

Connexions affines et projectives sur les surfaces complexes compactes

Sorin DUMITRESCU

Mai 2008

Sorin.Dumitrescu@math.u-psud.fr

Univ. Paris-Sud (11), U.M.R. 8628 C.N.R.S., Bat. 425, 91405 Orsay Cedex

Résumé. Soit (S, ∇) une surface complexe compacte connexe munie d'une connexion affine holomorphe sans torsion. Nous démontrons que ∇ est localement modelée sur une connexion affine invariante par translations sur \mathbf{C}^2 (en particulier, ∇ est localement homogène), sauf si S est un fibré elliptique principal au-dessus d'une surface de genre $g \geq 2$, de premier nombre de Betti impair et ∇ est une connexion affine holomorphe sans torsion générique sur S , auquel cas l'algèbre de Lie des champs de Killing locaux est de dimension un, engendrée par le champ fondamental de la fibration principale.

Nous en déduisons que toute connexion projective holomorphe normale sur une surface complexe compacte est plate.

1 Introduction

Suite à des nombreux travaux portant sur les surfaces complexes qui possèdent des connexions affines holomorphes [10, 33, 31, 24], Inoue, Kobayashi et Ochiai établissent dans [13] la liste des surfaces complexes (connexes) compactes qui admettent des connexions affines holomorphes (non nécessairement plates). Une telle surface est biholomorphe (à revêtement fini près) à un tore complexe, une surface de Kodaira primaire, une surface de Hopf affine, une surface d'Inoue ou à un fibré principal en courbes elliptiques sur une surface de Riemann de genre $g \geq 2$, de premier nombre de Betti impair. Par ailleurs, il est montré dans [13] que toutes ces surfaces possèdent des connexions affines holomorphes sans torsion *plates*. Ces connexions sont localement modelées sur \mathbf{C}^2 muni de sa connexion standard et, par conséquent, toutes ces surfaces possèdent au moins une *structure affine holomorphe*, i.e. un atlas à valeurs dans des ouverts de \mathbf{C}^2 et à changements de carte localement constants dans le groupe affine $GL(2, \mathbf{C}) \times \mathbf{C}^2$.

La classification des surfaces complexes compactes qui possèdent des connexions projectives holomorphes a été obtenue dans [20, 21]. Ces surfaces sont dans la liste suivante : $P^2(\mathbf{C})$, les quotients non ramifiés de l'espace hyperbolique complexe $H_{\mathbf{C}}^2$ ou les surfaces admettant une connexion affine holomorphe. Toutes ces surfaces possèdent des connexions projectives holomorphes *plates*, i.e. localement modelées sur $P^2(\mathbf{C})$, et donc des *structures projectives holomorphes* (voir section 2).

Dans [15] Klingler classe les structures affines holomorphes et les structures projectives holomorphes sur les surfaces complexes compactes.

Le but de cet article est d'étudier la géométrie locale des connexions affines et projectives holomorphes sur les surfaces complexes compactes. Nos résultats sont les suivants.

Théorème 1.1 *Soit (S, ∇) une surface complexe compacte connexe munie d'une connexion affine holomorphe sans torsion.*

i) Si S n'est pas biholomorphe à un fibré principal elliptique au-dessus d'une surface de Riemann de genre $g \geq 2$, de premier nombre de Betti impair, alors ∇ est localement modelée sur une connexion affine invariante par translations sur \mathbf{C}^2 . En particulier, ∇ est localement homogène.

ii) Supposons que S est un fibré principal holomorphe en courbes elliptiques au-dessus d'une surface Σ de genre $g \geq 2$, de premier nombre de Betti impair. L'espace des connexions affines holomorphes sans torsion sur S est biholomorphe à

$$(H^0(\Sigma, K_{\Sigma}))^2 \times H^0(\Sigma, K_{\Sigma}^{\otimes 2}) \simeq \mathbf{C}^{5g-3},$$

où K_{Σ} désigne le fibré canonique de Σ .

Toutes ces connexions sont invariantes par la fibration principale (i.e. admettent le champ fondamental de la fibration principale comme champ de Killing). L'espace des connexions plates est de codimension complexe g . Les connexions affines holomorphes sans torsion non plates sont non localement homogènes : l'algèbre des champs de Killing locaux est de dimension un, engendrée par le champ fondamental de la fibration principale.

Les connexions construites au point (ii) du théorème précédent fournissent les premiers exemples de G -structures holomorphes rigides (voir section 2) sur une variété compacte qui ne sont pas localement homogènes (voir [5, 6, 11, 25, 26] pour des résultats d'homogénéité locale et de rigidité concernant ces structures).

La classification du théorème 1.1 nous permet d'obtenir le

Corollaire 1.2 *Soit (S, ∇) une surface complexe compacte munie d'une connexion affine holomorphe sans torsion. Alors ∇ est projectivement plate.*

En utilisant le corollaire 1.2, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 1.3 *Toute connexion projective holomorphe normale sur une surface complexe compacte est plate.*

Il convient de mentionner ici que les tores de dimension strictement supérieure à deux possèdent des connexions affines holomorphes sans torsion (invariantes par translations) qui ne sont pas projectivement plates (voir, par exemple, [27]).

À titre de motivation rappelons la conjecture de B. McKay [25] qui affirme que sur les variétés complexes compactes, les connexions de Cartan paraboliques holomorphes sont *localement homogènes*. Le théorème 1.3 répond affirmativement à la question en dimension complexe deux. En effet, en dimension deux, les connexions de Cartan paraboliques holomorphes sont essentiellement des connexions projectives holomorphes normales ou des structures conformes holomorphes [25]. Ces dernières sont toujours plates, d'après le résultat classique, dû à Gauß, d'existence de coordonnées isothermes. Pour la classification des surfaces complexes compactes admettant des structures conformes holomorphes le lecteur pourra consulter [19].

Ajoutons que si la classification des variétés complexes compactes de dimension 3 possédant des connexions projectives holomorphes normales est connue dans le cadre algébrique [14], elle reste ouverte en général.

Le plan de l'article est le suivant. Dans la section 2 nous précisons les définitions et démontrons le théorème 1.1 dans le cas où la surface S n'est pas une surface d'Inoue ou un fibré principal elliptique au-dessus d'une surface de Riemann de genre $g \geq 2$, de premier nombre de Betti impair.

Dans la section 3 nous traitons le cas des surfaces d'Inoue. Au passage nous démontrons que sur ces surfaces, toutes les structures géométriques holomorphes sont localement homogènes.

Dans la section 4 nous réglons le cas restant des fibrés principaux elliptiques et nous achevons la preuve du théorème 1.1 et de son corollaire 1.2.

Enfin à la section 5 nous démontrons le théorème 1.3.

Je tiens à remercier B. McKay pour des conversations utiles et agréables sur le sujet. Je remercie également G. Dloussky.

Ce travail a été partiellement soutenu par l'ANR Symplexe BLAN 06-3-137237.

2 Définitions. Contexte

Le livre de Gunning [10] fournit la première étude systématique des connexions affines et projectives holomorphes. Contrairement au cas réel, il est montré dans [10] qu'une variété complexe compacte de dimension $n \geq 2$ n'admet pas toujours une connexion affine ou projective holomorphe et que la présence d'une telle connexion entraîne l'annulation de certaines classes caractéristiques.

Moralement, une connexion affine holomorphe ∇ permet de dériver les champs

de vecteurs holomorphes (locaux) Y , le long des orbites d'un deuxième champ de vecteurs holomorphe (local) X et d'obtenir comme résultat un champ de vecteurs holomorphe (local) $\nabla_X Y$.

