_1, de taille $r \times n$, est donc de rang constant r. En fait, nous demandons qu'il existe un changement de variable $u \mapsto (w, z)$, où $w := (u_1, \ldots, u_{n-r})$ et $B_1(u)u_x$ s'écrit sous la forme $b_1(u)z_x$, pour une matrice convenable (évidemment inversible) $b_1 \in M_r(\mathbb{R})$. En particulier, le bloc $r \times r$ en bas à droite de B est inversible.

Exemples : en dynamique des gaz, en présence de viscosité et de conduction thermique, on a $w = \rho$, la densité. Les termes de diffusion ne faisant intervenir que les dérivées de la vitesse et de la température, on a $z = (v, \theta)$. L'entropie est $\eta = -\rho S$. L'inégalité (5) découle de

$$(-\rho S)_t + (-\rho S v)_x + \frac{\nu}{\theta} v_x^2 + \kappa \left(\frac{\theta_x}{\theta}\right)^2 = -\left(\frac{\kappa \theta_x}{\theta}\right)_x, \tag{20}$$

où ν est la viscosité. On a donc

$$D^2\eta(BX, X) = Q(BX),$$

où la forme quadratique Q est positive. Si $Q(Bu_x) = 0$, alors v_x et θ_x sont nuls, donc Bu_x l'est aussi.

Pour un gaz, on peut dans certains cas négliger la viscosité et ne retenir que la diffusion thermique. Dans ce cas, ν est nul. Le changement de variable devient $u \mapsto (w = (\rho, \rho v), z = \theta)$. L'annulation de $Q(Bu_x)$ entraine $\theta_x = 0$, c'est-à-dire $Bu_x = 0$ à nouveau. Pour les deux modèles, Q est définie positive, (6) a bien lieu.

Linéarisons (12) autour d'un état constant :

$$v_t + Av_x = Bv_{xx}. \tag{21}$$

Ce système linéaire se réécrit, avec des notations similaires, comme le couplage d'un système du premier ordre en w et d'un système du second ordre en z :

$$w_t + A_1 w_x + A_2 z_x = 0, \quad z_t + A_3 w_x + A_4 z_x = b z_{xx}. \tag{22}$$

Nous demandons les choses suivantes :

1. Le système $w_t + A_1 w_x = 0$, obtenu en gelant z dans le système qui gouverne l'évolution de w, est hyperbolique : A_1 est diagonalisable à valeurs propres réelles,

2. Le système $z_t = bz_{xx}$, obtenu en négligeant les termes du premier ordre dans le système qui gouverne l'évolution de z, est parabolique : les valeurs propres de la matrice b sont de partie réelle strictement positive,

3. Le noyau $\{0_{n-r}\} \times \mathbb{R}^r$ de la matrice

$$\tilde{B} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

ne contient aucun vecteur propre de la matrice

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}.$$

C'est une hypothèse de couplage véritable, qui s'exprime aussi en disant qu'aucun vecteur propre de A_1 n'est dans le noyau de A_3.

Les deux premières hypothèses découlent de l'existence d'une entropie dissipative. En effet, celle-ci entraine l'existence d'un bon symétriseur, c'est-à-dire d'une matrice symétrique définie positive S, telle que $S\tilde{A}$ soit symétrique, et pour laquelle on a l'inégalité

$$SX \cdot \tilde{B}X \geq \omega \|\tilde{B}X\|^2, \quad \forall X \in \mathbb{R}^n, \tag{23}$$

où $\omega > 0$.

Pour tout $Z \in \mathbb{R}^n$, $X \in \ker \tilde{B}$ et $s \in \mathbb{R}$, on a

$$\omega \|\tilde{B}Z\|^2 \leq S(Z + sX) \cdot \tilde{B}(Z + sX) = SZ \cdot \tilde{B}Z + sSX \cdot \tilde{B}Z.$$

Faisant tendre s vers $\pm\infty$, on en déduit $SX \cdot \tilde{B}Z = 0$. Autrement dit, $\ker \tilde{B}$ et l'image $R(\tilde{B})$ sont S-orthogonaux. Ou encore, S est diagonale par blocs :

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_4 \end{pmatrix}.$$

La matrice $S_1 A_1$ est alors symétrique, ce qui fait de A_1 le produit d'une matrice symétrique définie positive (l'inverse de S_1) et d'une matrice symétrique,

donc une matrice $\mathbb{R}$-diagonalisable : l'opérateur $\partial_t + A_1\partial_x$ est bien hyperbolique. On a enfin

$$S_4 X \cdot bX \geq \omega \|bX\|^2, \quad \forall X \in \mathbb{R}^r. \tag{24}$$

Comme b est inversible, on peut remplacer $\|bX\|^2$ par $\|X\|^2$ dans (24). Soit alors Z un vecteur propre de B, pour une valeur propre $\rho + i\sigma$. Appliquant (24) au parties réelle et imaginaire de Z, et utilisant la symétrie de S, on obtient

$$\omega \|Z\|^2 \leq \rho Re(SZ \cdot \bar{Z}).$$

Comme S est définie positive, on en déduit que $\rho > 0$: l'opérateur $\partial_t - b\partial_{xx}$ est bien parabolique.

Les valeurs propres $a_1 \leq \cdots \leq a_n$ de $\tilde{A}$ étaient les vitesses de propagation pour le modèle non-visqueux (10). De même, les valeurs propres $c_1 \leq \cdots \leq c_{n-r}$ de A_1 sont les vitesses de propagation des ondes hyperboliques du modèle visqueux (12). Bien entendu, les modes paraboliques, représentés par les variables z, ont une vitesse infinie de propagation. L'utilisation des quotients de Rayleigh fournit les inégalités

$$a_1 \leq c_1 \leq \cdots \leq c_{n-r} \leq a_n.$$

L'hypothèse de vrai couplage ajoute des inégalités strictes :

$$a_1 < c_1, \quad c_{n-r} < a_n. \tag{25}$$

6.1 Le nombre de conditions aux limites

Pour un problème aux limites dans un domaine à bord, le nombre de conditions aux limites scalaires doit être égal à la somme de r, le nombre de modes paraboliques, et du nombre q de caractéristiques entrantes, c'est-à-dire du nombre de valeurs propres c_j strictement positives. Les modèles étant naturellement non-linéaires, on calcule q en linéarisant en chaque point P du bord. Mais, bien entendu, ce nombre pourra dépendre de l'état en P. Comme cet état dépend lui-même des conditions aux limites... Bref, il y a parfois un cercle vicieux, qui fait la joie des spécialistes du calcul numérique en dynamique des gaz. Déjà, pour l'équation de Burgers $u_t + (u^2)_x = 0$, dans laquelle q (ici $q = p$ puisqu'il n'y a pas de viscosité) dépend du signe de l'état, une bonne condition aux limites ressemble à une inégalité variationnelle.

v	$-c$	0	c	
p	0	1	2	3
q	2	2	3	3

Table 1: Nombre de conditions aux limites ; avec viscosité et conduction.

v	$-c$	$-c'$	0	c'	c	
p	0	1	1	2	2	3
q	1	1	2	2	3	3

Table 2: Nombre de conditions aux limites ; avec conduction mais sans viscosité.

Rappelons que p, le nombre de conditions aux limites pour le modèle non visqueux (même commentaire sur sa variabilité !), est le nombre de valeurs a_j strictement positives. On démontre l'inégalité

$$q \leq p \leq r + q. \tag{26}$$

Exemples : en dynamique des gaz avec viscosité et conduction, on a $r = 2$. Les vitesses de propagation sont $v - c, v, v + c$ pour les équations d'Euler, c étant la vitesse du son, et v seulement pour Navier-Stokes, ce qui montre que certaines des c_j et des a_k peuvent être égales, malgré les inégalités strictes (25). Le tableau 6.1 donne le nombre de conditions aux limites pour chacun des deux modèles, en fonction des valeurs de v et c au bord droit du domaine. On remplacera v par $-v$ pour traiter le bord gauche ; plus généralement, on prendra en compte la composante normale de la vitesse en dimension quelconque.

Si l'on néglige la viscosité, alors $r = 1$. Il y a deux vitesses $v - c', v + c'$ pour Navier-Stokes, où c' est une vitesse du son "isotherme". À cause de (25), on a $0 < c' < c$. Le tableau 6.1 donne le nombre de conditions aux limites pour ce cas.

Revenons au cas général, lorsque le système est linéaire (c'est par exemple un linéarisé). On a vu, dans le cas purement hyperbolique, qu'il ne suffit pas d'avoir le bon nombre de conditions aux limites, mais qu'il faut encore

éviter certains cas pathologiques, ce qui s'exprimait par (16). Dans le cas parabolique-hyperbolique, sous la forme

$$\begin{aligned} v_t + \tilde{A} v_x &= \tilde{B}_{xx}, \quad x, t > 0, \\ Dv = 0, &\qquad x = 0, t > 0, \end{aligned}$$

le problème aux limites sera bien posé lorsque

$$\mathbb{R}^n = \ker D \oplus (U(A_1) \times \mathbb{R}^r). \tag{27}$$

Une situation favorable a lieu lorsque la condition aux limites est *strictement dissipative* maximale, c'est-à-dire satisfait

1. $\ker D \subset \ker B$,
2. la restriction de la matrice symétrique $S\tilde{A}$ à $\ker D$ est définie négative,
3. si $\ker D \subset G \subset \ker B$ et si la restriction de la matrice symétrique $S\tilde{A}$ à G est définie négative, alors $G = \ker D$.

