

Techniques complexes d'étude d'E.D.O.

D. Cerveau *

D. Garba Belko †

R. Meziani §

Avec un appendice de J. Ribon‡

Résumé

We relate some properties of complexifications of real analytic foliations with problems such that existence of first integrals or convergent normalizations. Holomorphic diffeomorphisms having an invariant real foliation play a crucial role.

2000 Mathematics Subject Classification : 34A26, 37F75, 32M25.

Keywords : Real analytic foliation, holomorphic foliation, LEVI-flat submanifold.

1 Introduction

Considérons un feuilletage analytique réel $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{R}}$ à l'origine de \mathbb{R}^2 . Il est donné par un germe de 1-forme analytique $\omega = a(x_1, x_2)dx_1 + b(x_1, x_2)dx_2$. Son complexifié $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}$ est donné par la même forme, mais vue en complexe :

*Institut de Recherche en Mathématiques de Rennes1, Campus de Beaulieu, 263 Avenue du Général Leclerc 35042 Rennes Cedex

†Faculté des Sciences, Université Abdou Moumouni, B.P. 10662 Niamey(Niger)

‡IMPA, Estrada Dona Castorina 110 Jardim Botânico, Rio de Janeiro (Brésil)

§Département de Mathématiques, Université de Kenitra (Maroc)

$\omega^{\mathbb{C}} = a(z_1, z_2)dz_1 + b(z_1, z_2)dz_2$ avec les notations habituelles $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$. Soit $\mathcal{L}_{(x_1, x_2)}^{\mathbb{R}}$ une feuille de $\mathcal{F}_{\omega}^{\mathbb{R}}$ (par définition connexe) passant par (x_1, x_2) et $\mathcal{L}_{(x_1, x_2)}^{\mathbb{C}}$ sa complexifiée ; $\mathcal{L}_{(x_1, x_2)}^{\mathbb{C}}$ est la feuille de $\mathcal{F}_{\omega}^{\mathbb{C}}$ passant par ce même point. Il se peut que l'intersection de $\mathcal{L}_{(x_1, x_2)}^{\mathbb{C}}$ avec le plan réel \mathbb{R}^2 contienne strictement $\mathcal{L}_{(x_1, x_2)}^{\mathbb{R}}$. Evidemment $\mathcal{L}_{(x_1, x_2)}^{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^2$ est constitué de feuilles de $\mathcal{F}_{\omega}^{\mathbb{R}}$. Chacune de ces feuilles sera appelée compagnon de $\mathcal{L}_{(x_1, x_2)}^{\mathbb{R}}$. Bien sûr on peut donner des définitions en toute dimension mais nous n'en ferons pas usage. Voici un exemple élémentaire : considérons le feuilletage de \mathbb{R}^2 donné par les niveaux de la forme quadratique $q = x_1x_2$. Alors que la feuille réelle $\mathcal{L}_{(1,1)}^{\mathbb{R}}$ est la demi branche d'hyperbole $x_1x_2 = 1$ passant par le point $(1, 1)$, l'intersection $\mathcal{L}_{(1,1)}^{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^2$ est l'hyperbole complète avec ses deux composantes passant par ce même point. Lorsque l'on perturbe le feuilletage ci-dessus en un feuilletage donné par $\omega = dq + h.o.t.$ la topologie des feuilles ne change pas au sens où la contemplation du portrait de phase du feuilletage $\mathcal{F}_{\omega}^{\mathbb{R}}$ ne permet pas de conclure quoique ce soit sur son type analytique ; par exemple on ne peut pas décider de l'existence ou non d'intégrale première analytique non constante. Il n'en va pas de même si l'on considère les feuilles et leur compagnons. Nous montrerons en particulier le résultat suivant :

Théorème 1.1. *Soit $\mathcal{F}_{\omega}^{\mathbb{R}}$ un germe de feuilletage analytique en l'origine de \mathbb{R}^2 défini par la 1-forme $\omega = d(x_1x_2) + h.o.t.$. Si chaque feuille de $\mathcal{F}_{\omega}^{\mathbb{R}}$ admet un compagnon non trivial, alors $\mathcal{F}_{\omega}^{\mathbb{R}}$ possède une intégrale première analytique non constante.*

Nous donnerons un énoncé plus général et nous étudierons le problème des compagnons pour les feuilletages donnés par une 1-forme à 1-jet non nul. Comme d'habitude le cas "noeud-col" est problématique. Nous observerons plusieurs exemples où nous verrons que l'ensemble des compagnons peut s'avérer dense et dénombrable.

Dans le même d'ordre d'idée nous avons cherché à comprendre, un feuilletage $\mathcal{F}_{\omega}^{\mathbb{R}}$ étant donné, le saturé par le complexifié $\mathcal{F}_{\omega}^{\mathbb{C}}$ de l'espace ambiant total \mathbb{R}^2 . Nous le notons $\mathcal{F}_{\omega}^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$. Par exemple, si $\mathcal{F}_{\omega}^{\mathbb{R}}$ est un feuilletage linéaire, c'est à dire donné par une 1-forme linéaire, on observe que $\mathcal{F}_{\omega}^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$ est une feuille d'un feuilletage analytique réel de codimension 1 défini à l'origine de $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{C}^2$. Comme nous le verrons cette feuille peut être d'adhérence une hypersurface analytique : c'est le cas pour le feuilletage $x_1x_2 = \text{constante}$ où $\mathcal{F}_{\omega}^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$ est un cône quadratique de \mathbb{R}^4 . Mais cette feuille peut être aussi dense. On peut comprendre les théorèmes de rigidité qui seront présentés dans le cadre qui suit (les hypothèses sont ici plus fortes que dans le corpus du texte). En 1999 D. Burns et X. Gong [B-Go] ont montré un résultat de type Morse pour les hypersurfaces Levi-flat ; si H est une hypersurface Levi-flat donnée en $0 \in \mathbb{C}^n$

par :

$$\operatorname{Re}(z_1^2 + \dots + z_n^2) + o(|z|^2) = 0$$

il existe un biholomorphisme qui transforme H en la quadrique :

$$\operatorname{Re}(z_1^2 + \dots + z_n^2) = 0.$$

En utilisant ce résultat on montre le théorème suivant :

Théorème 1.2. *Soit $\mathcal{F}_\omega^\mathbb{R}$ un germe de feuilletage analytique à l'origine de \mathbb{R}^2 , défini par une 1-forme analytique ω . On suppose que le 1-jet de ω en l'origine est $J^1\omega = d(x_1x_2)$. Si $\mathcal{F}_\omega^\mathbb{C}(\mathbb{R}^2)$ est une hypersurface analytique réelle à singularité quadratique, alors $\mathcal{F}_\omega^\mathbb{R}$ possède une intégrale première analytique de Morse.*

Preuve. L'hypersurface $\mathcal{F}_\omega^\mathbb{C}(\mathbb{R}^2)$ est Levi-plate; son feuilletage en courbes complexes est donné par la restriction $\omega_\mathbb{C}/\mathcal{F}_\omega^\mathbb{C}(\mathbb{R}^2)$. Soit $(f = 0)$ une équation analytique réduite de $\mathcal{F}_\omega^\mathbb{C}(\mathbb{R}^2)$. Comme la singularité est supposée quadratique le 2-jet de f est une forme quadratique q . En considérant la renormalisation par les homothéties tId , où t appartient à \mathbb{R} , et en faisant tendre t vers 0, on observe que, à multiplication scalaire près :

$$q = x_1y_2 + x_2y_1.$$

D'après Burns et Gong [B-Go] il existe un biholomorphisme Φ de \mathbb{C}_0^2 tel que $f \circ \Phi = 0$ soit le cône $q = 0$. Par suite la deux forme $\Phi^*\omega^\mathbb{C} \wedge d(z_1z_2)$ qui s'annule sur $q = 0$, est identiquement nulle. Il en résulte que $\Phi^*\omega^\mathbb{C}$ possède l'intégrale première z_1z_2 . Ce qui confirme le résultat annoncé. \square

Nous verrons plus loin que l'hypothèse "singularité quadratique" n'est pas nécessaire. La généralisation du résultat ci-dessus à des problèmes de "normalisation" de feuilletage est basée sur un théorème de rigidité des difféomorphismes. Plus précisément J. Ribon montre, en appendice à cet article, qu'un difféomorphisme holomorphe et tangent à l'identité de \mathbb{C}_0 est holomorphiquement conjugué à sa forme normale formelle lorsqu'il laisse invariant un feuilletage analytique de $\mathbb{R}_{,0}^2 \simeq \mathbb{C}_0$.