Si l'on multiplie X et Y par des fonctions (locales) f , cette opération est tensorielle en X et satisfait à la règle $\nabla_X fY = (X \cdot f)Y + f\nabla_X Y$. Il découle que la différence entre deux connexions affines holomorphes sur une variété S est un tenseur, section holomorphe du fibré vectoriel $T^*S \otimes T^*S \otimes TS$.

Si, de plus, $\nabla_X Y = \nabla_Y X$, pour tous les champs de vecteurs X et Y qui commutent, alors ∇ est dite *sans torsion*.

Dans la suite nous donnerons une définition équivalente qui permet de voir les connexions affines et les connexions projectives comme des cas particuliers de G -structures [17].

Considérons une variété S de dimension n (pour ce qui est de cet article, on pourra se contenter de penser que $n = 2$).

Rappelons que pour tout entier positif r , le groupe D^r , des r -jets en 0 de germes de biholomorphismes locaux de \mathbf{C}^n qui fixent 0 est un groupe linéaire algébrique qui coïncide avec $GL(n, \mathbf{C})$, pour $r = 1$, et avec une extension de $GL(n, \mathbf{C})$ par le groupe additif des formes bilinéaires symétriques sur \mathbf{C}^n , si $r = 2$.

Le fibré des r -repères $R^r(M)$ de M , autrement dit le fibré des r -jets en 0 de germes de biholomorphismes locaux entre \mathbf{C}^n et M est un fibré principal au-dessus de M de groupe structural D^r . Nous suivons [2, 9] et donnons la

Définition 2.1 *Une structure géométrique holomorphe τ (d'ordre r) sur M est une application holomorphe, D^r -équivariante, $\tau : R^r(M) \rightarrow Z$, avec Z une variété algébrique munie d'une action algébrique de D^r .*

L'application τ s'interprète comme une section holomorphe du fibré de fibre Z , associé au fibré principal $R^r(M)$ via l'action de D^r sur Z .

Un biholomorphisme local f de M agit naturellement sur les sections du fibré précédent. Si cette action préserve τ , alors f est une *isométrie locale* de τ . Si les isométries locales agissent transitivement sur M , alors la structure géométrique τ est dite *localement homogène*.

Si l'image de τ dans Z est exactement une D^r -orbite, qui s'identifie alors à un espace homogène D^r/G , où G est le sous-groupe de D^r qui stabilise un point de l'image, alors τ s'interprète comme une section d'un fibré de fibre D^r/G . Cette section fournit une réduction du groupe structural de $R^r(M)$ au sous-groupe G . Une telle structure géométrique est dite une G -structure holomorphe [17].

Considérons le sous-groupe G de D^2 , isomorphe à D^1 , constitué par les 2-jets en 0 d'isomorphismes linéaires de \mathbf{C}^n , ainsi que le sous-groupe H constitué par les 2-jets en 0 de transformations projectives de $P^n(\mathbf{C})$ qui fixent 0. La définition équivalente suivante des connexions affines et projectives, vues comme G -structures est classique [18, 30]:

Définition 2.2 Une connexion affine (holomorphe) sans torsion sur M est une réduction (holomorphe) du groupe structural de $R^2(M)$ à G .

Une connexion projective (holomorphe) normale sur M est une réduction (holomorphe) du groupe structural de $R^2(M)$ à H .

L'inclusion canonique de G dans H permet d'associer à chaque connexion affine sans torsion une unique connexion projective normale.

Le lecteur pourra également se référer à [30], pour voir que la définition précédente coïncide avec celle adoptée dans [20, 21]. Une connexion projective normale définit une unique connexion de Cartan projective [30].

Une connexion affine sans torsion (projective normale) est dite *plate* si elle est localement isomorphe à la connexion affine (projective) standard de l'espace \mathbf{C}^n (de l'espace projectif $P^n(\mathbf{C})$). Une connexion affine sans torsion est plate si et seulement si son tenseur de courbure s'annule [10]. La platitude des connexions projectives est testée par l'annulation du tenseur courbure de Weyl (voir, par exemple, [27]).

Comme dans le cas affine, une connexion projective normale plate sur M donne naissance à une *structure projective*. Autrement dit, il existe un atlas de M à valeurs dans des ouverts de $P^n(\mathbf{C})$ tel que les applications de changement de carte soient des transformations projectives. Dans ce cas, il existe une *application développante* définie sur le revêtement universel \tilde{M} à valeurs dans $P^n(\mathbf{C})$ et un *morphisme d'holonomie* du groupe fondamental de M dans le groupe $PSL(n+1, \mathbf{C})$ qui rend l'application développante équivariante [10].

Rappelons que les connexions affines et projectives sont des structures *rigides* au sens de Gromov [2, 9], i.e. le pseudo-groupe des isométries locales est un pseudo-groupe de Lie, engendré par une algèbre de Lie de dimension finie appelée *l'algèbre des champs de Killing locaux*. Dans le cas analytique la dimension de cette algèbre ne dépend pas du point (de M) [1, 2, 9].

Une isométrie (locale) entre deux connexions projectives normales sera également appelée *équivalence projective* (locale).

Revenons à présent aux connexions affines holomorphes sur les surfaces complexes.

Connexions affines invariantes par translations sur \mathbf{C}^2 .

Les cas les plus simples de connexions affines holomorphes sont celles qui sont invariantes par translations sur \mathbf{C}^2 . Autrement dit, dans les coordonnées canoniques (z_1, z_2) , on définit $\nabla_{\frac{\partial}{\partial z_i}} \frac{\partial}{\partial z_j} = \Gamma_{ij}^1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \Gamma_{ij}^2 \frac{\partial}{\partial z_2}$, avec Γ_{ij}^1 et Γ_{ij}^2 des fonctions constantes, quelque soient $1 \leq i, j \leq 2$.

Ces connexions descendent sur tout tore complexe de dimension 2, quotient de \mathbf{C}^2 par un réseau de translations. Par ailleurs, comme le fibré tangent au tore est holomorphiquement trivial, toute connexion affine holomorphe sur un tore s'obtient par ce procédé et est invariante par translations, donc (localement) homogène.

La connexion est sans torsion si et seulement si $\Gamma_{ij}^1 = \Gamma_{ji}^1$ et $\Gamma_{ij}^2 = \Gamma_{ji}^2$.

Un calcul direct montre que la courbure est nulle si et seulement si les coefficients Γ_{ij}^1 et Γ_{ij}^2 satisfont quatre relations quadratiques (voir, par exemple, [13]). En particulier, les tores de dimension égale (ou supérieure) à deux possèdent des connexions affines holomorphes sans torsion non plates.

En rassemblant les résultats existant dans la littérature [13, 33, 34] on obtient la proposition suivante :

Proposition 2.3 *Soit ∇ une connexion affine holomorphe sans torsion sur une surface complexe compacte S non biholomorphe à un fibré principal elliptique au-dessus d'une surface de Riemann de genre $g \geq 2$, de premier nombre de Betti impair, ou à une surface d'Inoue, alors ∇ est localement isométrique à une connexion affine invariante par translations sur \mathbf{C}^2 .*

En effet, le résultat de [13] implique les possibilités suivantes :

- S est un tore complexe. Dans ce cas nous venons de présenter la preuve.

- S est une surface de Hopf. Dans ce cas la courbure est nécessairement nulle [13] et si ∇ est sans torsion, elle est localement isomorphe à la connexion standard sur \mathbf{C}^2 .

- S est une surface de Kodaira primaire (i.e. un fibré en courbes elliptiques au-dessus d'une courbe elliptique). Les connexions affines sur ce type de surfaces ont été étudiées par Vitter. Dans [33] (page 239) Vitter montre que ces connexions sont nécessairement localement isométriques à des connexions invariantes par translations sur \mathbf{C}^2 .