On vérifie sans peine que lorsque la condition aux limites est maximale dissipative, le rang de D est bien égal à $r + q$. De plus, (27) est satisfaite.

7 Couches limites

Tout ce qui a été expliqué ci-dessus à propos des ondes de choc va nous servir dans l'étude des couches limites et de leur stabilité.

Tout d'abord, au vu de (26), les $r + q$ conditions aux limites du modèle visqueux seront trop nombreuses pour le modèle non visqueux, dès lors que la seconde inégalité est stricte : $p < r + q$. Il apparaît une couche limite au voisinage du bord, où la solution varie en $O(1)$, tandis que sa dérivée spatiale (dérivée normale en dimension $d \geq 2$) est de l'ordre de $\epsilon^{-\gamma}$ avec $\gamma > 0$. L'épaisseur de la couche limite est donc ϵ^{γ} ; elle dépend de la nature, caractéristique ou non, du bord.

Nous dirons que le bord est *caractéristique* pour (2) lorsque, pour le système linéarisé, l'un des a_j est nul, c'est-à-dire que la matrice A, ou $\tilde{A}$, est singulière. De même, le bord est caractéristique pour (1) si une valeur propre c_k est nulle. Ces deux notions nous fondamentales.

L'exemple typique d'un problème aux limites hyperbolique à bord caractéristique est le système d'Euler pour un gaz compressible, lorsque le bord

est imperméable (condition de vitesse nulle au bord, $v = 0$, ou de vitesse normale nulle en dimension quelconque). Il en est de même pour un gaz isentropique ou isotherme, pour lequel on n'écrit pas la conservation de l'énergie, dès que $d \geq 2$; mais en dimension un, les seules vitesses de propagation sont $v - c, v + c$, de sorte que le bord n'est pas caractéristique pour la condition de vitesse nulle. Un autre cas typique est celui d'un corps solide (un avion), en mouvement dans l'air, dont la vitesse est proche de la vitesse du son (calculée loin du corps). L'air étant comprimé dans certaines régions du bord de l'aile, et détendu dans d'autres, la vitesse du son locale parcourt une grande plage de valeurs le long de l'aile. Celle-ci est donc caractéristique en certains points.

Pour le cas parabolique-hyperbolique, examinons le système de Navier-Stokes avec vitesse nulle au bord. En présence de conduction et de viscosité, le bord est caractéristique en toute dimension. Avec conduction, mais sans viscosité, il n'est caractéristique qu'en dimension $d \geq 2$. C'est donc la situation décrite plus haut pour Euler isotherme, ce qui était attendu pour la raison suivante. La nature du bord est la même pour le modèle visqueux (de n équations), et pour le système (hyperbolique) des $n-r$ premières lois de conservation, dans lesquelles les variables z (des modes paraboliques) sont gelées. Pour Navier-Stokes usuel, on a une loi de conservation $\rho_t + \mathrm{div}(\rho v) = 0$, dans laquelle on gèle v, à zéro en raison de la condition aux limites ; on obtient le système hyperbolique trivial $\rho_t = 0$, pour lequel le bord est bien caractéristique. Pour le modèle avec conduction mais sans viscosité, on doit retenir les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, et geler la température (pur jeux de mots), ce qui donne Euler isotherme.

Au vu du paragraphe précédent, il y a des raisons de s'inquiéter lorsqu'une vitesse a_j ou c_k s'annule. Une petite perturbation, ou simplement l'évolution du système, peuvent changer le nombre de conditions aux limites si cette vitesse est en fait en train de traverser, dans un sens ou dans l'autre, la valeur zéro. Ce n'est cependant pas le plus grand des dangers. Il y a des situations où l'on sait très bien gérer cette transition, par exemple dans le cas scalaire ($n = 1$, l'équation de Burgers mentionnée plus haut). Par ailleurs, il y a des problèmes physiques où cette vitesse de propagation reste nulle au cours du temps (par exemple la dynamique des gaz avec condition de vitesse nulle au bord) et le nombre de conditions aux limites reste donc constant.

La vraie raison qui nous pousse à considérer la nature, caractéristique ou non, du bord, est son influence sur l'épaisseur de la couche limite, sur sa structure interne, et finalement sur sa stabilité. Le problème de la conver-

gence de Navier-Stokes avec bord imperméable vers Euler quand la viscosité tend vers zéro est, au moins dans sa variante incompressible, bien connu pour sa difficulté extrême. Et cette difficulté est essentiellement due à la nature caractéristique du bord en présence de non-linéarités (le cas linéaire est bien compris dans un câdre fonctionnel abstrait [2]).

Pour cette raison, **nous nous limiterons dans ce qui suit au cas d'un bord non caractéristique**, aussi bien pour (12) que pour (10). La couche limite est alors d'épaisseur[2] ϵ. Sa structure est tout-à-fait semblable à celle des profils de choc ; dans la couche limite, la solution de (12) prend la forme

$$u^\epsilon(x,t) = U\left(\frac{x}{\epsilon}, t\right) + O(\epsilon).$$

Son profil U satisfait la condition aux limites du problème visqueux ; nous la noterons

$$D(u;t) = 0.$$

On a donc

$$D(U(0,t);t) = 0 \tag{28}$$

Si, comme on l'espère, u^ϵ converge dans un sens assez fort (hors de la couche limite) vers un $u(x,t)$, alors on aura le raccordement

$$\lim_{y\to+\infty} U(y,t) = u(0,t). \tag{29}$$

Enfin, remplaçant u^ϵ par son développement asymptotique dans (12), et retenant seulement les termes dominants, qui sont d'ordre ϵ^{-1}, on obtient *l'équation de profil*

$$B(U)\frac{dU}{dy} = f(U) - f(u(0,t)), \quad y > 0. \tag{30}$$

Dans le problème (28,29,30), le temps t ne joue qu'un rôle de paramêtre. Étant donné $u(0,t)$, on cherche une solution $U(\cdot,t)$, qui est une fonction de la variable spatiale seulement.

Remarquons que (30) n'est rien d'autre que (11) lorsque $n_t = 0$. Une solution peut donc être la restriction à $\mathbb{R}^+$ d'un profil d'un choc stationnaire ; c'est le cas lorsque la solution maximale de (30) qui coïncide avec $U(\cdot,t)$ sur $\mathbb{R}^+$ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et admet une limite quand $y \to -\infty$.

[2]Rappelons que pour Navier-Stokes à vitesse nulle au bord, pour lequel le bord est caractéristique, cette épaisseur est bien plus grande, de l'ordre de $\sqrt{\epsilon}$.

7.1 La condition aux limites résiduelle

Le problème (28, 29, 30) est évidemment sur-déterminé. Par exemple, si $r = n$ (c'est-à-dire si B est inversible), (28) est une vraie condition de Dirichlet et (30) est une vraie EDO. À elles deux, elles déterminent de manière unique $U(\cdot, t)$, qui n'a pas de raison de converger vers le point fixe $u(0, t)$ quand $y \to +\infty$. Par exemple, si tous les a_j sont positifs, $u(0, t)$ est répulsif et cette convergence n'a lieu que si $U(\cdot, t) \equiv u(0, t)$ et donc si déjà $D(u(0, t); t) = 0$. Ce qui montre que si $\sigma(df) \subset]0, +\infty[$, la limite u doit satisfaire la condition de Dirichlet complête, la même que celle satisfaite par u^ϵ.

Dans le cas général, nous désignons par $\mathcal{C}(t)$ l'ensemble des valeurs de l'état a telles que le problème

$$\begin{aligned} D(U(0); t) &= 0, \\ \lim_{y \to +\infty} U(y) &= a, \\ B(U)\frac{dU}{dy} &= f(U) - f(a), \quad y > 0 \end{aligned}$$

admette une solution. Cet ensemble contient au moins tous les a qui satisfont la condition de Dirichlet $D(a, t) = 0$. On vient de voir que dans certains cas il ne contient rien d'autre. Mais si au contraire $r = n$ et $\sigma(df) \subset]-\infty, 0[$, alors pour tout a, le point fixe a est attractif pour l'EDO $U' = B^{-1}(f(U) - f(a))$, de sorte que $\mathcal{C}(t)$ est un ouvert. On voit donc que la nature de $\mathcal{C}(t)$ dépend crucialement du nombre p de valeurs propres (strictement) positives de df.

Puisque u^ϵ converge vers u dans un sens fort (c'est notre hypothèse de travail), par exemple presque partout en restant borné, un raisonnement analogue à celui de la section 2 montre que u est une solution de (10), dans $\mathbb{R}_x^+ \times \mathbb{R}_t^+$. L'appartenance à l'ensemble $\mathcal{C}(t)$ n'est rien d'autre que la condition aux limites que satisfait u. On caractérise donc la limite u de u^ϵ par le problème aux limites suivant

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x f(u) &= 0, \quad x, t > 0, \\ u(0, t) \in \mathcal{C}(t), &\qquad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), &\qquad x > 0, \end{aligned} \tag{31}$$

où u_0 est la limite des conditions initiales u_0^ϵ. La condition $u(0, t) \in \mathcal{C}(t)$ est appelée *condition aux limites résiduelle*.