Nous remercions Alcides Lins Neto, Daniel Panazzolo et Frank Loray pour leurs contributions.

2 Version hyperbolique du Théorème de Poincaré Lyapounov

Le feuilletage $\mathcal{F}_\omega^\mathbb{R}$ est dit elliptique lorsque le 1-jet ω_1 de ω vérifie : la forme quadratique $\omega_1(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2})$ ne s'annule qu'en deux droites complexes

conjuguées. Il est dit hyperbolique si ω_1 est de rang maximum et la forme quadratique ci-dessus s'annule sur deux droites réelles distinctes. Comme nous le rappellerons le Théorème de Poincaré-Lyapounov assure l'existence d'intégrale première de type Morse sous des hypothèses topologiques sur les trajectoires. Il concerne les singularités de type elliptique. Nous proposons une version hyperbolique sous des hypothèses portant sur les compagnons. A titre d'exemple examinons le problème des compagnons dans le cas des feuilletages linéaires. L'énoncé qui suit peut être lu globalement ou localement. L'idée de la preuve que l'on retrouve plus loin est élémentaire.

Proposition 2.1. *Soit $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{R}}$ un feuilletage linéaire de \mathbb{R}^2 donné par la 1-forme $\omega = \lambda x_1 dx_2 + x_2 dx_1$, où $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors la feuille générique de $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{R}}$ possède un compagnon non trivial si et seulement si λ est rationnel.*

Preuve. Le feuilletage $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}$ est aussi décrit par le champ de vecteurs linéaire X :

$$X = \lambda z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Les feuilles réelles $\mathcal{L}_{(x_1, x_2)}^{\mathbb{R}}$ sont donc paramétrées par le flot réel :

$$\exp(tX)(x_1, x_2) = (x_1 \exp(\lambda t), x_2 \exp(-t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Choisissons une condition initiale (x_1, x_2) avec $x_1 x_2 \neq 0$. La feuille complexe de $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}$ passant par (x_1, x_2) est paramétrée par :

$$(u, v) \longmapsto (x_1 \exp(\lambda(u + iv)), x_2 \exp(-(u + iv))), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Pour que les deux coordonnées soient réelles il faut que v et λv appartiennent à $\mathbb{Z}\pi$. Ainsi si la feuille générique de $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{R}}$ possède un compagnon non trivial $\lambda = \frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers, $\text{pgcd}(p, q) = 1$, et $q > 0$. Si tel est le cas, on choisit $v = q\pi$ et l'on remarque, puisque p et q ne sont pas de même parité, que la courbe paramétrée réelle :

$$u \longmapsto (x_1 \exp(\frac{p}{q}u + pi\pi), x_2 \exp(-(u + qi\pi)))$$

est contenue dans le complexifié de $\mathcal{L}_{(x_1, x_2)}^{\mathbb{R}}$. Mais elle n'est pas située dans le même quadrant que $\mathcal{L}_{(x_1, x_2)}^{\mathbb{R}}$. Elle paramètre donc un compagnon non trivial. \square

Dans le cas hyperbolique non linéaire on a les Propositions 2.2 et 2.3, ci-dessous. Leur preuves utilisent la classification analytique des 1-formes dite de Poincaré-Dulac dont voici l'énoncé :

Théorème 2.1. Soit ω une 1-forme analytique ayant pour 1-jet $J^1\omega = \lambda x_1 dx_2 + x_2 dx_1$, où $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Il existe un système de coordonnées analytiques (x_1, x_2) tel que $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{R}}$ soit donné par l'une des formes suivantes :

1. $\omega = \lambda x_1 dx_2 + x_2 dx_1$ si $\lambda \in \mathbb{R}^- \setminus (\mathbb{Z}^- \cup 1/\mathbb{Z}^-)$.
2. $\omega = (\varepsilon x_2^p + x_1) p dx_2 - x_2 dx_1$, où $p \in \mathbb{N}^*$, si $\lambda \in (\mathbb{Z}^- \cup 1/\mathbb{Z}^-)$, $\varepsilon = 0$ ou 1.
3. $\omega = \lambda x_1 (1 + x_1 x_2 A(x_1, x_2)) dx_2 + x_2 dx_1$ si $\lambda \in \mathbb{R}^+$, avec A analytique.

La première proposition traite du cas "Poincaré Dulac non linéarisable."

Proposition 2.2. Soit $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{R}}$ un germe de feuilletage analytique hyperbolique à l'origine de \mathbb{R}^2 , donné par une 1-forme $\omega = (x_2^p + x_1) p dx_2 - x_2 dx_1$, où $p \in \mathbb{N}$. La feuille générique de $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{R}}$ ne possède pas de compagnon non trivial.

Preuve. Le feuilletage $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}$ est décrit par le champ de vecteurs X :

$$X = (z_2^p + z_1) p \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$$

dont le flot paramètre les feuilles réelles $\mathcal{L}_{(x_1, x_2)}^{\mathbb{R}}$:

$$\exp(tX)(x_1, x_2) = ((px_2^p t + x_1) \exp(pt), x_2 \exp(t)), t \in \mathbb{R}.$$

Pour (x_1, x_2) fixé, avec $x_1 x_2 \neq 0$, les feuilles complexes sont paramétrées par :

$$(u, v) \longmapsto ((px_2^p(u + iv) + x_1) \exp(p(u + iv)), x_2 \exp(u + iv)).$$

Pour que les deux coordonnées soient réelles il faut que v soit nul. L'intersection de la feuille complexe passant (x_1, x_2) avec le plan réel est donc la feuille réelle $\mathcal{L}_{(x_1, x_2)}^{\mathbb{R}}$. On en déduit que la feuille générique ne possède pas de compagnon non trivial. \square

La proposition qui suit généralise, au cas non linéaire, la Proposition 2.1 :

Proposition 2.3. Soit $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{R}}$ un germe de feuilletage analytique hyperbolique à l'origine de \mathbb{R}^2 , donné par une 1-forme ω ayant pour 1-jet $\lambda x_1 dx_2 + x_2 dx_1$, avec $\lambda > 0$. Si chaque feuille de $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{R}}$ possède un compagnon non trivial, alors ω admet une intégrale première analytique.

Preuve. D'après le Théorème 2.1 on peut supposer que ω s'écrit sous la forme :

$$\omega = \lambda x_1 (1 + x_1 x_2 A(x_1, x_2)) dx_2 + x_2 dx_1$$

où A est une fonction analytique. Le feuilletage $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}$ est alors défini par la forme : $\omega^{\mathbb{C}} = \lambda z_1(1 + z_1 z_2 A(z_1, z_2)) dz_2 + z_2 dz_1$. Puisque

$$\omega^{\mathbb{C}}\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right) = \lambda z_1(1 + z_1 z_2 A(z_1, z_2)),$$

le feuilletage $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}$ est transverse aux fibres de la projection $\Pi : (z_1, z_2) \rightarrow z_1$ en dehors de $z_1 = 0$. Quitte à faire une homothétie convenable, on suppose que ceci a lieu sur le polydisque de rayon 2. Distinguons les chemins suivants dans l'axe des z_1 :

- $\gamma_1 : \theta \mapsto \exp(i\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$
- $\gamma_2 : \theta \mapsto \exp(i\theta)$, $\theta \in [\pi, 2\pi]$
- $\gamma = \gamma_2 \cdot \gamma_1 : \theta \mapsto \exp(i\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