3 Surfaces d'Inoue

Les surfaces d'Inoue sont des surfaces complexes compactes de type VII_0 , de dimension algébrique nulle (i.e. sans fonctions méromorphes non constantes) et avec $b_2 = 0$ [3]. Ces surfaces ont été étudiées dans [12], où il est montré que chaque telle surface est obtenue comme quotient de $H \times \mathbf{C}$ par un groupe Γ de transformations affines de \mathbf{C}^2 préservant cet ouvert (H étant le demi-plan supérieur de Poincaré). En particulier, il découle de [12] que chaque surface d'Inoue hérite d'une structure affine induite par la structure affine canonique de \mathbf{C}^2 . Il est montré dans [15] (lemme 4.3) que cette structure affine est unique. Nous démontrons ici le résultat plus général suivant :

Proposition 3.1 *Une surface d'Inoue admet une unique connexion affine holomorphe sans torsion.*

L'unique connexion affine de l'énoncé précédent est nécessairement plate. Les propositions 3.1 et 2.3 achèvent la preuve du point (i) du théorème 1.1.

Avant de passer à la preuve de la proposition 3.1 rappelons qu'à revêtement double non ramifié près, les surfaces d'Inoue s'obtiennent par l'un des deux procédés suivants [12].

1. *Surfaces* S_M . Considérons une matrice $M \in SL(3, \mathbf{Z})$ avec valeurs propres $\alpha, \beta, \bar{\beta}$ tels que $\alpha > 1$ et $\beta \neq \bar{\beta}$. Choisissons (a_1, a_2, a_3) un vecteur propre réel associé à la valeur propre α et (b_1, b_2, b_3) un vecteur propre associé à la valeur propre β .

Considérons le groupe Γ de transformations (affines) de \mathbf{C}^2 engendré par :

$$\gamma_0(w, z) = (\alpha w, \beta z),$$

$$\gamma_i(w, z) = (w + a_i, z + b_i), \text{ avec } i = 1, 2, 3.$$

L'action de Γ sur \mathbf{C}^2 préserve $H \times \mathbf{C}$ et le quotient est la surface complexe compacte S_M .

2. *Surfaces* $S_{N,p,q,r,t}^+$. Soit $N = (n_{ij}) \in SL(2, \mathbf{Z})$ une matrice diagonalisable sur \mathbf{R} avec valeurs propres $\alpha > 1$ et α^{-1} et vecteurs propres (a_1, a_2) et (b_1, b_2) respectivement. Choisissons $r \in \mathbf{Z}^*, p, q \in \mathbf{Z}, t \in \mathbf{C}$ et des nombres réelles c_1, c_2 solutions de l'équation

$$(c_1, c_2) = (c_1, c_2)N^t + (e_1, e_2) + \frac{1}{r}(b_1 a_2 - b_2 a_1)(p, q),$$

où $e_i = \frac{1}{2}n_{i1}(n_{i1}-1)a_1 b_1 + \frac{1}{2}n_{i2}(n_{i2}-1)a_2 b_2 + n_{i1}n_{i2}b_1 a_2$ et N^t désigne la transposée de N .

Dans ce cas Γ est engendré par les transformations

$$\gamma_0(w, z) = (\alpha w, z + t),$$

$$\gamma_i(w, z) = (w + a_i, z + b_i w + c_i), \quad (i = 1, 2),$$

$$\gamma_3(w, z) = (w, z + r^{-1}(b_1 a_2 - b_2 a_1)).$$

Ce groupe est discret et agit proprement et discontinument sur $H \times \mathbf{C}$ admettant comme quotient la surface complexe compacte $S_{N,p,q,r,t}^+$.

Dans les deux cas notons $\Lambda = [\Gamma, \Gamma]$ le commutateur de Γ . Le groupe Λ est engendré par γ_1, γ_2 et γ_3 .

Le lemme suivant ([12], lemma 3, lemma 4) sera essentiel :

Lemme 3.2 *Les fonctions holomorphes Λ -invariantes sur $H \times \mathbf{C}$ sont nécessairement constantes.*

Passons à présent à la preuve de la proposition 3.1.

Démonstration Considérons la surface d'Inoue S munie de sa connexion affine holomorphe sans torsion plate ∇_0 , héritée par la connexion canonique de $H \times \mathbf{C}$. La différence entre une connexion holomorphe affine arbitraire ∇ sur S et ∇_0 est une section holomorphe ω du fibré vectoriel $T^*S \otimes T^*S \otimes TS$. L'image réciproque de ce

tenseur sur le revêtement $H \times \mathbf{C}$ de S est une section du même type $\tilde{\omega}$ invariante par le groupe de revêtement Γ .

En les coordonnées globales $(w, z) \in H \times \mathbf{C}$ du revêtement universel, l'expression de $\tilde{\omega}$ sera :

$$f_{11}(w, z)dz \otimes dz \otimes \frac{\partial}{\partial z} + f_{12}(w, z)dz \otimes dw \otimes \frac{\partial}{\partial z} + f_{21}(w, z)dz \otimes dz \otimes \frac{\partial}{\partial w} + f_{22}(w, z)dz \otimes dw \otimes \frac{\partial}{\partial w} + \\ g_{11}(w, z)dw \otimes dz \otimes \frac{\partial}{\partial z} + g_{12}(w, z)dw \otimes dw \otimes \frac{\partial}{\partial z} + g_{21}(w, z)dw \otimes dz \otimes \frac{\partial}{\partial w} + g_{22}(w, z)dw \otimes dw \otimes \frac{\partial}{\partial w},$$

avec f_{ij}, g_{ij} des fonctions holomorphes quelque soient $1 \leq i, j \leq 2$.

Nous considérons seulement des connexions ∇ sans torsion, ce qui conduit à : $f_{12} = g_{11}$ et $f_{22} = g_{21}$.

Commençons par le cas des surfaces S_M .

L'invariance de $\tilde{\omega}$ par le groupe Λ engendré par les translations γ_1, γ_2 et γ_3 , implique que les fonctions f_{ij} et g_{ij} sont Λ -invariantes et, grâce au lemme 3.2, constantes.

L'invariance de $\tilde{\omega}$ par γ_0 conduit à $f_{11} = \beta f_{11}, f_{12} = \alpha f_{12}, f_{21} = \frac{\beta^2}{\alpha} f_{21}, f_{22} = \beta f_{22}, g_{21} = \beta g_{21}$ et $g_{22} = \alpha g_{22}$. Comme les nombres complexes α, β et $\frac{\beta^2}{\alpha}$ sont $\neq 1$, toutes les fonctions f_{ij}, g_{ij} sont nulles et, par conséquent, $\tilde{\omega} = 0$.

Il vient que la connexion ∇_0 est l'unique connexion affine sans torsion sur S_M .

On passe aux cas des surfaces $S_{N,p,q,r,t}^+$.

L'invariance de $\tilde{\omega}$ par la translation γ_3 implique l'invariance des fonctions f_{ij}, g_{ij} par γ_3 .

L'invariance de $\tilde{\omega}$ sous l'action de γ_1 et γ_2 s'exprime sous la forme suivante :

- (1) $f_{11}(w, z) = f_{11}(\gamma_i(w, z)) - b_i f_{21}(\gamma_i(w, z))$
- (2) $f_{12}(w, z) = f_{12}(\gamma_i(w, z)) - 2b_i^2 f_{21}(\gamma_i(w, z)) - b_i f_{22}(\gamma_i(w, z)) + 2b_i f_{11}(\gamma_i(w, z))$
- (3) $f_{21}(w, z) = f_{21}(\gamma_i(w, z))$
- (4) $f_{22}(w, z) = 2b_i f_{21}(\gamma_i(w, z)) + f_{22}(\gamma_i(w, z))$
- (5) $g_{12}(w, z) = g_{12}(\gamma_i(w, z)) + b_i^2 f_{11}(\gamma_i(w, z)) + b_i f_{12}(\gamma_i(w, z)) - b_i^3 f_{21}(\gamma_i(w, z)) - b_i^2 f_{22}(\gamma_i(w, z)) - b_i g_{22}(\gamma_i(w, z))$
- (6) $g_{22}(w, z) = g_{22}(\gamma_i(w, z)) + b_i f_{22}(\gamma_i(w, z)) + b_i^2 f_{21}(\gamma_i(w, z)),$

pour $i = 1, 2$.