Bien entendu, lorsque $r < n$, l'équation de profil est une équation différentielle-algébrique, dont les $n - r$ premières lignes sont purement algébriques.

7.2 L'exemple linéaire

Contrairement au cas des ondes et des profils de choc, les systèmes linéaires offrent un terrain d'étude non trivial pour les couches limites. Nous pouvons directement considérer un système (22), avec les hypothèses classiques : structure de bloc, existence d'un bon symétriseur S. Comme on l'a vu plus haut, S est diagonal par bloc, symétrique défini positif. Les matrices S_1A_1 et SA sont symétriques. Enfin, $Z \mapsto S_4Z \cdot bZ$ est définie positive.

L'équation de profil s'écrit $A(v - v_+) = Bv'$, c'est-à-dire

$$A_1w + A_2z = A_1w_+ + A_2z_+, \quad A_3w + A_4z = bz' + A_3w_+ + A_4z_+,$$

où $v_+ = (w_+, z_+)$ désigne la valeur de v en $y = +\infty$. Le bord n'étant pas caractéristique pour (22), A_1 est inversible. On obtient l'EDO linéaire $z' = b^{-1}Sh(z - z_+)$, où $Sh := A_4 - A_3(A_1)^{-1}A_2$ est le *complément de Schur* de A_1 dans A.

Soit μ une valeur propre de $b^{-1}Sh$ et Z un vecteur propre associé. Définissant $W := -A_1^{-1}A_2Z$ et $X := (W, Z)^t$, nous avons $AX = \mu BX$. En particulier, si le bord n'est pas caractéristique pour le modèle non visqueux (c'est-à-dire si A est inversible), μ n'est pas nul. Multipliant à gauche cette égalité par X^*S, le premier membre devient réel. On a donc $\mu X^*SBX \in \mathbb{R}$, ou $\mu Z^*S_4bZ \in \mathbb{R}$. Comme la partie réelle de Z^*S_4bZ est strictement positive, il s'ensuit que μ n'est pas imaginaire pur.

On a donc montré que la matrice $M := b^{-1}Sh$ est *hyperbolique* :

$$\mathbb{C}^n = S(M) \oplus U(M).$$

L'ensemble des solutions de l'équation homogène $Bv' = Av$, qui tendent vers zéro en $+\infty$, est isomorphe à $S(M)$, *via* la projection $v \mapsto z$ (dont l'inverse est $z \mapsto (-A_1^{-1}A_2z, z)$). On le note $S(A; B)$. Avec cette notation, on a $S(A) = S(A; I_n)$. La condition $v(+\infty) = v_+$ s'exprime donc par $v(0) - v_+ \in S(A; B)$.

Proposition 1 *Le sous-espace stable de $M = b^{-1}Sh$, donc aussi $S(A; B)$, est de dimension $r + p - q$.*

Preuve.

Avec $\hat{b} = Sb$ et $\hat{A} = SA$, on a encore $M = \hat{b}^{-1}\hat{Sh}$, où $\hat{Sh}$ est le complément de Schur de $\hat{A}_1$ dans $\hat{A}$. On peut donc supposer que $S = I_n$, c'est-à-dire que A est symétrique et $Z \cdot bZ \geq \omega\|Z\|^2$. De plus, A_1 et A sont inversibles.

Comme la matrice $b(s) := sb + (1-s)I_r$ satisfait la même propriété de positivité, la matrice $M(s) := b(s)^{-1}Sh$ n'a pas non plus de valeur propre purement imaginaire. Son nombre N de valeurs propres négatives est donc indépendant de s. On peut ainsi se ramener au cas $s = 0$, c'est-à-dire à $b = I_r$. Il suffit donc de montrer le

Lemme 1 *Si A est symétrique et si A et A_1 sont inversibles, alors Sh possède exactement $r + q - p$ valeurs propres négatives.*

Preuve.

C'est un énoncé sur les formes quadratiques, dont on vérifie sans peine qu'il est invariant par la transformation

$$A \mapsto \begin{pmatrix} P^t & 0 \\ R^t & Q^t \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} P & R \\ 0 & Q \end{pmatrix},$$

lorsque P, Q sont inversibles. Par un choix convenable de P, Q, R, on se ramène au cas où A est diagonale par blocs, de sorte que $Sh = A_4$. L'énoncé est alors évident.

♢

La condition aux limites du modèle (22) étant de la forme $Dv(0,t) = a_0$, on trouve la condition aux limites résiduelle :

$$v_+ - a_0 \in \ker D + S(A; B).$$

Choisissant une matrice $\mathcal{D}$ telle que

$$\ker \mathcal{D} = \ker D + S(A; B),$$

elle s'écrit encore (rappelons que cette condition aux limites s'applique à v_+, qui est la trace en $x = 0$ de la limite $v(x,t)$)

$$\mathcal{D}v_+ = b_0, \quad b_0 := \mathcal{D}a_0. \tag{32}$$

Pour que (32) fasse de $v_t + Av_x = 0$ un problème aux limites bien posé, il faut et il suffit (voir (16)) que

$$\mathbb{R}^n = (\ker D + S(A; B)) \oplus U(A).$$

Comme la somme $(n - r - q) + (r + q - p) + p$ des dimensions de ces trois sous-espaces vectoriels vaut n, il revient au même d'écrire

$$\mathbb{R}^n = \ker D \oplus S(A; B) \oplus U(A).$$

Lemme 2 *Les sous-espaces $S(A;B)$ et $U(A)$ sont d'intersection vide.*

Preuve.

Si $v_0 \in S(A;B)$, il existe v, solution de $Bv' = Av$, qui tend vers zéro exponentiellement vite en $+\infty$ et telle que $v(0) = v_0$. Multipliant par Sv' et intégrant, il vient

$$\int_0^{+\infty} (Bv') \cdot (Sv')dx + \frac{1}{2}\, {}^t v_0 S A v_0 = 0.$$

De même, si $v_0 \in S(A)$, il existe V, solution de $V' = AV$, qui tend vers zéro exponentiellement vite en $-\infty$ et telle que $v(0) = v_0$. Multipliant par SV' et intégrant, il vient

$$\int_{-\infty}^{0} SV' \cdot V' dx = \frac{1}{2}\, {}^t v_0 S A v_0.$$

Si v_0 est dans l'intersection, ces deux formules donnent $Bv' \equiv 0$ et $SV' \equiv 0$, car les deux intégrales sont positives. Il s'ensuit que $Av \equiv 0$, c'est-à-dire $v \equiv 0$ et donc $v_0 = 0$.

$\diamondsuit$

Grace au lemme 2, nous définissons le sous-espace vectoriel

$$F(A;B) := S(A;B) \oplus U(A),$$

qui est de dimension $r + q$. D'après ce qui précède, le problème aux limites

$$v_t + Av_x = 0, \quad \mathcal{D}v(0,t) = b_0(t) \tag{33}$$

est bien posé si et seulement si

$$\mathbb{R}^n = \ker D \oplus F(A;B). \tag{34}$$

Cette condition de transversalité est en général différente de l'hypothèse (27). Elle sont différentes dès que

$$F(A;B) \neq (U(A_1) \times \mathbb{R}^r).$$

On peut donc prédire qu'il y a des conditions aux limites (c'est-à-dire des matrices D) pour lesquelles le problème parabolique est bien posé, mais le problème hyperbolique obtenu en faisant $\epsilon \to 0^+$ ne l'est pas. Celles-ci sont exceptionnelles, puisque $\ker D$ doit rencontrer $F(A;B)$, sans rencontrer $U(A_1) \times \mathbb{R}^r$. Nous verrons plus loin qu'il y a beaucoup plus de matrices D pour lesquelles le passage à la limite $\epsilon \to 0^+$ ne marche pas pour cause d'instabilité. Signalons quand même que, pour une condition aux limites dissipative (la restriction de SA à $\ker D$ est négative), ce passage à la limite se passe bien.

7.3 Stabilité du cas linéaire

Soit λ un nombre complexe, avec $Re\lambda > 0$. L'équation différentielle

$$Bv'' = Av' + \lambda v$$

se réécrit comme une EDO du premier ordre

$$\begin{pmatrix} w \\ z \\ z' \end{pmatrix}' = \mathcal{A}(\lambda) \begin{pmatrix} w \\ z \\ z' \end{pmatrix},$$

où

$$\mathcal{A}(\lambda) := \begin{pmatrix} -\lambda A_1^{-1} & 0 & -A_1^{-1}A_2 \\ 0 & 0 & I \\ -\lambda b^{-1}A_3A_1^{-1} & \lambda b^{-1} & b^{-1}Sh \end{pmatrix}.$$

Vérifions que $\mathcal{A}(\lambda)$ est une matrice hyperbolique. En effet, si μ est une valeur propre, il existe un vecteur non nul V tel que $(\mu^2 B - \mu A - \lambda I)V = 0$. Mais si $\mu = i\xi$ avec ξ réel, alors $-i\xi V^* SAV = \lambda V^* SV + \xi^2 S\bar{V} \cdot BV$, où le second membre est de partie réelle strictement positive, tandis que le premier est imaginaire pur, une contradiction.