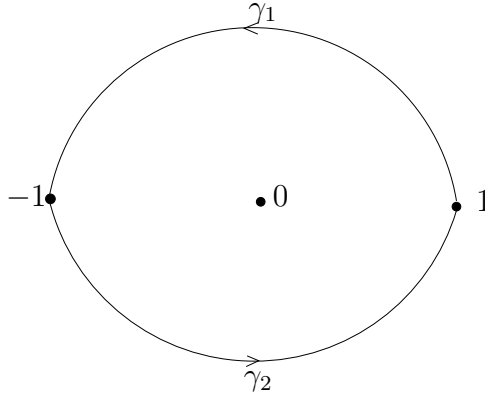


FIG. 1 –

Introduisons les transversales $\Sigma_1 = \{(1, z_2)\}$ et $\Sigma_{-1} = \{(-1, z_2)\}$. Comme la projection Π est transverse à $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}$, en dehors de $z_1 = 0$, la méthode de relèvement des chemins de [Ma-Mo] permet de construire les difféomorphismes holomorphes $h_1 : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_{-1}$ et $h_2 : \Sigma_{-1} \rightarrow \Sigma_1$ obtenus en relevant dans les feuilles de $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}$ les chemins γ_1 et γ_2 respectivement. Plus précisément, $h_1(1, z_2) \in \Sigma_{-1}$ est l'extrémité du chemin $\tilde{\gamma}_1$ d'origine $(1, z_2)$, tracé dans la feuille de $\mathcal{L}_{(1, z_2)}^{\mathbb{C}}$ et se projetant, par Π , sur γ_1 . De même $h_2(-1, z_2) \in \Sigma_1$ est l'extrémité du chemin $\tilde{\gamma}_2$ d'origine $(-1, z_2)$, tracé dans la feuille de $\mathcal{L}_{(-1, z_2)}^{\mathbb{C}}$ et se projetant, par Π , sur γ_2 . Le difféomorphisme d'holonomie $h : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1$, qui est la composition $h_2 \circ h_1$, correspond à la construction de relèvement relatif au lacet $\gamma_1 \cdot \gamma_2$. D'après [Ma-Mo] il suffit de montrer que h est fini pour prouver le théorème ci-dessus.

Considérons à présent un point $m = (1, x_2)$, où x_2 appartient à \mathbb{R} , et notons $\mathcal{L}_m^{\mathbb{R}}$, un compagnon non trivial de $\mathcal{L}_m^{\mathbb{R}}$. Alors $\mathcal{L}_m^{\mathbb{R}}$, coupe l'une des transversales

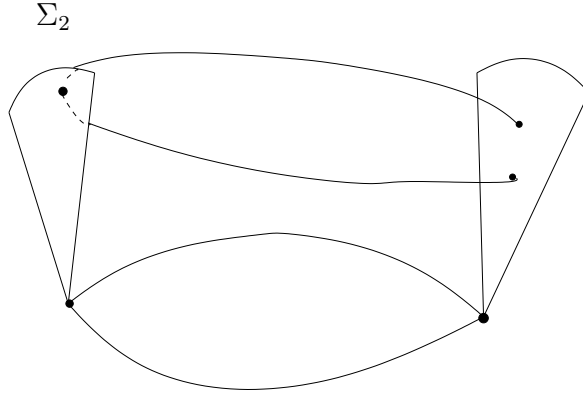


FIG. 2 –

Σ_1 ou Σ_{-1} en un point réel; c'est à dire qu'on peut supposer que $m' = (1, x'_2)$ ou $m' = (-1, x'_2)$. Soit $\tilde{\delta}$ un chemin tracé dans la feuille complexe $\mathcal{L}_m^{\mathbb{C}}$, joignant le point m à m' . La projection de $\tilde{\delta}$ par Π est un chemin δ joignant le point $(0, 1)$ à lui même ou bien au point $(-1, 0)$ suivant le cas. On remarque que δ est à homotopie, à extrémités fixes, près de l'un des types suivants :

1. $\delta = \gamma^{n(m)}$, $n(m) \in \mathbb{Z}$ et $n(m) \neq 0$ si $m' = (1, x'_2)$
2. $\delta = \gamma^{n(m)} \cdot \gamma_1$, $n(m) \in \mathbb{Z}$ si $m' = (-1, x'_2)$

On note, dans toute la suite, σ l'involution de \mathbb{C}^n définie par $\sigma(z) = \bar{z}$, indépendamment de n . Dans le cas (1) ceci implique que $h^{n(m)}(1, x_2)$ est réel; c'est à dire :

$$\sigma \circ h^{n(m)} \circ \sigma(1, x_2) = h^{n(m)}(1, x_2).$$

L'invariance de $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}$ par σ implique que :

$$\sigma \circ h^{n(m)} \circ \sigma(1, x_2) = h_{\sigma(\delta)}(1, x_2).$$

On en déduit que :

$$\sigma \circ h^{n(m)} \circ \sigma(1, x_2) = h^{-n(m)}(1, x_2)$$

et par suite que $h^{2n(m)}(1, x_2) = (1, x_2)$. Dans le cas (2) que $h_1 \circ h^{n(m)}(1, x_2)$ est réel :

$$\sigma \circ h_1 \circ h^{n(m)} \circ \sigma(1, x_2) = h_1 \circ h^{n(m)}(1, x_2).$$

L'invariance de $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}$ par σ implique que :

$$\sigma \circ h_\delta \circ \sigma(1, x_2) = h_{\sigma(\delta)}(1, x_2)$$

où $\sigma(\delta) = \gamma^{-n(m)} \circ \gamma_2^{-1}$. On en déduit que :

$$\sigma \circ h_1 \circ h^{n(m)} \circ \sigma(1, x_2) = h_2^{-1} \circ h^{-n(m)}(1, x_2)$$

et par suite que :

$$h^{2n(m)+1}(1, x_2) = (1, x_2).$$

Lemme 2.1. *Sous les hypothèses de la Proposition 2.3 il existe un entier n non nul tel que h^n soit périodique.*

Preuve. Notons D_n le domaine de définition de h^n et posons :

$$J_n = \{x \in D_n \cap] - \varepsilon, \varepsilon[: h^n(x) = x\}.$$

Remarquons que J_n est contenu dans $\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} D_k$. Puisque chaque feuille admet un compagnon non trivial on a :

$$\bigcup_{n \geq 1} J_n =] - \varepsilon, \varepsilon[.$$

Et donc pour tout n l'ensemble $] - \varepsilon, \varepsilon[$ est contenu dans D_n . Il existe un entier non nul tel que J_n est non dénombrable. Le théorème des zéros isolés assure que la fonction g_n définie par :

$$g_n(z_2) = h^n(1, z_2) - (1, z_2)$$

est identiquement nulle. Et donc h^n est périodique. \square

Comme conséquence de ce qui précède on obtient une version hyperbolique du Théorème de Poincaré -Lyapounov. Rappelons que ce théorème dit que si un feuilletage $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{R}}$, donné par une 1-forme dont le 1-jet est de rang 2, a sa feuille générique homéomorphe à un cercle, alors il possède une intégrale première de Morse (conjuguée à $x_1^2 + x_2^2$). Robert Moussu [Mo] en a donné une preuve utilisant les techniques analogues à celles que nous proposons ici.

Théorème 2.2. *Soit ω un germe de 1-forme analytique, hyperbolique à l'origine de \mathbb{R}^2 donné par une 1-forme ω ayant pour 1-jet $\lambda x_1 dx_2 + x_2 dx_1$. Si la feuille générique du feuilletage $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{R}}$ admet un compagnon non trivial; alors ω possède une intégrale première analytique réelle si λ est positif. Si λ est négatif $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{R}}$ admet, à conjugaison analytique près, une intégrale première du type $\frac{x_1^p}{x_2^q}$.*

Terminons ce paragraphe par le cas elliptique.