L'équation (3) montre que la fonction f_{21} est invariante par γ_i , pour $i = 1, 2$. Comme on a vu que cette fonction est également γ_3 -invariante, elle est Λ -invariante et, par le lemme 3.2, f_{21} est constante.

Or, l'invariance de $\tilde{\omega}$ par γ_0 implique alors $f_{21} = \frac{1}{\alpha} f_{21}$ et, comme $\alpha \neq 1$, $f_{21} = 0$.

La première équation montre alors que la fonction f_{11} est invariante par γ_1 et γ_2 . Il vient que f_{11} est Λ -invariante et donc constante.

Aussi la quatrième équation implique que f_{22} est invariante par γ_1 et γ_2 et donc Λ -invariante et, par le lemme 3.2, constante.

En dérivant par rapport à la variable z l'équation (6) on obtient alors que la fonction $\frac{\partial g_{22}}{\partial z}$ est γ_i -invariante pour $i = 1, 2$. Comme cette fonction holomorphe est également γ_3 -invariante, le lemme 3.2 implique que $\frac{\partial g_{22}}{\partial z}$ est une constante $C \in \mathbf{C}$ et, par conséquent, $g_{22}(w, z) = Cz + g(w)$, avec g fonction holomorphe de la variable w .

Par ailleurs, l'invariance de $\tilde{\omega}$ par γ_0 implique que $g_{22}(w, z) = \alpha g_{22}(\alpha w, z)$. Comme $\alpha \neq 1$, ceci implique $C = 0$ et donc $g_{22}(w, z) = g(w) = \alpha g(\alpha w)$.

En revenant à l'équation (6) on a $g(w) - g(w + a_i) = b_i f_{22}$. L'homogénéité de g implique alors que $g(w) - g(w + \frac{a_i}{\alpha^k}) = \alpha^k b_i f_{22}$, pour tout entier positif k . On fait tendre k vers l'infini et, comme $\alpha > 1$, la continuité de g en w implique que $f_{22} = 0$.

L'équation (6) implique alors que g_{22} est γ_i -invariante, donc constante, ainsi que g . De plus, l'homogénéité de g implique que g est nulle. Il vient que $g_{22} = 0$.

La deuxième équation devient alors $f_{12}(w, z) = f_{12}(\gamma_i(w, z)) + 2b_i f_{11}(\gamma_i(w, z))$. On obtient comme avant que $\frac{\partial f_{12}}{\partial z}$ est une constante et ensuite que $f_{12} = f_{11} = 0$.

L'équation (5) implique alors que g_{12} est γ_i -invariante pour $i = 1, 2$. Il vient que g_{12} est constante. L'invariance par γ_0 de $\tilde{\omega}$ implique alors $g_{12} = \alpha^2 g_{12}$ et donc $g_{12} = 0$.

On vient de démontrer que $\tilde{\omega} = 0$, ce qui achève la preuve du second cas. \square

Nous démontrons ici le théorème suivant qui, bien que dans le même esprit, est sans lien direct avec les résultats sur les connexions.

Théorème 3.3 *Sur les surfaces d'Inoue, toutes les structures géométriques holomorphes sont localement homogènes.*

Démonstration

Considérons une structure géométrique holomorphe τ sur une surface d'Inoue S . Soit ∇_0 l'unique connexion affine holomorphe sans torsion (et plate) sur S . Nous démontrons que la structure géométrique (τ, ∇_0) qui consiste en la juxtaposition de τ et de ∇_0 est localement homogène. Autrement dit, le pseudo-groupe des isométries locales de ∇_0 qui préservent τ agit transitivement sur S . L'avantage de ce procédé est de travailler avec la structure géométrique (τ, ∇_0) qui est rigide au sens de Gromov [2, 9].

Par le théorème 3 de [5], les structures géométriques holomorphes rigides sur les variétés complexes compactes de dimension algébrique nulle sont localement homogènes en dehors d'un sous-ensemble analytique compact d'intérieur vide (eventuellement vide). Il vient que (τ, ∇_0) est localement homogène sur S privé d'un sous-ensemble analytique compact d'intérieur vide E .

Nous allons démontrer que l'ensemble E est vide.

Montrons d'abord que, éventuellement à revêtement double non ramifié près, E est lisse (ceci est automatique si S est constitué d'un nombre fini de points, mais S peut également admettre des composantes de dimension complexe un).

Supposons par l'absurde que S n'est pas une sous-variété lisse de E .

Comme le pseudo-groupe des isométries locales de (τ, ∇_0) préserve E , il vient que ce pseudo-groupe laisse invariant l'ensemble des points singuliers de E .

Considérons $p \in E$ un point singulier de E . En particulier, p n'est pas isolé dans E . Mais p est isolé parmi les points singuliers de E et, par conséquent, p est un point isolé dans son orbite sous l'action du pseudo-groupe des isométries locales. Il découle que chaque champ de Killing local s'annule en p .

Notons \mathcal{G} l'algèbre des germes de champs de Killing au voisinage de p . Comme \mathcal{G} agit transitivement sur un ouvert, elle est de dimension au moins 2.

L'action de \mathcal{G} préserve ∇ et se linéarise donc en coordonnées exponentielles au voisinage du point fixe p . La linéarisation plonge \mathcal{G} dans l'algèbre de Lie de $GL(2, \mathbf{C})$. En particulier, \mathcal{G} est de dimension au plus 4.

Si \mathcal{G} est de dimension 2, les sous-groupes de $GL(2, \mathbf{C})$ correspondants sont conjugués au groupe des matrices diagonales, ou bien à l'un des groupes suivants :

- $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbf{C}^*$ et $b \in \mathbf{C}$;
- $\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & n \end{pmatrix}$, avec $m \in \mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{C}^*$;
- $\begin{pmatrix} m' & n' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $m' \in \mathbf{C}^*$ et $n' \in \mathbf{C}$.

Dans le premier cas, le fermé invariant E s'identifie via l'application exponentielle à la réunion des deux droites propres, tandis que dans le deuxième cas E s'identifie à la droite invariante $y = 0$. Dans les deux situations, E est lisse (quitte à considérer un revêtement double non ramifié de S).

Réglons maintenant le cas où \mathcal{G} est de dimension 3 ou 4. Dans ce cas \mathcal{G} engendre un sous-groupe de $GL(2, \mathbf{C})$ conjugué au bien à $SL(2, \mathbf{C})$, ou bien à $GL(2, \mathbf{C})$ ou bien au groupe des matrices inversibles triangulaires supérieures. Dans les deux premiers cas, il n'y a pas de fermé invariant autre que le point p , qui doit par conséquent être un point isolé (et donc lisse) de E : absurde. Dans le dernier cas E s'identifie comme avant à l'unique droite invariante par les matrices triangulaires supérieures et est donc lisse.

On vient de montrer que (à revêtement double près) E est une sous-variété holomorphe de S . Si E admet des composantes de dimension complexe un, alors ces composantes sont une réunion de courbes fermées (lisses). Or, les surfaces de Inoue ne contiennent aucune courbe fermée (lisse) [12].