À partir du sous-espace stable $S(\mathcal{A}(\lambda))$, nous formons un sous-espace vectoriel $\Sigma(\lambda)$ de $\mathbb{C}^n$, au moyen de la projection

$$\begin{pmatrix} w \\ z \\ z_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}.$$

Lorsque $v_0 \in \ker D \cap \Sigma(\lambda)$, il lui correspond une solution particulière du problème aux limites visqueux, de la forme

$$v(x,t) = \text{cste} \cdot e^{\lambda t/\epsilon} V(x/\epsilon),$$

où $V(0) = v_0$ et donc $Dv(0,t) \equiv 0$. Si v_0 n'est pas nul, on obtient ainsi des solutions qui peuvent se superposer à une couche limite et qui explosent quand ϵ tend vers zéro. Ce phénomène d'instabilité est l'analogue parfait de l'instabilité spectrale évoquée à la section 4.

En résumé, s'il existe λ, de partie réelle strictement positive, tel que $\ker D \cap \Sigma(\lambda) \neq \{0\}$, la limite $\epsilon \to 0+$ est violemment instable. Le problème limite (33) peut être bien posé, mais il ne pourra pas représenter le comportement du modèle visqueux lorsque $\epsilon \to 0+$.

Une analyse asymptotique délicate permet de montrer que

$$\lim_{\lambda\to 0+}\Sigma(\lambda)=S(A;B)\oplus U(A),\quad \lim_{\lambda\to+\infty}\Sigma(\lambda)=U(A_1)\times I\!R^r, \tag{35}$$

de sorte que le problème visqueux et son problème limite sont bien posés lorsque, respectivement, $\ker D\cap\Sigma(+\infty)=\{0\}$ et $\ker D\cap\Sigma(0+)=\{0\}$.

Utilisant des bases de $\ker D$ et de $\Sigma(\lambda)$, et formant un déterminant, on caractérise les valeurs propres λ comme les racines d'une équation $E(\lambda)=0$. On appelle E la "fonction d'Evans" du problème visqueux. On montre que la base de $\Sigma(\lambda)$ peut être choisie avec des coefficients holomorphes, de sorte que E est une fonction holomorphe, à valeurs réelles sur $(0,+\infty)$.

Il y a donc instabilité spectrale lorsque E possède un zéro de partie réelle strictement positive. D'après le théorème de Rouché, cette condition est *ouverte* : elle persiste par petite perturbation du problème. Par exemple, l'ensemble des matrices D pour lesquelles il y a instabilité spectrale est un ouvert de $M_{(n-r-q)\times n}(I\!R)$. Il est donc beaucoup plus gros que l'ensemble, fermé d'intérieur vide, des matrices pour lesquelles (33) est mal posé.

Supposons que $F(A;B)\neq U(A_1)\times I\!R^r$. Dans l'ensemble (une "variété Grasmannienne") des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^n$ de codimension $r+q$, ceux qui ne rencontrent ni $F(A;B)$, ni $U(A_1)\times I\!R^r$ (deux sous-espaces de dimension $r+q$) forment un ouvert ayant deux composantes connexes. On montre que le signe de $E(\alpha)E(\lambda)$, lorsque α,λ sont réels et $0<\alpha<<1$, $\lambda>>1$, est déterminé par la composante à laquelle appartient $\ker D$. Dans la "mauvaise" composante, ce signe est négatif ; par le théorème des valeurs intermédiaires, Σ s'annule sur $(0,+\infty)$ et on a une instabilité spectrale.

7.4 Cas parabolique

Lorsque $r=n$ (cas parabolique linéaire), on a $q=0$, et il n'y a pas de perte de généralité à choisir $D=I_n$. Une estimation *a priori* montre qu'il y a stabilité : soit λ un nombre avec $Re\lambda>0$, et soit $v\in L^2(I\!R^+)^n$ une solution de

$$Bv''=Av'+\lambda v,\quad v(0)=0.$$

Multipliant à gauche par v^*S, prenant la partie réelle, nous obtenons

$$Re(v^*SBv'')=\frac{1}{2}(v^*SAv)'+(Re\lambda)v^*Sv.$$

Intégrons de 0 à $+\infty$, il vient

$$\int_0^\infty ((Re\lambda)v^*Sv + Re(Bv' \cdot S\bar{v}'))\, dx = 0.$$

Chaque terme étant positif, on en déduit $v \equiv 0$.

Ce calcul peut être fait directement sur le problème d'évolution

$$u_t + Au_x = Bu_{xx} \text{ sur } x, t > 0, \quad u(0,t) = 0.$$

Multipliant par ${}^tuS$ et intégrant, on parvient à

$$\int_0^\infty ({}^tuSu)(x,T)\, dx + 2\int_0^T \int_0^\infty Bu_x \cdot Su_x\, dx\, dt = \int_0^\infty ({}^tu_0Su_0)(x)\, dx.$$

8 Cas non-linéaire

8.1 Structure de l'ensemble $\mathcal{C}(t)$; (I)

Soit v^+ un élément de $\mathcal{C}(t)$, c'est-à-dire une valeur possible en $x = 0$ de la limite $u(x,t)$.

Notons $\mathcal{P}(v^+)$ l'ensemble des solutions de l'équation de profil

$$B(U)\frac{dU}{dy} = f(U) - f(v^+), \quad U(+\infty) = v^+. \tag{36}$$

Notons aussi $P(v^+;x)$ l'ensemble des valeurs en x de ces solutions. Le linéarisé de (36) en son point critique v^+ étant

$$B^+V' = A^+V,$$

on montre que $\mathcal{P}(v^+)$ est une variété différentiable et que, lorsque $x \to +\infty$, $P(v^+;x)$ tend vers l'espace affine $v^+ + S(A;B)$. La dimension de $\mathcal{P}(v^+)$ est donc $r + q - p$: la condition $U(0) \in P(v^+;0)$ peut s'écrire au moyen de $n - r - q + p$ équations scalaires, notées $\phi(U(0), v^+; t) = 0$.

Ainsi, en agitant les mains, $\mathcal{C}(t)$ est défini par les $(r+q)+(n-r-q+p) = n+p$ équations

$$D(U(0);t) = 0, \quad \phi(U(0), v^+; t) = 0.$$

De celles-ci, $U(0)$ doit être éliminé pour obtenir l'équation $\psi(v^+;t) = 0$ de $\mathcal{C}(t)$. Comme $U(0)$ a n composantes, il reste en général p équations pour définir $\mathcal{C}(t)$, qui est bien le nombre attendu pour un problème aux limites hyperbolique à p caractéristiques entrantes. Bien entendu, pour que le problème (31) soit bien posé, il faut encore qu'une propriété de transversalité soit satisfaite.

8.2 Stabilité spectrale

L'étude de la stabilité spectrale de la couche limite permet de rendre rigoureuses les affirmations du paragraphe précédent. Elle donne même beaucoup plus puisqu'elle explique à quelle condition le passage à la limite $\epsilon \to 0+$ est justifié, et ce qui se passe lorsqu'il ne l'est pas.

Une couche limite U étant une solution particulière du problème (12) avec une condition aux limites $\mathcal{D}(u(0,t);t) = 0$, à t fixé et $\epsilon = 1$, nous considérons la *stabilité spectrale* de U. Pour cela, nous linéarisons ce problème autour de U. Nous obtenons donc un problème aux limites linéaire

$$v_t = Lv \text{ sur } \{x, t > 0\}, \quad Dv(0,t) = 0, \tag{37}$$

où L est un opérateur différentiel à coefficients variables (si U n'est pas constant) et D est une matrice de taille $(r+q) \times n$. On dit alors que U est spectralement stable si $r(L) \leq 0$ (ce qui implique $r(L) = 0$, car zéro est dans le spectre essentiel de L). Le domaine de L est ici

$$\{v \in L^2(I\!R^+)\,;\, Lv \in L^2(I\!R^+) \text{ et } Dv(0) = 0\}.$$

Une couche limite spectralement instable ne peut pas être observée en pratique, parce que de petites perturbations seront amplifiées par un facteur de l'ordre de

$$\exp \frac{r(L)t}{\epsilon}.$$

Ces perturbations deviennent prépondérantes devant le profil en un temps $O(\epsilon)$, empêchant la convergence de la suite de solutions u^ϵ, dans quelque sens que ce soit. On est donc amené à réduire l'ensemble $\mathcal{C}(t)$ des valeurs au bord admissibles, en ne retenant que celles pour lesquelles la couche limite correspondante est spectralement stable. Cet ensemble plus petit étant noté $\mathcal{C}_s(t)$, le problème limite devient

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x f(u) &= 0, \quad x, t > 0, \\ u(0,t) &\in \mathcal{C}_s(t), \qquad t > 0, \\ u(x,0) &= u_0(x), \qquad x > 0. \end{aligned} \tag{38}$$

Lorsque $x \to +\infty$, on a $L \sim L^+$, opérateur à coefficients constants obtenu en linéarisant autour de la solution constante $u \equiv u^+$. Faisons agir L^+ sur $L^2(I\!R)$; il n'y a donc pas de bord, ni de condition aux limites. Comme dans

le cas des chocs[3], le spectre essentiel de L est égal au spectre de L^+, et celui-ci se calcule par Fourier :

$$\sigma_{ess}(L) = \sigma(L^+) = \bigcup_{\xi \in I\!R} \sigma(-\xi^2 B^+ - i\xi A^+).$$

À nouveau, cette partie du spectre est confinée dans le demi-plan de partie réelle négative ou nulle. La partie instable éventuelle, dans le spectre de L, est donc constituée de vraies valeurs propres, à savoir des nombres λ avec $Re\lambda > 0$, pour lesquels il existe $v \in L^2(I\!R)^n$ non nul, tel que

$$(L - \lambda)v = 0, \quad Dv(0) = 0. \tag{39}$$

Il n'est pas aisé de vérifier la stabilité spectrale d'une couche limite, puisqu'on ne sait pas résoudre explicitement les systèmes différentiels linéaires à coefficients variables. Deux méthodes sont disponibles, sans qu'aucune soit satisfaisante.