Proposition 2.4. *Soit $\omega(x_1, x_2)$ une 1-forme analytique à l'origine de \mathbb{R}^2 . On suppose que ω est elliptique. Alors la feuille générique de $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{R}}$ n'a pas de compagnon non trivial.*

Preuve. Soit $\Pi : \tilde{\mathbb{C}}_{,0}^2 \rightarrow \mathbb{C}_{,0}^2$ le morphisme d'éclatement de l'origine de \mathbb{C}^2 muni des cartes (z_1, t) et (s, z_2) liées par les relations $z_2 = tz_1$ et $st = 1$. L'éclaté strict, $\tilde{\mathcal{F}}_\omega^{\mathbb{C}}$, de $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}$ a deux points singuliers P_1 et P_2 que l'on peut supposer de coordonnées respectives $(0, i)$ et $(0, -i)$ dans la carte (z_1, t) . On en déduit que $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}$ a deux séparatrices complexes conjuguées C_1 et C_2 . Quitte à faire un changement analytique de coordonnées on suppose que $\tilde{C}_1 = (t = i)$ et $\tilde{C}_2 = (t = -i)$, où \tilde{C}_j est l'éclaté strict de C_j par Π . Le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_\omega^{\mathbb{C}}$ est alors transverse à la fibration de Hopf. Puisque $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}$ n'a pas de séparatrice réelle le feuilletage $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{R}}$ est monodromique au sens de [Be-Ce-L]. Ce qui implique que toute feuille de $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{R}}$ coupe l'axe réel $x_2 = 0$. Considérons deux points m et m' distincts de la courbe réelle $x_2 = 0$, appartenant à une même feuille complexe $\mathcal{L}^{\mathbb{C}}$. Il existe un chemin continu δ , contenu dans $\mathcal{L}^{\mathbb{C}}$, joignant m à m' . L'éclaté strict $\tilde{\delta}$ de δ , par Π , est un chemin joignant $\Pi^{-1}(m)$ à $\Pi^{-1}(m')$ dont la projection selon la fibration de Hopf est un lacet γ . Puisque $\tilde{\mathcal{F}}_\omega^{\mathbb{C}}$ n'a que deux singularités non réelles ce lacet est homotope à une puissance de γ_0 , où γ_0 est un lacet d'indice ± 1 autour de P_1 et de support $\tilde{\mathbb{R}}_{,0}^2 \cap \Pi^{-1}\{(0, 0)\}$. On en déduit qu'il existe un morceau de feuille du feuilletage réel $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{R}}$ joignant m à m' ; et par suite les feuilles réelles passant par m et m' sont identiques. \square

3 Cas des selle-noeuds

Rappelons qu'un feuilletage est dit de type selle-noeud s'il est donné par une 1-forme ω dont le 1-jet est du type $x_1 dx_2$. Soit $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}$ un feuilletage de type selle-noeud. On sait d'après Dulac [Mar-Ra1,2] que ω est formellement conjuguée à la suivante appelée forme normale : $\omega_{p,\lambda} = z_1^{p+1} dz_2 - z_2(1 + \lambda z_1^p) dz_1$. On dit que $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}$ est normalisable si ω est holomorphiquement conjuguée à sa forme normale. Dans ce cas $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}$ possède deux séparatrices, l'une dite forte et l'autre dite centrale ou faible. La présence de compagnon non trivial n'implique pas systématiquement de résultats de type normalisation analytique comme le montre la proposition suivante :

Proposition 3.1. *Il existe un feuilletage de Riccati de type selle-noeud $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{R}}$ tel que chaque feuille de $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{R}}$ admette un compagnon non trivial et qui n'est pas analytiquement normalisable.*

3.1 Rappels sur la classification des selle-noeuds

Nous rappelons certains résultats de la classification des selle-noeuds que l'on trouve dans [Mar-Ra1,2]. Soit ω un germe de 1-forme holomorphe de type selle-noeud à l'origine de \mathbb{C}^2 ; Dulac a montré qu'il existe un système de coordonnées holomorphes dans lequel ω s'écrit sous la forme $\omega = z_1^{p+1}dz_2 - f(z_1, z_2)dz_1$, avec $f(0, z_2) = z_2$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On voit, alors, que toutes les droites verticales à l'exception de la "séparatrice forte" ($z_1 = 0$) sont transverses au feuilletage défini par $\omega = 0$. En outre il a montré qu'il existe une transformation formelle fibrée $\hat{\Phi}(z_1, z_2) = (z_1, \hat{\varphi}(z_1, z_2))$, $\hat{\varphi} \in \mathbb{C}[[z_1, z_2]]$ telle que :

$$\omega \wedge \hat{\Phi}^* \omega_{p,\lambda} = 0.$$

En général la "normalisante" formelle $\hat{\Phi}$ est divergente et l'on se demande si, comme dans le cas hyperbolique, la présence de compagnons implique la convergence de la normalisation. D'après le Théorème de Hukuhara-Kimura-Matuda [H-K-M], dans la variable z_1 , il existe une collection d'ouverts sectoriels $(V_k^-, V_k^+)_{k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$ recouvrant un voisinage épointé de $z_1 = 0$, du même type que ceux donnés par le Théorème de la fleur de Leau; sur chacun d'eux on dispose d'une transformation fibrée holomorphe :

$$\Phi_k^\pm : V_k^\pm \times \mathbb{D} \hookrightarrow V_k^\pm \times \mathbb{D}$$

dont le développement asymptotique est $\hat{\Phi}$, avec prolongement continu le long de la variété forte, et redressant sur $V_k^\pm \times \mathbb{D}$ le selle-noeud sur son modèle formel :

$$\omega \wedge (\Phi_k^\pm)^* \omega_{p,\lambda} = 0.$$

Ce modèle formel admet une intégrale première multiforme de type :

$$H_{p,\lambda}(z_1, z_2) = z_2 z_1^{-\lambda} \exp \frac{1}{p z_1^p}.$$

Soit H_k^\pm une détermination de $H_{p,\lambda}$ définie et uniforme sur V_k^\pm . En considérant le système de coordonnées donné par $(z_1, z_2) \mapsto (z_1, z_k^\pm = H_k^\pm(z_1, z_2))$ on vérifie les assertions suivantes :

1. Les feuilles du feuilletage $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}$, induit par ω à l'origine de \mathbb{C}^2 , sont simplement connexes sur chaque ouvert $V_k^\pm \times \mathbb{D}$ et sont paramétrées par \mathbb{C} .
2. Au dessus de l'intersection de deux secteurs consécutifs $V_k^+ \cap V_{k+1}^-$ (resp. $V_k^- \cap V_{k+1}^+$) les feuilles ont un comportement de type col (resp. noeud) : elles explosent (resp. convergent) lorsque l'on s'approche de la singularité. L'application de transition $\Phi_k^- \circ (\Phi_k^+)^{-1}$ (resp. $\Phi_{k+1}^+ \circ (\Phi_k^-)^{-1}$) induit

une transformation sectorielle Φ_k^0 (resp. Φ_k^∞) qui est décrite, dans les coordonnées (z_1, z_k^\pm) par une application (z_1, φ_k^0) (resp. (z_1, φ_k^∞)), où φ_k^0 (resp. φ_k^∞) est un germe de difféomorphisme de \mathbb{C}_0 (resp. une transformation affine).

Lorqu'en particulier ω est le complexifié d'une 1-forme analytique réelle, $\hat{\Phi}$ commute avec σ . L'action de σ sur les secteurs se traduit de l'une des façons, exclusives, suivantes :

1. $\sigma(V_k^\pm) = V_{2l-k}^{\mp}$,
2. $\sigma(V_k^\pm) = V_{2l-k-1}^{\mp}$,

où $l \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $-\pm$ désigne le signe contraire de \pm . Quitte à changer la numérotation du chapelet polarisé orienté on suppose que $l = 0$. Dans le premier cas l'invariance de $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}$ par σ entraîne que les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} (V_k^+ \cap V_k^-) \times \mathbb{D} & \xrightarrow{\sigma} & (V_{-k}^- \cap V_{-k}^+) \times \mathbb{D} \\ \Phi_k^0 \downarrow & & \downarrow (\Phi_{-k}^0)^{-1} \\ (V_k^+ \cap V_k^-) \times \mathbb{D} & \xrightarrow{\sigma} & (V_{-k}^- \cap V_{-k}^+) \times \mathbb{D} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} (V_k^- \cap V_{k+1}^+) \times \mathbb{D} & \xrightarrow{\sigma} & (V_{-k}^+ \cap V_{-k-1}^-) \times \mathbb{D} \\ \Phi_k^\infty \downarrow & & \downarrow (\Phi_{-k}^\infty)^{-1} \\ (V_k^- \cap V_{k+1}^+) \times \mathbb{D} & \xrightarrow{\sigma} & (V_{-k}^+ \cap V_{-k-1}^-) \times \mathbb{D} \end{array}$$

sont commutatifs. Via les coordonnées (z_1, z_k^\pm) la commutativité des diagrammes ci-dessus se traduit par :

$$(1) \quad ((\varphi_k^0)^{-1}, (\varphi_k^\infty)^{-1}) = (\sigma \circ \varphi_{-k}^0 \circ \sigma, \sigma \circ \varphi_{-k}^\infty \circ \sigma).$$