Il vient que E est composé d'un nombre fini de points. Supposons par l'absurde que E est non vide et considérons $p \in E$. On vient de montrer que l'algèbre de Lie \mathcal{G} est nécessairement isomorphe à $SL(2, \mathbf{C})$ ou bien à $GL(2, \mathbf{C})$. En effet, dans tous les autres cas il existe au voisinage de p des droites invariantes et donc E ne se réduit pas à un nombre fini de points.

Traitons d'abord le cas où \mathcal{G} est l'algèbre de Lie $sl(2, \mathbf{C})$ de $SL(2, \mathbf{C})$. L'action linéaire de \mathcal{G} sur $T_p S$ étant fidèle, elle s'identifie nécessairement à l'action canonique de $sl(2, \mathbf{C})$ sur \mathbf{C}^2 . Cette action a deux orbites : le point origine p et $\mathbf{C}^2 \setminus \{p\}$. Le stabilisateur H d'un élément de $\mathbf{C}^2 \setminus \{p\}$ sous l'action correspondante de $SL(2, \mathbf{C})$ est un sous-groupe à un paramètre conjugué dans $SL(2, \mathbf{C})$ à un sous-groupe unipotent de la forme $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $b \in \mathbf{C}$.

Remarquons que G/H possède un champ de vecteurs holomorphe G -invariant qui s'exprime sur $\mathbf{C}^2 \setminus \{p\}$ sous la forme $z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$.

Comme l'ouvert $S \setminus E$ est localement modelé sur $(G, G/H)$, il hérite d'un champ de vecteurs holomorphe X . Le principe de prolongement de Hartog implique que le champ de vecteurs X se prolonge à S . Par construction, X est \mathcal{G} -invariant sur S privé de E et, par analyticité, X doit être invariant partout. Ceci implique que X s'annule au point p car l'action de l'isotropie $SL(2, \mathbf{C})$ en p ne préserve aucun vecteur non nul de $T_p S \simeq \mathbf{C}^2$. La contradiction recherchée vient du fait que les surfaces d'Inoue ne supportent aucun champ de vecteurs non trivial qui s'annule en au moins un point [12].

On peut également conclure en démontrant directement que les surfaces d'Inoue n'admettent aucun feuilletage singulier \mathcal{F} avec toutes les singularités locales de la forme $z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$. En effet, le théorème de Hartog permet de prolonger le fibré tangent $T\mathcal{F}$ en un fibré holomorphe en droites sur S (qui n'est pas un sous-fibré de TS à cause des singularités) [7] et, comme les classes de Chern d'une surface d'Inoue sont nulles [3, 34], les formules de Baum-Bott [8] donnent $k = 4k = c_1^2(T\mathcal{F})$, où k est le cardinal de S et $c_1(T\mathcal{F})$ est la première classe de Chern du fibré $T\mathcal{F}$. Il vient que $k = 0$ et l'ensemble S est vide.

La preuve est la même quand \mathcal{G} est l'algèbre de Lie de $GL(2, \mathbf{C})$. \square

4 Fibrés elliptiques au-dessus d'une courbe de genre $g \geq 2$

L'existence d'une structure affine holomorphe sur un fibré principal holomorphe en courbes elliptiques au-dessus d'une surface de genre $g \geq 2$, de premier nombre de Betti impair, est un résultat dû à Maehara [24]. Dans [15] Klingler étudie la géométrie globale des structures affines holomorphes sur ces fibrés et montre, en

particulier, que les applications développantes associées peuvent être non injectives: le revêtement universel ne s'identifie pas toujours à un ouvert de \mathbf{C}^2 .

Nous étudions ici les connexions affines holomorphes non nécessairement plates sur ces fibrés et démontrons le point (ii) du théorème 1.1.

Commençons par suivre la construction géométrique de [15] d'une connexion affine holomorphe sans torsion plate sur S , qui nous servira de référence par la suite.

À revêtement fini et quotient fini près, on peut supposer que le nombre de Chern de S vaut $g - 1$ [15]. Alors le fibré S est construit de la manière suivante.

Soit Γ un sous-groupe discret sans torsion de $PSL(2, \mathbf{R})$ tel que $\Sigma = \Gamma \backslash H$, où H désigne le demi-plan de Poincaré. Choisissons une structure projective holomorphe sur Σ , avec une application développante $\tau : H \rightarrow P^1(\mathbf{C})$ et un morphisme d'holonomie $\rho : \Gamma \rightarrow PSL(2, \mathbf{C})$. L'image de Γ dans $PSL(2, \mathbf{C})$ se relève à $SL(2, \mathbf{C})$ (ceci vient du fait que chaque variété (réelle) compacte orientable de dimension 3 a une seconde classe de Stiefel-Whitney triviale [28]).

Considérons donc Γ comme étant un sous-groupe de $SL(2, \mathbf{C})$. Désignons par $W = \mathbf{C}^2 \setminus \{0\}$ le fibré tautologique (de fibre \mathbf{C}^*) au-dessus de $P^1(\mathbf{C})$. L'action canonique de Γ sur \mathbf{C}^2 induit une action de Γ sur W . On transporte la structure affine holomorphe de W en une structure affine sur le fibré image réciproque $\tau^*(W) \simeq \mathbf{C}^* \times H$. La structure affine de $\tau^*(W)$ est invariante par l'action induite de Γ (qui provient donc de l'action sur H en tant que groupe de revêtement et de l'action sur W donnée par ρ).

Cette structure affine holomorphe sur $\tau^*(W)$ est également invariante par les homothéties dans les fibres. Soit un réseau $\Delta \simeq \mathbf{Z}$ dans \mathbf{C}^* qui agit par multiplication dans les fibres de $\tau^*(W)$ et considérons le quotient de $\tau^*(W)$ by $\Delta \times \Gamma$. Ce quotient est un fibré principal holomorphe au-dessus de Σ , de fibre la courbe elliptique $\Delta \backslash \mathbf{C}^*$, muni d'une structure affine holomorphe.

À revêtement et quotient fini près, S est biholomorphe au fibré précédent et hérite donc d'une connexion affine holomorphe plate sans torsion ∇_0 . Le revêtement universel $\mathbf{C} \times H$ hérite également d'une connexion qui provient de ∇_0 via l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \times H &\rightarrow \mathbf{C}^* \times H \\ (z, \xi) &\rightarrow (e^z, \xi). \end{aligned}$$

L'action d'un élément $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{R})$ de Γ sur $\mathbf{C} \times H$ est donnée par la formule suivante [15]:

$$\gamma(z, \xi) = (z + \log(c\xi + d), \gamma\xi), \forall (z, \xi) \in \mathbf{C} \times H,$$

où \log désigne une détermination du logarithme et l'action de γ sur H provient de l'action canonique de $SL(2, \mathbf{R})$ sur H .

Passons maintenant à la preuve du théorème 1.1 :

Démonstration

La différence $\nabla - \nabla_0$ entre une connexion affine holomorphe arbitraire ∇ sur S et la connexion de référence ∇_0 est une section holomorphe ω du fibré vectoriel $T^*S \otimes T^*S \otimes TS$. L'image réciproque de ce tenseur sur le revêtement universel $\mathbf{C} \times H$ de S est une section du même type $\tilde{\omega}$ invariante par le groupe de revêtement engendré par $\Delta \times \Gamma$ et par la transformation $t(z, \xi) = (z + 2i\pi, \xi)$.