La première consiste à faire une estimation d'énergie. On a vu au paragraphe 7.4 comment elle permet de montrer la stabilité des constantes lorsque $r = n$ (cas parabolique). Comme elle est robuste, elle fournit aussi la stabilité des couches limites de petite amplitude (i.e différant peu d'une constante), toujours avec $r = n$. Plus généralement, on obtient la stabilité des constantes pour une condition aux limites dissipative, c'est-à-dire lorsque d'une part, $v \in \ker D$ implique $z = 0$, d'autre part la restriction de SA à $\ker D$ est négative. Lorsqu'elle est définie négative, l'estimation s'étend encore aux couches limites de petite amplitude.

8.3 La fonction d'Evans

Les défauts de la méthode d'énergie sont d'une part qu'elle ne s'applique pas aux couches limites de grande amplitude en général (et pour cause, puisque certaines d'entre elles sont spectralement instables) et, d'autre part, qu'elle peut ne pas marcher pour une couche limite constante, même lorsque celle-ci est stable. C'est pourquoi une seconde méthode a été developpée, d'ambition universelle, mais qui reste malheureusement abstraite : la *fonction d'Evans*. Nous décrivons succinctement sa construction.

On montre d'abord que, pour $Re\lambda > 0$, l'ensemble des solutions de $(L - \lambda)v = 0$ qui tendent vers zéro en $+\infty$ est un espace vectoriel (notons-le $\mathcal{E}(\lambda)$)

[3]Mais ici, il n'y a pas d'opérateur L^-, puisque x ne parcourt que $I\!R^+$.

de dimension $r+q$, qui dépend analytiquement de λ. On peut choisir une base $\{(v_1(\cdot;\lambda),\cdots,v_{r+q}(\cdot;\lambda)\}$ de $\mathcal{E}(\lambda)$, dont les éléments sont des fonctions holomorphes de λ. Le nombre λ est une valeur propre s'il existe un élément V non nul de $\mathcal{E}(\lambda)$ tel que $V(0)\in\ker D$. Formant le déterminant

$$\Delta(\lambda):=\det(Dv_1(0;\lambda),\cdot,Dv_{r+q}(0;\lambda)),$$

on obtient une fonction holomorphe, dont les zéros sont exactement les valeurs propres instables du problème linéarisé. On appelle Δ la *fonction d'Evans* de (39). On montre (gap lemma) que $\mathcal{E}$, et donc Δ, admettent un prolongement holomorphe au voisinage de $\lambda=0$.

L'utilisation la plus simple de la fonction d'Evans est la suivante. Lorsque λ est réel positif, Δ est à valeur réelle. On peut comparer son signe au voisinage de l'origine (asymptotique basse fréquence) et de $+\infty$ (asymtotique haute fréquence). Lorsque ces signes sont opposés, le théorème des valeurs intermédiaires assure que Δ s'annule quelque part sur $(0,+\infty)$ et donc que la couche limite est instable. Cette procédure ne peut fournir qu'une condition suffisante d'instabilité, c'est-à-dire une condition nécessaire de stabilité. On appelle *indice de stabilité* le signe du produit $\Delta(0)\Delta(+\infty)$.

Lorsque $r=n$, l'asymptotique haute fréquence est bien comprise, parce que le terme du second ordre Bv'' domine dans L. Lorsque $r<n$, une analyse générale reste à faire, qui montrera sans doute que $U(A_1)$ joue un rôle essentiel. Quant à l'asymptotique basse fréquence, elle consiste à résoudre $Lv=0$ (on fait $\lambda=0$) avec v borné sur $\mathbb{R}^+$, puis à comprendre , parmi les solutions trouvées, quelles sont celles qui passent dans L^2 lorsqu'on fait croître λ. À nouveau, l'équation linéaire $Lv=0$ est à coefficients variables, mais on peut l'intégrer une fois, car L est de la forme $L=\partial_x\circ P$, où P est un opérateur différentiel d'ordre un. Il vient donc l'équation

$$Pv=\text{ cste.} \tag{40}$$

Celle-ci est bien entendu différentielle-algébrique. Lorsque r est petit, elle est assez simple. Notamment, si $r=1$, elle se ramène à une seule équation différentielle, qu'on peut intégrer par quadrature.

Lorsque $p=0$ (et donc $q=0$), les solutions bornées de (40) satisfont en fait $Pv=0$. On peut alors voir $\Delta(0)$ comme la valeur en $x=0$ d'un Wronskien, défini par

$$W(x):=\det(Dv_1(x;0),\cdots,Dv_{r+q}(x;0)).$$

Puisqu'un Wronskien ne s'annule pas, il est de signe constant. Pour chaque valeur de x_0, $W(x_0)$ est égal à la valeur en $\lambda = 0$ de la fonction d'Evans associée à la couche limite tronquée $U(\cdot + x_0)$, avec la même condition aux limites linéarisée $Dv(0) = 0$. On a donc une famille de couches limites qui ont toutes le même indice de stabilité (car le signe en $\lambda \sim +\infty$, qui ne dépend que de u^+, ne change pas). Faisant tendre x_0 vers $+\infty$, on trouve que la couche limite U a le même indice de stabilité que la solution constante u^+. Si celle-ci est instable, on en déduit que la couche limite l'est aussi.

Une autre utilisation de la fonction d'Evans peut être envisagée, sur le plan numérique. Elle consiste à calculer les valeurs (approchées) de Δ le long d'un demi-cercle $Re\lambda > 0$, $|\lambda| = R$, avec R assez grand, puis d'en déduire le nombre de zéros de Δ dans ce demi-disque, par la formule de Cauchy. Pour cela, on calcule le nombre de tours que fait $\Delta(\lambda)$ autour de l'origine, lorsque λ parcourt ce demi-cercle. La mise en œuvre de cette méthode, bien que délicate, donne de bons résultats. On pourra consulter [6].

8.4 Structure de l'ensemble $\mathcal{C}(t)$; (II)

Pour $r = n$, la condition aux limites du problème visqueux, non linéaire, est une vraie condition de Dirichlet, disons $u(0,t) = a(t)$. On note alors $\mathcal{C}(a(t))$ plutôt que $\mathcal{C}(t)$. On a bien entendu $a \in \mathcal{C}(a)$. On montre [16] que $\mathcal{C}(a)$ est, au voisinage de a, une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, de codimension p, qui vérifie la bonne condition de transversalité (voir (16))

$$\mathbb{R}^n = T_a\mathcal{C}(a) \oplus U(df(a)),$$

où $T_a\mathcal{C}(a)$ désigne l'espace tangent en a à cette sous-variété.

Cela règle le cas des couches limites de petite amplitude. Pour une couche limite quelconque, le résultat définitif a été obtenu par F. Rousset [29], sous la forme suivante.

Théorème 2 *Soit u^+ un élément de $\mathcal{C}(t)$, associé à une couche limite U. On suppose que $\Delta(0)$ n'est pas nul. Alors $\mathcal{C}(t)$ est, au voisinage de u^+, une sous-variété de codimension p, qui satisfait la transversalité*

$$\mathbb{R}^n = T_{u^+}\mathcal{C}(t) \oplus U(df(u^+)).$$

En particulier, le problème limite (31) est localement bien posé, pour des données initiales proches de u^+.

On retrouve ainsi, comme dans le cas linéaire, la dichotomie entre les deux propriétés

- La couche limite est spectralement stable.
- Le problème limite (31) est bien posé.

La première propriété dit que la fonction d'Evans ne s'annule pas pour $Re\lambda > 0$, tandis que la seconde dit qu'elle ne s'annule pas en $\lambda = 0$.

8.5 Cas multi-dimensionnel

Les couches limites non-caractéristiques sont par essence mono-dimensionnelles[4]. Cependant, leurs perturbations ont parfaitement le droit de varier dans toutes les directions. Dans le problème linéarisé $v_t = Lv$, les coefficients de l'opérateur L ne dépendent donc que de x_d, mais L contient des dérivées dans toutes les directions.