Dans le second cas l'invariance de $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}$ par σ implique que les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} (V_k^+ \cap V_k^-) \times \mathbb{D} & \xrightarrow{\sigma} & (V_{-k-1}^- \cap V_{-k-1}^+) \times \mathbb{D} \\ \Phi_k^0 \downarrow & & \downarrow (\Phi_{-k-1}^0)^{-1} \\ (V_k^+ \cap V_k^-) \times \mathbb{D} & \xrightarrow{\sigma} & (V_{-k-1}^- \cap V_{-k-1}^+) \times \mathbb{D} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} (V_k^- \cap V_{k+1}^+) \times \mathbb{D} & \xrightarrow{\sigma} & (V_{-k-1}^+ \cap V_{-k-2}^-) \times \mathbb{D} \\ \Phi_k^\infty \downarrow & & \downarrow (\Phi_{-k-2}^\infty)^{-1} \\ (V_k^- \cap V_{k+1}^+) \times \mathbb{D} & \xrightarrow{\sigma} & (V_{-k-1}^+ \cap V_{-k-2}^-) \times \mathbb{D}. \end{array}$$

On en déduit ici que :

$$(2) \quad ((\varphi_k^0)^{-1}, (\varphi_k^\infty)^{-1}) = (\sigma \circ \varphi_{-k-1}^0 \circ \sigma, \sigma \circ \varphi_{-k-2}^\infty \circ \sigma).$$

Remarque 3.1. *Il n'est pas étonnant qu'on ait des relations de type (1) ou (2). En effet le générateur d'holonomie de la séparatrice forte, $z_1 = 0$, vérifie $\sigma \circ h \circ \sigma = h^{-1}$. Or ceci est équivalent, d'après [Na], [Tré], à la donnée d'une anti symétrie antiholomorphe sur le chapelet de sphères associé à h .*

Réciproquement on a le :

Lemme 3.1. *Soit $\omega = z_1^{p+1}dz_2 - f(z_1, z_2)dz_1$, avec $f(0, z_2) = z_2$ et $p \in \mathbb{N}^*$, une 1-forme holomorphe à l'origine de \mathbb{C}^2 . Si le chapelet de sphères $(\varphi_k^0, \varphi_k^\infty)$, associé à ω , vérifie les relations (1) ou (2) ci-dessus, alors ω est holomorphiquement conjuguée au complexifié d'une 1-forme analytique réelle.*

Preuve. Nous la présentons dans le cas (1) et laissons le soin au lecteur de l'adapter au cas (2). Notons Θ_k^\pm la restriction de σ à $(V_k^\pm \cup V_{-k}^\pm) \times \mathbb{D}$; et posons :

$$\tilde{\Theta}_k^\pm = \Phi_{-k}^\pm \circ \Theta_k^\pm \circ (\Phi_k^\pm)^{-1} \text{ sur } V_k^\pm \times \mathbb{D}, \text{ et } \tilde{\Theta}_k^\pm = \Phi_k^\pm \circ \Theta_k^\pm \circ (\Phi_{-k}^\pm)^{-1} \text{ sur } V_k^{-\pm} \times \mathbb{D}.$$

Par construction $\tilde{\Theta}_k^\pm$ est une involution antiholomorphe sur $(V_k^\pm \cup V_{-k}^\pm) \times \mathbb{D}$ qui se prolonge continûment sur la séparatrice forte. Puisque σ laisse invariant le feuilletage $\mathcal{F}_{\omega_{p,\lambda}}^\mathbb{C}$, on en déduit que $\tilde{\Theta}_k^\pm$ préserve le feuilletage $\mathcal{F}_\omega^\mathbb{C}/(V_k^\pm \cup V_{-k}^\pm) \times \mathbb{D}$. Les relations (1) assurent que les involutions antiholomorphes $(\tilde{\Theta}_k^+, \tilde{\Theta}_k^-)$, où k appartient à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, se recollent en une involution antiholomorphe $\tilde{\Theta}$, sur $(\bigcup_k (V_k^\pm \cup V_{-k}^\pm)) \times \mathbb{D}$, qui se prolonge continûment sur la séparatrice forte, et qui préserve le feuilletage $\mathcal{F}_\omega^\mathbb{C}$ défini par $\omega^\mathbb{C}$ à l'origine de \mathbb{C}^2 . L'application $\tilde{\Theta}$ induit un germe d'involution antiholomorphe de $\mathbb{C}_{,0}^2$. Et comme toute involution antiholomorphe de $\mathbb{C}_{,0}^2$ est holomorphiquement conjuguée à σ , le résultat en découle. \square

3.2 Preuve de la proposition 3.1

Considérons le chapelet $(\varphi_0^0, \varphi_0^\infty)$, de $Diff(\mathbb{C}, 0) \times Aut(\mathbb{C})$, défini par :

$$\varphi_0^0 = -z, \varphi_1^0 = \varphi_4^0 = \frac{z}{1+iz}, \varphi_2^0 = \varphi_3^0 = \frac{z}{1-iz}, \text{ et } \varphi_k^\infty = z, \text{ pour } k \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}.$$

où $Diff(\mathbb{C}, 0)$ est le groupe des germes de difféomorphismes holomorphes de $\mathbb{C}_{,0}$ et $Aut(\mathbb{C})$ celui des automorphismes de \mathbb{C} . D'après un résultat de Martinet-Ramis [Mar-Ra] ce chapelet est réalisé par un selle-noeud $\tilde{\omega}$ du type $\tilde{\omega} = z_1^6 dz_2 - f(z_1, z_2) dz_1$, avec $f(0, z_2) = z_2$. Par construction il vérifie les relations (1). D'après le lemme précédent $\tilde{\omega}$ est à conjugaison analytique près le complexifié d'une 1-forme analytique réelle $\omega = x_1^6 dx_2 - f(x_1, x_2) dx_1$.

Puisque les automorphismes φ_k^∞ sont triviaux, d'après [Mar-Ra1,2], ω admet une variété centrale dont le générateur d'holonomie h est égal :

$$h(z) = \varphi_4^\infty \circ \varphi_4^0 \circ \varphi_3^\infty \circ \varphi_3^0 \circ \varphi_2^\infty \circ \varphi_2^0 \circ \varphi_1^\infty \circ \varphi_1^0 \circ \varphi_0^\infty \circ \varphi_0^0(z) = -z.$$

On en déduit que chaque feuille réelle admet un compagnon non trivial. Comme les φ_k^0 sont des homographies, $\omega = 0$ est analytiquement conjuguée à une équation de Riccati. En outre ω n'est pas holomorphiquement normalisable puisque les φ_k^0 ne sont pas linéaires.

4 Cas dégénérés

Nous nous intéressons dans ce paragraphe au cas des 1-formes à 1-jet nul. Avant d'énoncer les résultats précisons en la terminologie. Notons $\mathbb{C}(x_1, x_2)$ le corps des fractions de $\mathbb{C}\{x_1, x_2\}$ muni des dérivations $(\partial_{x_1}, \partial_{x_2})$. Rappelons qu'une extension Liouvillienne du corps différentiel $\mathbb{C}(x_1, x_2)$ est une extension différentielle (K, Δ) telle que :

$\mathbb{C}(x_1, x_2) \subset (K_1, \Delta_1) \subset \dots \subset (K_n, \Delta_n) = (K, \Delta)$ où :

- le corps des constantes de (K, Δ) est \mathbb{C} et $\Delta_j/K_{j-1} = \Delta_{j-1}$.
- Le corps $K_j = K_{j-1}(t_j)$ est une extension différentielle de K_{j-1} de l'un des types suivants :

1. t_j est algébrique sur K_{j-1} ,
2. pour toute dérivation δ de Δ_j , $\delta t_j/t_j$ est un élément de K_{j-1} ,
3. pour toute dérivation δ de Δ_j , δt_j est un élément de K_{j-1} .