En les coordonnées globales $(z, \xi) \in \mathbf{C} \times H$ du revêtement universel, l'expression de $\tilde{\omega}$ sera :

$$f_{11}(z, \xi)dz \otimes dz \otimes \frac{\partial}{\partial z} + f_{12}(z, \xi)dz \otimes d\xi \otimes \frac{\partial}{\partial z} + f_{21}(z, \xi)dz \otimes dz \otimes \frac{\partial}{\partial \xi} + f_{22}(z, \xi)dz \otimes d\xi \otimes \frac{\partial}{\partial \xi} + \\ g_{11}(z, \xi)d\xi \otimes dz \otimes \frac{\partial}{\partial z} + g_{12}(z, \xi)d\xi \otimes d\xi \otimes \frac{\partial}{\partial z} + g_{21}(z, \xi)d\xi \otimes dz \otimes \frac{\partial}{\partial \xi} + g_{22}(z, \xi)d\xi \otimes d\xi \otimes \frac{\partial}{\partial \xi},$$

avec f_{ij}, g_{ij} des fonctions holomorphes quelque soient $1 \leq i, j \leq 2$.

Par ailleurs, un calcul direct montre que la différence entre ∇_0 et la connexion standard de $\mathbf{C} \times H$ correspond aux fonctions $f_{11} = f_{22} = g_{21} = 1$, tous les autres coefficients étant nuls [15].

L'invariance de $\tilde{\omega}$ par l'action de Δ implique que les fonctions $f_{ij}(\cdot, \xi)$ and $g_{ij}(\cdot, \xi)$ sont invariantes par la transformation $z \rightarrow z + \log \delta$, où δ est un élément qui engendre Δ . Comme ces fonctions doivent être également invariantes par t , elles ont deux périodes linéairement indépendantes sur \mathbf{R} .

Le principe du maximum implique que les fonctions f_{ij} and g_{ij} ne dépendent que de la variable ξ .

Il vient que $\frac{\partial}{\partial z}$ est un champ de Killing de $\tilde{\omega}$. Comme le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial z}$ préserve aussi ∇_0 , il est un champ de Killing pour ∇ .

À partir de maintenant nous considérons seulement des connexions ∇ sans torsion, ce qui conduit à : $f_{12} = g_{11}$ et $f_{22} = g_{21}$.

L'invariance de $\tilde{\omega}$ par l'action de Γ est équivalente au système suivant :

- (1) $f_{11}(\xi) = f_{11}(\gamma\xi) - cf_{21}(\gamma\xi)(c\xi + d)$
- (2) $f_{12}(\xi) = f_{12}(\gamma\xi)(c\xi + d)^{-2} - 2c^2f_{21}(\gamma\xi) - cf_{22}(\gamma\xi)(c\xi + d)^{-1} + 2cf_{11}(\gamma\xi)(c\xi + d)^{-1}$
- (3) $f_{21}(\xi) = f_{21}(\gamma\xi)(c\xi + d)^2$
- (4) $f_{22}(\xi) = 2f_{21}(\gamma\xi)c(c\xi + d) + f_{22}(\gamma\xi)$
- (5) $g_{12}(\xi) = g_{12}(\gamma\xi)(c\xi + d)^{-4} + c^2f_{11}(\gamma\xi)(c\xi + d)^{-2} + cf_{12}(\gamma\xi)(c\xi + d)^{-3} - c^3f_{21}(\gamma\xi)(c\xi + d)^{-1} - c^2f_{22}(\gamma\xi)(c\xi + d)^{-2} - cg_{22}(\gamma\xi)(c\xi + d)^{-3}$
- (6) $g_{22}(\xi) = g_{22}(\gamma\xi)(c\xi + d)^{-2} + cf_{22}(\gamma\xi)(c\xi + d)^{-1} + c^2f_{21}(\gamma\xi),$

pour tout élément $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$.

L'équation (3) montre que f_{21} a l'équivariance d'un champ de vecteurs holomorphe sur Σ . Comme $g \geq 2$, ceci implique que $f_{21} = 0$. Les équations (1) et (4) impliquent que f_{11} et f_{22} sont des fonctions holomorphes sur Σ , donc constantes.

Ceci conduit à :

$$(2')f_{12}(\xi) = f_{12}(\gamma\xi)(c\xi + d)^{-2} - cf_{22}(c\xi + d)^{-1} + 2cf_{11}(c\xi + d)^{-1}$$

$$(5')g_{12}(\xi) = g_{12}(\gamma\xi)(c\xi + d)^{-4} + c^2f_{11}(c\xi + d)^{-2} + cf_{12}(\gamma\xi)(c\xi + d)^{-3} - c^2f_{22}(c\xi + d)^{-2} - cg_{22}(\gamma\xi)(c\xi + d)^{-3}$$

$$(6')g_{22}(\xi) = g_{22}(\gamma\xi)(c\xi + d)^{-2} + cf_{22}(c\xi + d)^{-1}, \text{ avec } f_{11}, f_{22} \in \mathbf{C}.$$

Nous montrons maintenant que $f_{11} = f_{22} = 0$. Supposons par l'absurde que $f_{22} \neq 0$.

La dernière équation implique que la 1-forme différentielle $\alpha = (g_{22}(\xi) - \frac{f_{22}}{\xi - \bar{\xi}})d\xi$ est Γ -invariante. Cette 1-forme descend donc sur Σ .

Par ailleurs, $d\alpha = \frac{f_{22}}{(\xi - \bar{\xi})^2}d\xi \wedge d\bar{\xi}$. Il vient que $d\alpha$ est un multiple non nul de la forme volume hyperbolique de Σ et donc $\int_{\Sigma} d\alpha \neq 0$. Ceci est en contradiction avec la formule de Stokes.

Il vient que $f_{22} = 0$. L'équation (2') implique de la même manière que $f_{11} = 0$.

L'interprétation des équations (2') et (6') est à présent la suivante : f_{12} et g_{22} sont des sections du fibré canonique K_{Σ} de Σ .

Notons $v = g_{22} - f_{12}$. L'équation (5') est équivalente au fait que $w = -2g_{12} + v'$ est une section holomorphe de K_{Σ}^2 , autrement dit, $w(\xi)d\xi^2$ est Γ -invariant.

Il vient que l'espace des connexions affines holomorphes sans torsion sur S est paramétré par

$$(f_{12}, g_{22}, -2g_{12} + g'_{22} - f'_{12}) \in (H^0(\Sigma, K_{\Sigma}))^2 \times H^0(\Sigma, K_{\Sigma}^{\otimes 2}) \simeq \mathbf{C}^{5g-3}.$$

Un calcul direct fournit le tenseur de courbure R de la connexion :

$$R\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \xi}\right)\frac{\partial}{\partial z} = f_{12}\frac{\partial}{\partial z}; \quad R\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \xi}\right)\frac{\partial}{\partial \xi} = [f_{12}(g_{22} - f_{12}) - f'_{12}]\frac{\partial}{\partial z} - f_{12}\frac{\partial}{\partial \xi}.$$

La courbure de ∇ est identiquement nulle si et seulement si $f_{12} = 0$. Dans ce cas on retrouve bien la paramétrisation de l'espace des connexions plates donnée dans [15].

Il reste à montrer que l'algèbre de Lie locale de ∇ est engendrée par $\frac{\partial}{\partial z}$, dès que $f_{12} \neq 0$.

Supposons donc que $f_{12} \neq 0$ et considérons un champ de Killing local $X = a(z, \xi)\frac{\partial}{\partial z} + b(z, \xi)\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}}$, avec a et b des fonctions holomorphes locales sur $\mathbf{C} \times H$.

L'équation d'un champ de Killing pour ∇ est [17] :

$$[X, \nabla_Y Z] = \nabla_{[X, Y]} Z + \nabla_Y [X, Z],$$

quelque soient les champs de vecteurs tangents Y, Z . Il suffit de vérifier cette équation pour (Y, Z) étant un des couples suivants : $(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \xi}), (\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z})$ et $(\frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \xi})$.