Comme au paragraphe 5.1, l'analyse spectrale de L commence par une transformation de Fourier en les variables tangentielles $(x_1, \ldots, x_{d-1})$, ce qui conduit à des EDOs de la forme $\mathcal{L}(\eta)v = \lambda v$, où $\eta \in I\!R^{d-1}$ et $Re\lambda > 0$. La fonction d'Evans, analytique, dépend alors des arguments η et λ. L'asymptotique basse fréquence (i.e $\rho \to 0+$) est possible le long des rayons $\rho \mapsto (\rho\lambda_0, \rho\eta_0)$ et redonne la condition de Kreiss-Lopatinskii (17) du problème limite (voir [40, 29]). En dehors du cas discuté plus haut $\eta = 0$, $\lambda \in (0, +\infty)$, $\Delta(\lambda, \eta)$ n'est pas une fonction à valeurs réelles.

Naturellement, la possibilité de varier dans les directions tangentielles au bord augmente les chances d'instabilité. On pourra donc trouver des couches limites qui étaient stables en une variable d'espace (c'est-à-dire satisfaisant $\Delta(\lambda, 0) \neq 0$ pour tout λ), mais instables en dimension supérieure.

8.6 Stabilité non linéaire

La condition initiale et la condition aux limites étant données pour le problème visqueux, de sorte que ce soit un problème bien posé, on peut en déduire la condition aux limites résiduelle. Si le problème limite (31) est lui aussi bien posé, ce qui est presque toujours le cas en dimension $d = 1$, il

[4]Rappelons qu'il en va tout autrement dans le cas caractéristique, comme on le voit avec l'équation de Prandtl.

possède une solution régulière, locale en temps, notée u. À partir de la trace $u^+(t) := u(0,t)$, on peut construire la couche limite $U(y;t)$.

La question fondamentale est alors celle de la convergence de la solution visqueuse u^ϵ vers u, au moins sur un intervalle de temps $(0,T)$ non trivial. Une condition nécessaire évidente (bien que sa nécessité n'ait pas été démontrée à ce jour) est que, pour chaque t appartenant à $(0,T)$, la couche limite $U(\cdot;t)$ soit spectralement stable.

Dans une large mesure, on a pu montré que cette condition est suffisante. Comme souvent en analyse, on suppose en fait une variante uniforme de cette condition, à savoir que la fonction d'Evans ne s'annule pour aucun λ de partie réelle positive ou nulle. La plupart des résultats ont été établis pour $B \equiv I_n$. Pour une couche limite de petite amplitude (la condition est automatiquement satisfaite), le cas $d = 1$ est traité par Gisclon et l'auteur [16], et le cas multi-dimensionnel est dû à Grenier et Guès [18]. Dans cette situation, des estimations d'énergie sont suffisantes. Le cas de couches limites de grande amplitude (Greniet et Rousset [19]) nécessite la construction, très technique, de fonctions de Green. Il n'est résolu pour l'instant qu'en une seule variable d'espace.

Mentionnons que, pour les systèmes de Kawashima, la stabilité asymptotique (i.e. quand $t \to +\infty$) des profils de choc de petite amplitude a été démontrée par Mascia et Zumbrun [27], en une variable spatiale. Il y a un espoir que des méthodes semblables puissent être mises en œuvre pour la stabilité non-linéaire des couches limites.

Le cas scalaire, en une variable spatiale a été réglé par Freistühler et l'auteur [13] : toute couche limite est non-linéairement stable dans $L^1(\mathbb{R}^+)$, à l'exception des couches constantes $U \equiv u^+$ lorsque $f'(u^+) > 0$.

9 Application : la dynamique des gaz

On reprend ici les équations de Navier-Stokes, en une seule variable d'espace :

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0, \tag{41}$$

$$(\rho v)_t + (\rho v^2 + p(\rho, e))_x = \epsilon(\nu v_x)_x, \tag{42}$$

$$\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho e\right) + \left(\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho e + p\right) v\right)_x = \epsilon(\nu v v_x + \kappa\theta_x)_x. \tag{43}$$

On a donc $n = 3$, $r = 2$. Le problème non visqueux est le système d'Euler, qu'on suppose hyperbolique. La matrice A_1 est scalaire, égale à (v). Nous

allons considérer le cas $v > 0$, pour lequel on a $q = 1$, donc $r + q = n$. La condition aux limites sera donc une vraie condition de Dirichlet et nous n'aurons pas moyen de tricher dans le but de susciter stabilité ou instabilité.

On choisit donc un 1-choc stationnaire admissible, c'est-à-dire qui admet un profil de choc $\mathcal{U}$. On a vu que cela équivaut, d'après Gilbarg, à la condition de Liu[5]. Par exemple, pour un gaz parfait, dont la loi d'état est $p = (\gamma-1)\rho e$, un choc de Lax est admissible. On choisit une abscisse X et on prend pour couche limite le profil tronqué

$$U_X(x) := \mathcal{U}(x + X), \quad x > 0.$$

Notons que, ρv étant constant, et puisque $v^{\pm} > 0$, on a $v > 0$ le long de $\mathcal{U}$. La "matrice" A_1 est donc toujours inversible et toute l'analyse décrite plus haut est valable.

On a ainsi introduit un paramêtre réel, à savoir X, dans le problème de stabilité. La couche limite sera stable pour $X \gg 1$, parce qu'elle sera de petite amplitude et que l'état constant u^+ est stable (exercice : le vérifier). Mais elle pourra être instable pour d'autres valeurs de X.

La fonction d'Evans Δ du problème dépend donc des variables λ et X. Nous considérerons uniquement l'indice de stabilité de U_X, et pour cela nous nous intéressons à la valeur $W(X)$ de Δ en $\lambda = 0$. Comme $p \geq q = 1$, W n'est pas un Wronskien. On peut écrire une équation différentielle $W' = aW + b$ dans laquelle les coefficients a et b ne sont pas suffisamment explicites pour qu'on puisse déterminer en tout point le signe de W. Cependant, leurs comportements en $-\infty$ (où l'état tend vers u^-) sont bien connus et on peut en déduire le signe de W, donc l'indice de stabilité, lorsque $X \ll -1$.

On montre alors que si $\gamma > 2$ (supposant la loi des gaz parfaits), si $\nu \geq \kappa$ et si l'amplitude du choc (u^-, u^+) est assez grande, alors cet indice de stabilité est asymptotiquement négatif. Autrement dit, lorsque X est négatif et assez grand (c'est-à-dire lorsque la couche limite est presque égale au profil du choc), la couche limite est spectralement instable.

[5]On pourrait imposer à $\mathcal{U}$ d'être lui-même spectralement stable, mais ce sera inutile, car la stabilité de la couche limite n'est pas liée à celle du profil de choc sous-jacent.

9.1 Cas incompressible

La situation n'est pas sensiblement différente pour les équations de Navier-Stokes d'un fluide incompressible :

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = \epsilon \Delta u, \quad \text{div } u = 0. \tag{44}$$

Prenons une condition aux limites non-homogène

$$u(0,t) = a,$$

avec $a \cdot \nu \neq 0$, de sorte que le bord n'est pas caractéristique. La couche limite est à nouveau de la forme

$$u^\epsilon(x,t) \sim U\left(\frac{-x \cdot \nu}{\epsilon}; y, t\right),$$

où le temps et la variable tangentielle y ne jouent qu'un rôle de paramêtres. Supposons par exemple que le domaine physique soit le demi-espace $\{x_d > 0\}$. L'équation de profil est

$$u_d' = 0, \quad a_d v' = v''.$$

On en déduit facilement la forme de la condition aux limites résiduelle. Si $a_d > 0$, il vient $u(y,0,t) = a$, tandis que si $a_d < 0$, on a seulement $u_d(y,0,t) = a_d$. Pour un domaine quelconque, on a respectivement $u(x,t) = a(x,t)$, si $a \cdot \nu < 0$ (flux entrant) et $u(x,t) \cdot \nu = a(x,t) \cdot \nu$ si $a \cdot \nu > 0$ (flux sortant).

La couche limite est ici explicitement connue. L'opérateur linéarisé l'est donc aussi. Mais comme il est à coefficients variables, on ne sait quand même pas faire une analyse spectrale exacte. Comme précédemment, il se ramène, *via* un changement d'échelle, à un opérateur indépendent de ϵ.

Pour un flux entrant, la couche limite est constante ; sa stabilité, tant spectrale que non-linéaire, est facile à établir. Pour un flux entrant, la stabilité spectrale dépend d'un unique nombre R, identifié par XXX comme un nombre de Reynolds. Pour de petites valeurs de R, Temam et Wang [39] ont prouvé la stabilité non-linéaire ; ce résultat est l'analogue incompressible de ceux de [16, 18]. Pour de grandes valeurs de R, la couche limite est spectralement instable [20].

10 Couches limites numériques

Ceux qui s'intéressent au calcul numérique le savent bien, quand ils parlent de "viscosité numérique", une discrétisation par différences finies a des effets

très semblables à ceux produits par l'ajoût de termes de diffusion. C'est pourquoi on s'est si longtemps étendu, dans les paragraphes précédents, sur l'approximation par viscosité. Il est facile maintenant d'adapter tout ce qui a été dit au cas des schémas conservatifs. Pour simplifier, nous prendrons un schéma à trois points, bien que les idées ne soient aucunement limitées à ce câdre :

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}(F(u_{j-1}^n, u_j^n) - F(u_j^n, u_{j+1}^n)).$$

Le flux numérique F est consistant si $F(a,a) = f(a)$ pour tout a. On suppose qu'une condition CFL, assurant la stabilité L^2 des constantes pour le problème de Cauchy, est satisfaite.