Une fonction Liouvillienne est par définition une fonction appartenant à une extension Liouvillienne de $\mathbb{C}(x_1, x_2)$. Notons qu'une 1-forme holomorphe non dicritique [Ce-Ma], dont la réduction des singularités se fait en un éclatement et ne contient pas de selle-noeud, admet, d'après [Ce-Ma], [P], une intégrale première de type Liouville si et seulement si le groupe d'holonomie projective de son diviseur exceptionnel est résoluble holomorphiquement normalisable. Le Théorème 2.2 suggère que la présence de compagnons force l'existence d'intégrales premières d'un certain type. Il n'en est pas toujours ainsi comme nous l'avons vu dans le cas selle-noeud. Nous présentons ici des exemples à réduction des singularités simples, et à "holonomie compliquée" avec présence de compagnons.

Proposition 4.1. *Il existe une 1-forme analytique réelle ω à l'origine de \mathbb{R}^2 , telle que :*

1. *chaque feuille du germe feuilletage $\mathcal{F}_\omega^\mathbb{R}$, induit par ω à l'origine de \mathbb{R}^2 , admet un compagnon non trivial,*

2. $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{R}}$ n'admet pas d'intégrale première de type Liouville.
3. $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}$ se désingularise en un éclatement, sans selle-noeud dans la résolution.

La preuve de la proposition ci-dessus est constructive ; elle utilise le résultat suivant :

Lemme 4.1. *Il existe deux germes de difféomorphismes holomorphes à l'origine de \mathbb{C} , périodiques d'ordre 4, g_1 et g_2 tels que :*

1. le groupe G engendré par g_1 et g_2 est non résoluble,
2. $g_1^{-1}(z) = \sigma \circ g_2 \circ \sigma(z)$.

Preuve. Soient $\varphi(z) = z + z^2 + iz^3$ et $\theta(z) = iz$. Posons $g_1 = \varphi^{-1} \circ \theta \circ \varphi$, $\psi = \sigma \circ \varphi \circ \sigma$ et $g_2 = \psi^{-1} \circ \theta \circ \psi$. Par construction g_1 et g_2 sont des difféomorphismes périodiques d'ordre 4. En outre on a :

$$\begin{aligned}
\sigma \circ g_2^{-1} \circ \sigma &= \sigma \circ (\psi^{-1} \circ \theta \circ \psi) \circ \sigma \\
&= \sigma \circ \psi^{-1} \circ \sigma \circ (\sigma \circ \theta \circ \sigma) \circ \sigma \circ \psi \circ \sigma \\
&= \varphi^{-1} \circ \theta \circ \varphi \\
&= g_1
\end{aligned}$$

Le groupe G contient deux éléments tangents à l'identité à des ordres différents. En effet on a :

$$\begin{aligned}
g_1(z) &= iz + (1+i)z^2 - 2iz^3 + (i-7)z^4 + h.o.t. \\
g_1^2(z) &= -z - 2z^2 - 4z^3 + (-12+6i)z^4 + h.o.t. \\
g_2(z) &= iz + (1+i)z^2 + (4-2i)z^3 + (-1-13i)z^4 + h.o.t. \\
g_2^2(z) &= -z - 2z^2 - 4z^3 + (-12-6i)z^4 + h.o.t. \\
g_2^2 \circ g_1^2(z) &= z - 12iz^4 + h.o.t. \\
g_2^3 \circ g_1(z) &= z + 4iz^3 + h.o.t.
\end{aligned}$$

L'existence dans G de deux éléments tangents à l'identité à des ordres différents implique, d'après [Ce-Mo], que G est non résoluble. \square

Preuve de la Proposition 4.1. Soit $\Pi : \tilde{\mathbb{C}}_0^2 \rightarrow \mathbb{C}_0^2$ le morphisme d'éclatement de l'origine de \mathbb{C}^2 muni cartes (z_1, t) et (s, z_2) liées par les relations $z_2 = tz_1$ et $st = 1$. Considérons un lacet γ_0 (resp. γ_1, γ_2) dans le diviseur exceptionnel $\Pi^{-1}\{(0, 0)\}$ de point de base $(z_1 = 0, t = 0)$ et d'indice 1 autour de P_0 (resp. P_1, P_2) de coordonnées $(0, -1)$ (resp. $(0, \exp(\frac{2\pi i}{3}), (0, \exp(\frac{-2\pi i}{3}))$) dans la carte (z_1, t) . Posons :

$$h_1(z) = [g_1(z^4)]^{\frac{1}{4}}, \quad h_2(z) = [g_2(z^4)]^{\frac{1}{4}}, \quad h_0 = h_1^{-1} \circ h_2^{-1}$$

où on a considéré une détermination de $z^{\frac{1}{4}}$ pour laquelle $(z^{\frac{1}{4}})^4 = iz$, g_1 et g_2 étant les éléments de $Diff(\mathbb{C}, 0)$ construits dans le lemme précédent. Par construction on a :

$$h_1^{-1} = \sigma \circ h_2 \circ \sigma \text{ et } h_0^{-1} = \sigma \circ h_0 \circ \sigma.$$

D'après une version réelle du Théorème de synthèse de A. Lins Neto [L], [G] [Be-Ce-L], il existe un germe 1-forme analytique réelle ω , à l'origine de \mathbb{R}^2 , qui vérifie :

1. les singularités de $\tilde{\mathcal{F}}_\omega^{\mathbb{C}}$, éclaté strict du feuilletage $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}$ par Π , sont P_0 , P_1 et P_2 ,
2. les séparatrices de $\tilde{\mathcal{F}}_\omega^{\mathbb{C}}$ sont $t = -1$, $t = \exp(\frac{2\pi i}{3})$, $t = \exp(\frac{-2\pi i}{3})$, et le diviseur exceptionnel,
3. $\tilde{\mathcal{F}}_\omega^{\mathbb{C}}$ a toutes ses singularités réduites,
4. le difféomorphisme d'holonomie, évalué sur la transversale $t = 0$ et associé au lacet $\gamma_i \subset \Pi^{-1}\{(0, 0)\} \setminus \{P_0, P_1, P_2\}$, est h_i , $i = 0, 1, 2$.

Par construction le groupe d'holonomie projective H de $\tilde{\mathcal{F}}_\omega^{\mathbb{C}}$ est un revêtement ramifié de G ; il est donc non résoluble. D'après [Be-Ce-L], [P], $\tilde{\mathcal{F}}_\omega^{\mathbb{C}}$ et par suite ω n'admet pas d'intégrale première de type Liouville. La droite $x_2 = -x_1$, image de $t = -1$ par Π , est une séparatrice de ω qui divise tout polydisque U de \mathbb{R}^2 centré en $(0, 0)$, assez petit en trois composantes connexes : $U \cap \{x_2 > -x_1\}$, $U \cap \{x_2 < -x_1\}$ et $U \cap \{x_2 = -x_1\}$. Par le choix de la détermination de $z^{\frac{1}{4}}$, on a :

$$h_1^8(z) = -z.$$

On en déduit que les feuilles de $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{R}}$, passant par les points $(x_1, 0)$ et $(h_1^8(x_1), 0)$, pour x_1 assez petit, qui sont contenues dans la même feuille complexe, se trouvent de part et d'autre de la séparatrice $x_1 = -x_2$.; elles ne sont donc pas identiques. Par conséquent chaque feuille de $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{R}}$ admet un compagnon non trivial. \square

Le feuilletage ci-dessus, ainsi construit, n'est pas monodromique; l'obstruction est due à la présence d'une séparatrice réelle ($x_1 = -x_2$). Son type topologique est donné par la figure suivante. Le résultat ci-dessous montre que, dans le cas des feuilletages à configuration centrale, c'est à dire dont les feuilles sont homéomorphes à des cercles, la présence de compagnons non triviaux, n'implique pas non plus, systématiquement, l'existence d'intégrale première de type Liouville; il donne une indication sur la complexité des compagnons.