L'équation aux dérivées partielles satisfaite par $X = a(z, \xi) \frac{\partial}{\partial z} + b(z, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi}$ est :

$$(i) \quad a_{zz} + a_z + 2f_{12}b_z = 0$$

$$(ii) \quad b_{zz} + b_z = 0$$

$$(iii) \quad a_{z\xi} + g_{12}b_z + f_{12}b_\xi + \frac{\partial f_{12}}{\partial \xi} b = 0$$

$$(iv) \quad b_{z\xi} + a_z + (g_{22} - f_{12})b_z = 0$$

$$(v) \quad a_{\xi\xi} - g_{12}a_z + (2f_{12} - g_{12})a_\xi + 2g_{12}b_\xi + \frac{\partial g_{12}}{\partial \xi} b = 0$$

$$(vi) \quad b_{\xi\xi} + 2a_\xi + g_{22}b_\xi + \frac{\partial g_{22}}{\partial \xi} b = 0.$$

La solution générale de l'équation (ii) est $b = \nu(\xi)e^{-z} + C(\xi)$, où ν, C sont des fonctions holomorphes de la variable ξ .

On remplace b_z dans l'équation (i) et avec la méthode de la variation de la constante on obtient $a_z = [z2f_{12}(\xi)\nu(\xi) + A(\xi)]e^{-z}$, où A est une fonction holomorphe de la variable ξ .

On introduit les dérivées partielles de a et de b dans l'équation (iv) :

$$[-\nu'(\xi) + A(\xi) - (g_{22} - 2f_{12})\nu(\xi)]e^{-z} + 2f_{12}(\xi)\nu(\xi)ze^{-z} = 0.$$

Comme les fonctions e^{-z} et ze^{-z} sont linéairement indépendantes sur \mathbf{C} , ceci mène à $f_{12}(\xi)\nu(\xi) = 0$. Comme $f_{12} \neq 0$, il vient que $\nu(\xi) = 0$.

L'annulation du coefficient de e^{-z} dans la relation précédente implique alors $A(\xi) = 0$.

On obtient donc $b = C(\xi)$ et $a = B(\xi)$, avec B fonction holomorphe de la variable ξ .

Le système initial devient alors :

$$(iii') \quad f'_{12}b + f_{12}b' = 0$$

$$(v') \quad a'' + (2f_{12} - g_{12})a' + 2g_{12}b' - g'_{12}b = 0$$

$$(vi') \quad b'' + 2a' + g_{22}b' + g'_{22}b = 0.$$

La solution générale de (iii') est $b = \frac{C_0}{f_{12}}$, avec $C_0 \in \mathbf{C}$.

Comme le genre g de Σ est supérieur ou égal à 2, toute section holomorphe de K_Σ s'annule en au moins un point. Par conséquent, f_{12} s'annule en au moins un point $\xi_0 \in H$.

Plaçons nous dans un voisinage ouvert d'un point $(z, \xi_0) \in \mathbf{C} \times H$. Les germes de champs de Killing (holomorphes) en (z, ξ_0) satisfont tous $C_0 = 0$ et donc $b = 0$. Il vient qu'au voisinage de ce point les germes de champs de Killing sont de la forme $B(\xi) \frac{\partial}{\partial z}$. D'après l'équation (vi') on a que la fonction B est constante.

L'algèbre des germes de champs de Killing au voisinage de (z, ξ_0) est donc de dimension un. Comme cette algèbre est de dimension constante sur S [1, 2, 9], sa dimension est (partout) égale à un.

L'algèbre des champs de Killing est donc engendrée par le champ fondamental $\frac{\partial}{\partial z}$ de la fibration principale, dès que $f_{12} \neq 0$. \square

Pour en déduire le corollaire 1.2 il suffit de prouver la proposition suivante :

Proposition 4.1 (i) *Les connexions affines holomorphes sans torsion sur un fibré elliptique S au-dessus d'une surface de Riemann de genre $g \geq 2$, de premier nombre de Betti impair, sont projectivement plates.*

(ii) *Les connexions affines holomorphes sans torsion invariantes par translations sur \mathbf{C}^2 sont projectivement plates.*

Démonstration

(i) On reprend les notations de la preuve précédente. La connexion projective associée à la connexion affine sans torsion ∇ est donnée par l'équation différentielle de second ordre $\xi'' = K^0(z, \xi) + K^1(z, \xi)\xi' + K^2(z, \xi)(\xi')^2 + K^3(z, \xi)(\xi')^3$, avec $K^0 = -f_{21} = 0$, $K^1 = f_{11} - 2f_{22} - 1$, $K^2 = -(g_{22} - 2f_{12})$ et $K^3 = g_{12}$ [4].

Il est classiquement connu d'après les travaux [23], [32], [4] que cette connexion projective est plate si et seulement si les invariants de Cartan sont identiquement nuls. Or, ces invariants qui valent

$$L_1 = 2K_{z\xi}^1 - K_{zz}^2 - 3K_{\xi\xi}^0 - 6K^0 K_z^3 - 3K^3 K_z^0 + 3K^0 K_\xi^2 + 3K^2 K_\xi^0 + K^1 K_z^2 - 2K^1 K_\xi^1,$$

$$L_2 = 2K_{z\xi}^2 - K_{\xi\xi}^1 - 3K_{zz}^3 + 6K^3 K_\xi^0 + 3K^0 K_\xi^3 - 3K^3 K_z^1 - 3K^1 K_z^3 - K^2 K_\xi^1 + 2K^2 K_z^2$$

sont nuls car $K^0 = 0, K^1 = -1$ et K^2, K^3 sont des fonctions de ξ .

(ii) Dans ce cas les fonctions K^0, K^1, K^2 et K^3 sont constantes et on conclut comme au point précédent. \square

5 Connexions projectives

Rappelons que, d'après [20, 21], les surfaces complexes compactes munies d'une connexion projective holomorphe normale sont biholomorphes à : à $P^2(\mathbf{C})$, à une surface qui admet une connexion affine holomorphe ou bien à un quotient non ramifié de l'espace hyperbolique complexe $H_{\mathbf{C}}^2$.

Commençons par la proposition suivante qui nous sera utile par la suite :

Proposition 5.1 *Soit S une surface complexe qui possède une connexion affine holomorphe. Alors toute connexion projective holomorphe normale sur S est projectivement équivalente à une connexion affine holomorphe sans torsion sur S .*

Le corollaire 1.2 implique alors :

Corollaire 5.2 *Si S possède une connexion affine holomorphe, alors toute connexion projective holomorphe normale sur S est plate.*

Démonstration

Cette proposition est une conséquence directe des résultats de [10]. En effet, il est montré dans [10] que S admet une connexion affine holomorphe si et seulement si $d\log\Delta_{ij}$ est un élément trivial dans $H^1(S, \Omega^1)$, où Δ_{ij} est le 1-cocycle du fibré canonique à S et Ω^1 est le faisceau des 1-formes différentielles holomorphes (voir [10], page 96).

Par ailleurs, cette même condition suffit pour associer à toute connexion projective holomorphe normale sur S , une connexion affine holomorphe sans torsion qui lui est projectivement équivalente (voir dans [20], pages 78-79, la formule explicite (3.6)). \square

Décrivons maintenant la connexion projective normale plate standard sur les quotients non ramifié de $H_{\mathbf{C}}^2$. Rappelons que l'espace hyperbolique complexe $H_{\mathbf{C}}^2 = SU(2, 1)/S(U(2) \times U(1))$ s'identifie à l'ouvert $\{z = [z_0 : z_1] \in P^2(\mathbf{C}), |z_0| + |z_1| < |z_2|\}$ de $P^2(\mathbf{C})$ sur lequel le groupe des biholomorphismes agit projectivement. Tout quotient compact de $H_{\mathbf{C}}^2$ par un sous-groupe discret de $SU(2, 1)$ hérite donc d'une structure projective holomorphe standard qui, de plus, est unique (à structure complexe fixée) [29] (voir également [22, 16]).