Lorsque le problème est posé dans un demi-espace, disons dans $\mathbb{R}^+$, on écrit le schéma pour les entiers $j \geq 1$, et on le complête par la donnée de valeurs au bord $u_0^n := a(n\Delta t)$. C'est donc une condition de type Dirichlet.

La question fondamentale est la convergence du schéma et l'identification de la limite $u(x,t)$, lorsque celle-ci existe. On prévoit bien entendu qu'elle satisfasse

$$u_t + f(u)_x = 0,$$

pour $x, t > 0$. À nouveau, le système sera complété par une condition aux limites résiduelles en $x = 0$. Celle-ci exprime le raccordement de u avec une couche limite U. La longueur critique dans la couche limite, lorsque le bord n'est pas caractéristique (i.e. quand $df(u_0^n)$ est inversible) est Δx, puisque ce nombre joue le rôle d'une échelle de viscosité :

$$u^{\Delta x} \sim U\left(\frac{x}{\Delta x}; t\right).$$

Bien entendu, seules les valeurs entières de $x/\Delta x$ entrent en jeux ; on les écrira donc $U_j(t)$, ou plus simplement U_j. Comme précédemment, une couche limite est à, t fixé, une solution stationnaire. On a donc

$$U_j = U_j + \frac{\Delta t}{\Delta x}(F(U_{j-1}, U_j) - F(U_j, U_{j+1})),$$

c'est-à-dire $F(U_{j-1}, U_j) = F(U_j, U_{j+1})$, ou encore $F(U_j, U_{j+1}) = cste$. La constante se calcule en faisant tendre j vers $+\infty$: elle vaut $F(u(0,t), u(0,t))$, c'est-à-dire $f(u(0,t))$.

Le problème de couche limite est donc

$$F(U_j, U_{j+1}) \;=\; f(u(0,t)), \quad j \geq 0,$$

$$\begin{aligned} \lim_{j\to+\infty} U_j &= u(0,t), \\ U_0 &= a(t). \end{aligned}$$

Comme précédemment, la condition aux limites résiduelle s'écrit $u(0,t) \in \mathcal{C}(a(t))$, où $\mathcal{C}(a)$ est l'ensemble des état u^+ tels que le problème suivant ait une solution :

$$F(U_j, U_{j+1}) = f(u^+), \quad j \geq 0, \tag{45}$$

$$\lim_{j\to+\infty} U_j = u^+, \tag{46}$$

$$U_0 = a. \tag{47}$$

Il est important de noter que cet ensemble dépend du schéma numérique utilisé, de même qu'il dépendait, dans les paragraphes précédents, du tenseur de diffusion B. On pourra donc le noter plus précisément $\mathcal{C}_{LF}$, $\mathcal{C}_{Go}$, $\mathcal{C}_{LW}$, $\mathcal{C}_{schema}$,...

10.1 Structure de $\mathcal{C}(a)$

Pour certains schémas, tels que Lax-Friedrichs ou Lax-Wendroff, et sans doute bien d'autres, le flux F est inversible par rapport à chacun de ses arguments. Autrement dit, il existe des fonctions G, H telles que

$$F(a,b) = c \Longleftrightarrow b = G(a,c) \Longleftrightarrow a = H(b,c).$$

En particulier, $a \mapsto G(a;c)$ et $b \mapsto H(b;c)$ sont des difféomorphismes. L'équation de profil (45) est alors équivalente au système dynamique discrêt

$$U_j = H(U_{j+1}; u^+), \tag{48}$$

dont u^+ est un point critique. La théorie locale des systèmes dynamiques discrêts est bien au point et ressemble assez à celle des équations différentielles. On montre en général (ici, la condition CFL intervient à nouveau) que u^+ est un point critique *hyperbolique*, c'est-à-dire qu'il y a des variétés invariantes stables et instables passant par a, de dimensions respectives $n-p$ et p. La condition (46) exprime que U_0 appartient à la variété stable $W^s(u^+;u^+)$. L'ensemble $\mathcal{C}(a)$ est donc celui des états u^+ tels que $a \in W^s(u^+;u^+)$. Génériquement, c'est une variété de dimension $n-p$. L'article [21] de Joseph et LeFloch étudie en détail la structure de $\mathcal{C}(a)$ au voisinage de a. Chainais et Grenier [8] montrent la stabilité non-linéaire des couches limites de petite amplitude pour cetains schémas numériques, tels que Lax-Friedrichs modifié.

Exemple : le schéma de Lax-Friedrichs. Ici, le flux est donné par

$$F(a,b) := \frac{\Delta x}{2\Delta t}(a-b) + \frac{1}{2}(f(a)+f(b)).$$

La condition CFL $\sup_u \rho(df(u)) < \Delta x/\Delta t$ assure l'inversibilité de F tant par rapport à a que par rapport à b. Le calcul explicite de $\mathcal{C}(a)$ est généralement impossible. Mais si f est linéaire ($f(u) := Au$), alors $\mathcal{C}(a) = a + S(A)$.

Pour des schémas du type de Godunov, en revanche, le flux F n'est inversible par rapport à aucun de ses arguments, et il s'en faut de beaucoup. La détermination explicite, ou l'examen des propriétés géométriques de $\mathcal{C}(a)$ doit se faire au cas par cas, sans le secours d'une théorie générale. Prenons le cas du schéma de Godunov lui-même, traité par Gisclon et l'auteur [17]. On a $F(u_g, u_d) = f(R(u_g, u_d))$, où R est la valeur médiane de la solution du problème de Riemann entre u_g et u_d. On pourrait rappeler que la valeur du flux n'est pas ambigue si le problème de Riemann comporte une discontinuité stationnaire, mais il vaut mieux savoir que ce cas n'arrivera pas, à cause de l'hypothèse du bord non caractéristique : zéro n'est jamais valeur propre de df, et ne peut donc pas être vitesse d'une discontinuité. Il revient au même de dire que, df étant partout inversible, f est donc injective ; c'est automatique par exemple si f est *propre*, c'est-à-dire si

$$\lim_{u\to\infty} f(u) = \infty.$$

Grâce à cette remarque, le solveur de Riemann R est aussi régulier que df, de sorte que F est régulier.

Comme f est injective, l'équation (45) équivaut à

$$R(U_j, U_{j+1}) = u^+.$$

Il revient au même de dire que le problème de Riemann entre U_j et u^+ n'a que des ondes de vitesses négatives, et que celui entre u^+ et U_{j+1} n'a que des ondes de vitesses positives. Utilisant aussi $R(U_{j-1}, U_j) = u^+$, si $j \geq 1$, on en déduit que $R(U_j, U_j) = u^+$, c'est-à-dire $U_j = u^+$, si le problème de Riemann a bien une solution unique. Ainsi $U_1 = U_2 = \cdots = u^+$, de sorte que $u^+ \in \mathcal{C}(a)$ si et seulement si le problème de Riemann entre a (ici U_0) et u^+ n'a que des ondes de vitesses négatives. C'est bien une sous-variété de dimension $n-p$, transversale en a à $U(A)$. On a montré dans [17] la stabilité non-linéaire des couches limites de Godunov, indépendemment de leur taille. C'est une situation exceptionnelle, dans laquelle les couches limites sont toujours spectralement stables.

10.2 Un problème inverse

En pratique, on choisit un schéma numérique parce qu'on le connait bien, parce qu'il est facile d'utilisation, ou précis, ou que sais-je encore. La description faite ci-dessus montre que ce choix impose une condition aux limites pour la solution $u(x,t)$ du problème exact, à savoir la condition aux limites résiduelle. Cette situation est évidemment très inconfortable : il n'y a aucune raison scientifique pour que ce soit la même condition aux limites que le problème physique à l'étude réclame.

On devrait donc dans un premier faire le chemin inverse. Un problème physique est donné, par un système de lois de conservation $u_t + f(u)_x = 0$ et une condition aux limites $D(u(0,t),t) = 0$. Existe-t-il un schéma numérique et une fonction $a(t)$ tels que la condition aux limites résiduelle s'exprime précisément sous la forme $D(u(0,t),t) = 0$? Cette question importante n'a pas encore été étudiée. Elle serait déjà intéressante dans le cas linéaire, pour la classe des schémas linéaires.