Proposition 4.2. *Il existe un germe de 1-forme analytique réelle ω , à configuration centrale, à l'origine de \mathbb{R}^2 tel que :*

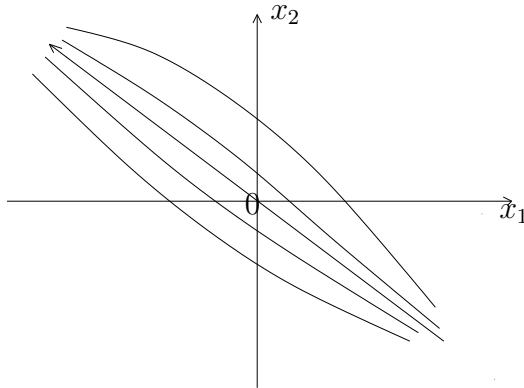


FIG. 3 – Allure du portrait des phases

1. $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{R}}$ n'admet pas d'intégrale première de type Liouville,
2. chaque feuille de $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{R}}$ admet une infinité dénombrable et dense de compagnons non triviaux.

Preuve. La construction suit la même idée que la précédente. Considérons les difféomorphismes holomorphes l_1 , l_2 et l_3 définis comme suit :

$$l_1(z) = \frac{z}{1+z}, \quad l_2(z) = \frac{z}{1+z^2}, \quad \text{et } l_3(z) = -l_1^{-1} \circ l_2^{-1}(z).$$

Par construction on a :

$$l_3 \circ l_2 \circ l_1(z) = -z.$$

D'après le Théorème 2.3 [Be-Ce-L] il existe un germe de 1-forme monodromique ω qui possède les propriétés suivantes :

1. l'application premier retour de Poincaré, représentée sur la transversale $t = 0$, est holomorphiquement conjuguée à $l = l_3 \circ l_2 \circ l_1$,
2. la réduction minimale des singularités de $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}$ se fait en un éclatement,
3. le groupe d'holonomie projective H de $\Pi^{-1}\{(0,0)\} \setminus \text{Sing}\tilde{\mathcal{F}}_\omega^{\mathbb{C}}$ est engendré par l_1, l_2, l_3, k_1, k_2 et k_3 , où $k_i = \sigma \circ l_i \circ \sigma$ pour $i = 1, 2, 3$.

La 1-forme ω est à configuration centrale car son application premier retour de Poincaré est donné par $l \circ l$ qui est l'identité. Le groupe H est non résoluble puisqu'il contient l_1 et l_2 qui sont tangents à l'identité à des ordres différents. Par conséquent $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{R}}$ ne possède pas d'intégrale première de type Liouville. Soit U un voisinage ouvert, assez petit, de $(0,0)$, dans \mathbb{R}^2 , dont le bord est une feuille. Comme $\mathcal{F}_{\omega/U}^{\mathbb{R}}$ est à configuration centrale et que H contient le sous groupe non résoluble et réel $\langle l_1, l_2 \rangle$; on déduit, de ce qui précède et de [Na], que la feuille générique de $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{R}}$ admet une infinité dénombrable et dense de compagnons non triviaux.

5 Ensembles saturés $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$

5.1 Description de $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$ pour les formes normalisées

On décrit les ensembles saturés $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$ pour les singularités normalisées. Rappelons qu'un ensemble est dit Pfaffien s'il est une feuille d'un feuilletage analytique réel. On distingue les quatre cas suivants : hyperbolique linéaire, Poincaré-Dulac non linéarisable, selle-noeud, résonnant non linéarisable.

5.1.1 Cas linéaire hyperbolique

Ici $\omega = \lambda x_1 dx_2 + x_2 dx_1$, où $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Le champ dual $X = \lambda x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ a pour flot Φ_X défini par $\Phi_X(t, x_1, x_2) = (x_1 \exp(\lambda t), x_2 \exp(-t))$. L'ensemble $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$ est donné par :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2) &= \{(x_1 \exp(\lambda(u + iv)), x_2 \exp(-(u + iv))) : x_1, x_2, u, v \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x_1 \exp(\lambda iv), x_2 \exp(-iv)) : x_1, x_2, v \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

En posant $x_1 \exp(\lambda iv) = X_1 + iY_1$ et $x_2 \exp(-iv) = X_2 + iY_2$ on voit que :

$$\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2) = \{(X_1, Y_1, X_2, Y_2) : \arctan\left(\frac{Y_1}{X_1}\right) + \lambda \arctan\left(\frac{Y_2}{X_2}\right) = 0\}.$$

En différentiant et en multipliant par $(X_1^2 + Y_1^2)(X_2^2 + Y_2^2)$ on trouve que $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$ est une feuille du feuilletage défini par la 1-forme analytique Ω_1 :

$$\Omega = (X_2^2 + Y_2^2)(X_1 dY_1 - Y_1 dX_1) + \lambda(X_1^2 + Y_1^2)(X_2 dY_2 - Y_2 dX_2).$$

L'ensemble $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$ est donc Pfaffien. Il est non analytique lorsque λ est irrationnel. En effet fixons x_1 et x_2 dans $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. L'intersection de $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$ avec le tore complexe $\{(z_1, z_2) : |z_1| = x_1, |z_2| = x_2\}$ est la droite de pente irrationnelle $\{(x_1 \exp(\lambda iv), x_1 \exp(-iv)) : v \in \mathbb{R}\}$. On en déduit que $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$ est dense dans \mathbb{R}^4 . Lorsque λ est rationnel, $\lambda = \frac{p}{q}$, avec $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{Z}^*$, $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$ est une hypersurface algébrique donnée par $Im(z_2^p z_1^q) = 0$.

5.1.2 Cas Poincaré-Dulac non linéarisable

Le feuilletage est défini ici par la 1-forme $\omega = (x_2^p + x_1) p dx_2 - x_2 dx_1$, où $p \in \mathbb{N}^*$, dont la complexifiée admet pour intégrale première $\frac{z_1}{z_2^p} - p \log z_2$. L'ensemble $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$ est décrit par :

$$\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2) = \{(z_1, z_2) : Im\left(\frac{z_1}{z_2^p}\right) - p \arg z_2 = pk\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

En différentiant on voit que $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$ est une feuille du feuilletage défini à l'origine de \mathbb{R}^4 par la 1-forme méromorphe :

$$\Omega = dIm\left(\frac{z_1}{z_2^p}\right) - p\frac{x_2dy_2 - y_2dx_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

On en déduit que $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$ est Pfaffien non analytique. Lorsqu'en particulier $p = 1$, on a :

$$\Omega = d\left(\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right) - \frac{x_2dy_2 - y_2dx_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

5.1.3 Cas des selle-noeuds normalisés.

Dans ce cas le feuilletage est défini par la 1-forme $\omega_{p,\mu} = x_1^{p+1}dx_2 - x_2(1 + \mu x_1^p)dx_1$, où $\mu \in \mathbb{R}$. Son complexifié, $\omega_{p,\mu}^{\mathbb{C}} = z_1^{p+1}dz_2 - z_2(1 + \mu z_1^p)dz_1$, admet une intégrale première de type Liouville de la forme $\log z_2 + \frac{1}{pz_1^p} - \mu \log z_1$. L'ensemble $\mathcal{F}_{\omega_{p,\mu}^{\mathbb{C}}}^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$ s'écrit alors :

$$\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 / \arg z_2 + Im\left(\frac{1}{pz_1^p}\right) - \mu \arg z_1 = k_1\pi + k_2\mu\pi : k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

On en déduit que $\mathcal{F}_{\omega_{p,\mu}^{\mathbb{C}}}^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$ est une feuille du germe de feuilletage analytique réel à l'origine de \mathbb{R}^4 défini par :

$$\Omega = \frac{x_2dy_2 - y_2dx_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{1}{p}dIm\left(\frac{(x_1 - iy_1)^p}{(x_1^2 + y_1^2)^p}\right) - \mu\frac{x_1dy_1 - y_1dx_1}{x_1^2 + y_1^2}.$$

Ainsi $\mathcal{F}_{\omega_{p,\mu}^{\mathbb{C}}}^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$ est un ensemble Pfaffien non analytique.