En rassemblant les arguments de [11, 26, 29] (voir également [22, 16]), nous obtenons ici la proposition suivante, qui ensemble avec le corollaire 5.2, achève la preuve du théorème 1.3.

Proposition 5.3 *Soit S une surface complexe compacte qui admet une connexion projective holomorphe normale, mais ne possède aucune connexion affine holomorphe. Alors S est projectivement équivalente à $P^2(\mathbf{C})$ muni de sa connexion projective plate standard ou bien à un quotient compact non ramifié de $H_{\mathbf{C}}^2$ muni de sa connexion projective plate standard.*

Démonstration D'après le résultat de [20, 21], la surface S est biholomorphe à $P^2(\mathbf{C})$ ou bien à un quotient non ramifié $H_{\mathbf{C}}^2$.

-Si S est biholomorphe à $P^2(\mathbf{C})$, alors le théorème principal de [11] montre que S admet une *unique* connexion projective holomorphe normale qui est la connexion plate standard de $P^2(\mathbf{C})$. Un résultat plus fort de McKay [26] (qui suppose seulement l'existence d'une courbe rationnelle) implique que la seule connexion de Cartan

projective holomorphe (et, en particulier, l'unique connexion projective holomorphe normale) sur $P^2(\mathbf{C})$ est la connexion *plate* canonique.

-Si S est un quotient de $H_{\mathbf{C}}^2$, il est montré dans [29] (voir également [22, 16]) que S admet une *unique* connexion projective holomorphe. La première étape de la preuve consiste à interpréter la différence entre deux connexions projectives, comme une section holomorphe du fibré $Hom(L, S')$, où L est le fibré en droites tautologique sur le projectivisé du fibré tangent $\pi : PTS \rightarrow S$ et S' est le sous-fibré du fibré tangent holomorphe à PTS donné par le noyau de la différentielle de π . L'idée est de considérer la différence entre des géodésiques projectives issues du même vecteur tangent à S (voir [29], page 258, pour les détails de la preuve).

La deuxième étape démontre que le fibré précédent n'admet aucune section holomorphe non triviale [29] (proposition 2.1) et aboutit à l'unicité de la connexion projective holomorphe. \square

Bibliographie

- [1] *A. M. Amores*, Vector fields of a finite type G -structure, *J. Differential Geom.*, **14(1)**, 1979, 1-6.
- [2] *G. D'Ambra, M. Gromov*, Lectures on transformations groups: geometry and dynamics, *Surveys in Differential Geometry (Cambridge)*, (1990), 19-111.
- [3] *W. Barth, K. Hulek, C. Peters, A. Van De Ven*, Compact complex surfaces, *Ergebnisse der Mathematik*, vol 4, Second Edition, Springer.
- [4] *E. Cartan*, Sur les variétés à connexion projective, *Bull. Soc. Math. France*, **52**, (1924), 205-241.
- [5] *S. Dumitrescu*, Structures géométriques holomorphes sur les variétés complexes compactes, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, **34(4)**, (2001), 557-571.
- [6] *S. Dumitrescu*, Structures géométriques sur les courbes et les surfaces complexes, *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, **X(3)**, (2001), 507-531.
- [7] *X. Gómez-Mont*, Universal families of foliations by curves, *Singularités d'équations différentielles*, *Astérisque*, **150-151**, (1987), 109-129.
- [8] *P. Griffiths, J. Harris*, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley Classics Library, (1994).
- [9] *M. Gromov*, Rigid transformation groups, *Géométrie Différentielle*, (D. Bernard et Choquet-Bruhat Ed.), *Travaux en cours*, Hermann, Paris, **33**, (1988), 65-141.
- [10] *R. Gunning*, *Lectures on Riemann surfaces*, Princeton Mathematical Notes, (1966).

- [11] *J.-M. Hwang & N. Mok*, Uniruled projective manifolds with irreducible reductive G -structure, *J. Reine Angew. Math.*, **490** (1997), 55-64.
- [12] *M. Inoue*, On surfaces of class VII_0 , *Invent. Math.*, **24**, (1974), 269-310.
- [13] *M. Inoue, S. Kobayashi, T. Ochiai*, Holomorphic affine connections on compact complex surfaces, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, **27(2)**, (1980), 247-264.
- [14] *P. Jahnke, I. Radloff*, Threefolds with holomorphic normal projective connections, *Math. Ann.*, **329(3)**, (2004), 379-400.
- [15] *B. Klingler*, Structures affines et projectives sur les surfaces complexes, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, **48(2)**, (1998), 441-477.
- [16] *B. Klingler*, Un théorème de rigidité non-métrique pour les variétés localement symétriques hermitiennes, *Comm. Math. Helv.*, **76(2)**, (2001), 200-217.
- [17] *S. Kobayashi*, Transformation groups in differential geometry, Springer-Verlag, (1972).
- [18] *S. Kobayashi, T. Nagano*, On projective connections, *J. Math. and Mechanics*, **13**, (1964), 215-236.
- [19] *S. Kobayashi, T. Ochiai*, Holomorphic structures modeled after hyperquadrics, *Tôhoku Math. J.*, **34**, (1982), 587-629.
- [20] *S. Kobayashi, T. Ochiai*, Holomorphic projective structures on compact complex surfaces, *Math. Ann.*, **249**, (1980), 75-94.
- [21] *S. Kobayashi, T. Ochiai*, Holomorphic projective structures on compact complex surfaces II, *Math. Ann.*, **255**, (1981), 519-521.
- [22] *S. Kobayashi, T. Ochiai*, Holomorphic structures modeled after compact hermitian symmetric spaces, in *Manifolds and Lie groups* (J. Coates, S. Helgason), *Progress in Math.*, **14**, Birkhauser, (1981), 207-222.
- [23] *R. Liouville*, Sur les invariants de certaines équations différentielles et sur leurs applications, *Journal de l'Ecole Polytechnique*, **59**, (1889), 7-76.
- [24] *K. Maehara*, On elliptic surfaces whose first Betti numbers are odd, *Intl. Symp. on Alg. Geom.*, Kyoto, (1977), 565-574.
- [25] *B. McKay*, Characteristic forms of complex Cartan geometries, *Arxiv math. DG/0704.2555*.
- [26] *B. McKay*, Rational curves and parabolic geometries, *Arxiv math. DG/0603276*.
- [27] *B. McKay*, Complete projective connections, *Arxiv math. DG/0504082*.

- [28] *J. Milnor, J. Stasheff*, Characteristic classes, Princeton University Press, (1974).
- [29] *N. Mok, S. Yeung*, Geometric realizations of uniformization of conjugates of hermitian locally symmetric manifolds, Complex Analysis and Geometry, ed. V. Ancona, A. Silva, New York, Plenum Press, (1992), 253-270.
- [30] *R. Molzon, K. Mortensen*, The Schwarzian derivative for maps between manifolds with complex projective connections, Trans. Amer.Math. Soc., **348(8)**, (1996), 3015-3036.
- [31] *T. Suwa*, Compact quotient spaces of \mathbf{C}^2 by affine transformation groups, J. Diff. Geom. **10**, (1975), 239-252.
- [32] *A. Tresse*, Détermination des invariants ponctuels de l'équation différentielle ordinaire du second ordre $y'' = \omega(x, y, y')$, Leipzig, **87 S**, gr. 8, (1896).
- [33] *A. Vitter*, Affine structures on compact complex manifolds, Invent. Math., **17**, (1972), 231-244.
- [34] *C. Wall*, Geometric structures on compact complex analytic surfaces, Topology, **25(2)**, (1986), 119-153.

Mots-clés : connexions affines holomorphes -connexions projectives holomorphes- surfaces complexes- champs de Killing locaux.

Classification math. : 53B21, 53C56, 53A55.