10.3 Aspects multidimensionels

En plusieurs variables, de nouvelles difficultés apparaissent. Certaines on déjà été évoquées à la section 8.5. Cependant, la structure de la couche limite peut être notablement plus complexe si le maillage, même structuré, n'est pas rigoureusement parallèle au bord, ce qui arrivera dès que ce bord n'est pas plan. La couche limite U en un point X est *a priori* une solution stationnaire du schéma dans un demi-espace (limité par le plan tangent en X), avec une valeur au bord a constante (car les variables tangentielle y et temporelle t sont gelées dans la couche limite). En dimension deux, on cherche donc $U = (U_{j,k})_{j,k\in\mathbb{Z}}$, dans un domaine défini par $j + \theta k \geq 0$ (θ représente l'inclinaison du maillage par rapport au bord) sous la forme d'une fonction ne dépendant que de la variable normale au bord, c'est-à-dire de $j + \theta k$:

$$U_{j,k} = v(j + \theta k).$$

Si le schéma s'écrit

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}(F(u_{j-1,k}^n, u_{j,k}^n) - F(u_{j,k}^n, u_{j+1,k}^n)) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{\Delta y}(G(u_{j,k-1}^n, u_{j,k}^n) - G(u_{j,k}^n, u_{j,k+1}^n)), \end{aligned}$$

l'équation de profil devient une équation aux différences

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x}(F(v(z-1),v(z)) - F(v(z),v(z+1))) + \\ & \frac{1}{\Delta y}(G(v(z-\theta),v(z)) - G(v(z),v(z+\theta))) &= 0. \end{aligned} \tag{49}$$

Dans (49), les incréments 1 et θ ne sont généralement pas commensurables (c'est-à-dire que θ n'est pas rationnel). La fonction v doit donc être définie sur $\mathbb{R}^+$ et non plus sur les entiers naturels seulement. Mais surtout, une telle équation ne ressemble plus à un système dynamique discrêt. Son étude locale (au voisinage d'une solution constante) est extrêmement difficile, parce que son linéarisé présente des "petits diviseurs". Rien n'a donc été fait dans ce contexte.

Remarquons que, lorsque θ varie, on passe par les valeurs rationnelles, qui sont denses dans $\mathbb{R}$. Pour celles-ci, (49) est quand même équivalent à un système dynamique, pour lequels les techniques classiques permettent une étude locale de $\mathcal{C}(a)$. Il n'est pas impossible qu'il y ait des phénomènes de saut, c'est-à-dire que $\mathcal{C}(a)$ ne soit pas continu par rapport à θ sur $\mathbb{Q}$. De tels phénomènes sont suggérés dans [37] à propos des profils de choc numériques, lorsqu'on fait varier le rapport $c\Delta t/\Delta x$, où c est la vitesse de choc. D'autres situations discontinues ont été observées par Mallet-Paret & coll. [7] dans le contexte des ondes progressives pour des équations de réaction-diffusion sur des réseaux.

Il va de soi que, dans une situation où la structure de $\mathcal{C}(a)$ n'est pas claire, l'étude de la stabilité spectrale ou non-linéaire des couches limites est hors d'atteinte.

References

[1] J. C. Alexander, R. Gardner, C. K. R. T. Jones. A topological invariant arising in the stability analysis of travelling waves. *J. Reine Angew. Math.*, **410** (1990), pp 167-212.

[2] C. Bardos, D. Brézis, H. Brézis. Perturbations singulières et prolongements maximaux d'opérateurs positifs. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **53** (1973/74), pp 69-100.

[3] S. Benzoni-Gavage. Sur la stabilité de profils semi-discrêts au moyen d'une fonction d'Evans en dimension infinie. *C. R. A. S.*, série I, **329** (1999), pp 377-382.

[4] S Benzoni-Gavage, D. Serre. *Hyperbolic initial-boundary value problems. With applications*. En préparation.

[5] S. Benzoni-Gavage, D. Serre, K. Zumbrun. Alternate Evans functions and viscous shock waves. *SIAM J. Math. Anal.*, **32** (2001), pp 929-962.

[6] L. Q. Brin. Numerical testing of the stability of viscous shock waves. *Math. of Comp.*, **70** (2001), pp 1071-1088.

[7] J. W. Cahn, J. Mallet-Paret, E. Van Vleck. Traveling wave solutions for systems of ODEs on a two-dimensional spatial lattice. *SIAM J. Appl. Math.*, **59** (1999), pp 455-493.

[8] C. Chainais-Hillairet, E. Grenier. Numerical boundary layers for hyperbolic systems in $1-D$. *Math. Mod. Num. Anal.*, **35** (2001), pp 91-106.

[9] J. Chazarain, A. Piriou. *Introduction to the theory of linear partial differential equations*. North-Holland (1982), Amsterdam.

[10] C. Dafermos. *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **325**. Springer-Verlag (2000).

[11] H. Freistühler. Profiles for small Laxian shock waves in Kawashima type systems of conservation laws. Preprint (2000).

[12] H. Freistühler, D. Serre. L^1-stability of shock waves in scalar viscous conservation laws. *Comm. Pure & Appl. Math*, **51** (1998), pp 291-301.

[13] H. Freistühler, D. Serre. The L^1-stability of boundary layers for scalar viscous conservation laws. *J. Dynamics & Diff. Eqs.*, **13** (2001), pp 145-155.

[14] R. Gardner, K. Zumbrun. The gap lemma and geometric criteria for instability of viscous shock profiles. *Comm. Pure Appl. Math.*, **51** (1997), pp 797-855.

[15] D. Gilbarg. The existence and limit behavior of the one-dimensional shock layer. *Amer. J. Math.*, **73** (1951), pp 256-274.

[16] M. Gisclon, D. Serre. Étude des conditions aux limites pour un système hyperbolique, *via* l'approximation parabolique. *C. R. A. S.*, série I, **319** ((1994), pp 377-382. Voir aussi M. Gisclon. *J. Math. Pures Appl.*, **75** (1996), pp 485-508, ainsi que [35].

[17] M. Gisclon, D. Serre.

[18] E. Grenier, O. Guès. Boundary layers for viscous perturbations of noncharacteristic quasilinear hyperbolic problems.*J. Diff. Equations*, **143** (1998), pp 110-146.

[19] E. Grenier, F. Rousset. Stability of one dimensional boundary layers using Green's functions. *Comm. Pure Appl. Math.*, à paraître.

[20] L. M. Hocking.*Quart. J. Mech. Appl. Math.*, (1975).

[21] K. T. Joseph, P. LeFloch. Boundary layers in weak solutions of hyperbolic conservation laws.*Arch. Rat. Mech. Anal.*, **147** (1999), pp 47-88.

[22] S. Kawashima. *Systems of a hyperbolic-parabolic composite type, with applications to the equations of magnetohydrodynamics.* Thèse, Kyoto University (1983).

[23] H.-O. Kreiss. Initial boundary value problems for hyperbolic systems. *Comm. Pure Appl. Math.*, **23** (1970), pp 277-298.

[24] Li Ta-tsien, Yu Wen-ci. *Boundary value problems for quasilinear hyperbolic systems.* Duke Univ., Durham (1985).

[25] T.-P. Liu, Y. Zeng. *Large-time behavior of solutions for general quasilinear hyperbolic-parabolic systems of conservation laws.* AMS Memoirs, vol **599** (1997).

[26] A. Majda, R. L. Pego. Stable viscosity matrices for systems of conservation laws. *J. Diff. Equ.*, **56** (1985), pp 229-262.

[27] C. Mascia, K. Zumbrun. Stability of viscous profiles for dissipative symmetric hyperbolic-parabolic systems. Preprint (2001).

[28] S. Osher, J. Ralston. L^1 stability of travelling waves with applications to convective porous media flow. *Comm. Pure & Applied Maths.*, **35** (1982), pp 737-751.

[29] F. Rousset. Inviscid boundary conditions and stability of viscous boundary layers. *Asymptotic Analysis*, **26** (2001), pp 285-306, ainsi que : à paraître...

[30] R. Sakamoto. *Hyperbolic boundary value problems*, Cambridge Univ. Press. Cambridge (1982).

[31] D. H. Sattinger. On the stability of waves of nonlinear parabolic systems. *Advances in Math.*, **22** (1976), pp 312-355.

[32] D. Serre. L^1-decay and the stability of shock profiles. *PDEs, theory and numerical solution, Prague 1998*. W. Jäger, J, Nečas, O. John, K. Najzar and J. Stará eds. Research notes in Maths. **406**. Chapman & Hall (2000) pp 312-321.

[33] D. Serre. Stabilité des ondes de choc de viscosité qui peuvent être caractéristiques. Prepublication (1994).

[34] D. Serre. *Systèmes de lois de conservation, I.* Diderot arts & Sci. (1996). Paris. Translated as *Systems of conservation laws, I.* Cambridge U. Press (1999).

[35] D. Serre. *Systèmes de lois de conservation, II.* Diderot arts & Sci. (1996). Paris. Translated as *Systems of conservation laws, II.* Cambridge U. Press (2000).

[36] D. Serre. Sur la stabilité des couches limites de viscosité. *Ann. Institut Fourier*, **51** (2001), pp 109-129.

[37] D. Serre. Remarks about the discrete profiles of shock waves. *Matematica contemporanea*, **11** (1996), pp 153-170.

[38] D. Serre, K. Zumbrun. Boundary layer stability in real vanishing viscosity limit. *Comm. Math. Phys.*, **221** (2001), pp 267-292.

[39] R. Temam, X. Wang. Boundary layers in channel flow with injection and suction.*Appl. Math. Let.*, **14** (2001), pp 87-91.

[40] K. Zumbrun, D. Serre. Viscous and inviscid stability of multidimensional planar shock fronts. *Indiana Univ. Math. J.*, **48** (1999), pp 937-992.