5.1.4 Cas résonnant non linéarisable normalisé

Ici le feuilletage est donné par la 1-forme $\omega_{\frac{p}{q},k,\mu} = q[1 + \mu(x_1^p x_2^q)^k]x_1dx_2 + p[1 + (\mu - 1)(x_1^p x_2^q)^k]x_2dx_1$: $\mu \in \mathbb{R}$. Son complexifié, $\omega_{\frac{p}{q},k,\mu}^{\mathbb{C}}$, possède l'intégrale première de type Liouville $p \log z_1 - \mu p \log z_1 - \mu q \log z_2 + \frac{1}{k(z_1^p z_2^q)^k}$. Le saturé du plan réel, $\mathcal{F}_{\omega_{\frac{p}{q},k,\mu}^{\mathbb{C}}}^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$, se décrit comme suit :

$$\{(z_1, z_2) : p(1 - \mu) \arg z_1 - q\mu \arg z_2 + Im\left(\frac{1}{k(z_1^p z_2^q)^k}\right) = p(1 - \mu)k_1\pi - \mu q k_2\pi : k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

Comme dans le cas précédent, en différentiant, on montre que $\mathcal{F}_{\omega_{\frac{p}{q},k,\mu}^{\mathbb{C}}}^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$ est une feuille du feuilletage défini par :

$$\Omega = -\mu q \frac{x_2dy_2 - y_2dx_2}{x_2^2 + y_2^2} + dIm\left(\frac{1}{kz_1^p z_2^q}\right) + p(1 - \mu) \frac{x_1dy_1 - y_1dx_1}{x_1^2 + y_1^2}.$$

On en déduit que $\mathcal{F}_{\omega_{\frac{p}{q},k,\mu}^{\mathbb{C}}}^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$ est Pfaffien non analytique.

Remarque 5.1. *On voit que $\omega_{\frac{p}{q},k,\mu}$ est le pull-back de la forme normale formelle d'un selle-noeud par l'application $(x_1, x_2) \mapsto (x_1^p x_2^q, x_1^p)$. En utilisant le fait que pour cette dernière, le saturé de \mathbb{R}^2 par le feuilletage complexifié associé, est Pfaffien non analytique on montre ainsi, d'une autre façon, que $\mathcal{F}_{\omega_{\frac{p}{q},k,\mu}}^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$ est Pfaffien non analytique.*

5.2 Ensembles $\mathcal{F}_{\omega}^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$ et normalisation

Le résultat ci-dessous généralise le Théorème 1.2 donné dans l'introduction. On note que les hypothèses sont plus faibles.

Théorème 5.1. *Soit $\mathcal{F}_{\omega}^{\mathbb{R}}$ un germe de feuilletage analytique à l'origine de \mathbb{R}^2 , défini par une 1-forme analytique ω . Si le 1-jet de ω est égal à $qx_1 dx_2 + px_2 dx_1$, où $p \in \mathbb{Z}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$, et si $\mathcal{F}_{\omega}^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$ est une hypersurface analytique, $\mathcal{F}_{\omega}^{\mathbb{R}}$ possède une intégrale première analytique si p est positif, et à conjugaison analytique près une intégrale première du type $x_1^p x_2^q$ sinon.*

Preuve. Soit $(f = 0)$ une équation réduite de l'hypersurface $\mathcal{F}_{\omega}^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$. Supposons dans un premier temps que p est positif. Si ω n'était pas analytiquement linéarisable, il existerait d'après [Mar-Ra2], un difféomorphisme formel $\hat{\Phi}$, un entier non nul k et un réel μ tels que :

$$\hat{\Phi}^* \omega = \hat{U} \omega_{\frac{p}{q},k,\mu},$$

où \hat{U} est une unité formelle. Le difféomorphisme formel $\hat{\Phi}$ conjugue le saturé $\mathcal{F}_{\omega}^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$ à celui de la forme normale $\mathcal{F}_{\omega_{\frac{p}{q},k,\mu}}^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$; qui est de ce fait contenu dans l'hypersurface formelle définie par $(f \circ \hat{\Phi} = 0)$. D'après le paragraphe 5.1.4 l'ensemble $\mathcal{F}_{\omega_{\frac{p}{q},k,\mu}}^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$ est une feuille d'un feuilletage analytique \mathcal{F} de $\mathbb{R}_{,0}^4$. L'hypersurface formelle $(f \circ \hat{\Phi} = 0)$ est donc une séparatrice de \mathcal{F} . Quitte à complexifier \mathcal{F} et $f \circ \hat{\Phi}$ un argument de convergence de série formelle [Théorème 1.1 Ce-Ma] assure que $f \circ \hat{\Phi}$ est nécessairement convergente. Comme on l'a vu l'ensemble $\mathcal{F}_{\omega_{\frac{p}{q},k,\mu}}^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$ est une hypersurface Pfaffienne non analytique. Si p est négatif et ω ne possède pas d'intégrale première du type $x_1^p x_2^q$, alors il existe un difféomorphisme holomorphe Φ tel que :

$$\Phi^* \omega = U((x_2^p + x_1) p dx_2 - x_2 dx_1),$$

où U est une unité holomorphe. En substituant Φ à $\hat{\Phi}$ et $(x_2^p + x_1) p dx_2 - x_2 dx_1$ à $\omega_{\frac{p}{q},k,\mu}$, on voit que ce cas ne se présente pas. \square

Remarque 5.2. *En adaptant la preuve du théorème précédent, on montre que si ω est un selle-noeud, alors $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$ n'est pas une hypersurface analytique.*

L'énoncé qui suit donne une interprétation géométrique de la convergence des normalisantes.

Théorème 5.2. *Soit $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{R}}$ un germe de feuilletage analytique à l'origine de \mathbb{R}^2 , défini par une 1-forme analytique de type hyperbolique ou selle-noeud ω . Si $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$ est Pfaffien, alors ω est soit linéarisable soit analytiquement conjuguée à sa forme normale formelle.*

Preuve. On peut supposer que $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$ n'est pas une hypersurface. Considérons un système de coordonnées analytiques réelles (x_1, x_2) tel que $x_2 = 0$ soit l'équation réduite d'une séparatrice (forte dans le cas selle-noeud). Soient ε un réel strictement positif et assez petit, Σ_ε la transversale à $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}$ définie par $(z_1 = \varepsilon)$, et h le difféomorphisme d'holonomie de la séparatrice $z_2 = 0$ évalué sur Σ_ε . D'après [Ma-Mo], [Ma-Ra1, 2], il suffit de montrer que h est ou bien linéarisable ou bien holomorphiquement conjugué à sa forme normale formelle.

Puisque $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$ est Pfaffien il existe un feuilletage analytique réel \mathcal{G} tel que $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$ en soit une feuille analytique. Ce dernier fait implique que les feuilles de \mathcal{G} contiennent celles de $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}$. En restreignant \mathcal{G} à Σ_ε , on obtient un germe de feuilletage analytique réel \mathcal{F}_ε , au point de coordonnées $(\varepsilon, 0)$, invariant par h . Soit ϖ_ε une 1-forme analytique réelle définissant \mathcal{F}_ε . Le difféomorphisme h s'écrit sous la forme $h(z_2) = \exp(2i\pi\lambda)z_2 + h.o.t.$, où λ est un réel. Lorsque λ est irrationnel le lemme suivant assure que h est linéarisable. Si λ est rationnel et h est périodique un résultat classique [Ma-Mo] implique que h est holomorphiquement linéarisable. Dans le cas où λ est rationnel et h n'est pas périodique, quitte à itérer h , on suppose qu'il est tangent à l'identité. D'après le Théorème de normalisation des difféomorphismes de \mathbb{C}_0 tangents à l'identité et laissant invariant un feuilletage (voir Appendice), h est holomorphiquement conjugué à sa forme normale formelle.

Lemme 5.1. *Soit $h(z_2) = \exp(2i\pi\lambda)z_2 + h.o.t.$, où λ est irrationnel. On suppose qu'il existe un feuilletage analytique réel \mathcal{F} qui est invariant par h . Alors h est holomorphiquement linéarisable.*

Nous allons donner une preuve de ce lemme qui nous a été suggérée par A. Lins Neto. Elle utilise le théorème des valeurs intermédiaires. Elle consiste à montrer que h admet un domaine invariant, ce qui implique d'après un résultat classique que h est linéarisable.

Preuve. Soient $\varpi = adx_2 + bdy_2$ une 1-forme à singularité isolée définissant \mathcal{F} et $\varpi^\perp = bdx_2 - adx_2$. Considérons un difféomorphisme formel $\hat{\varphi}$ qui conjugue h à sa partie linéaire :

$$x_2 + iy_2 = \hat{\varphi}(\hat{x}_2 + i\hat{y}_2) = P(\hat{x}_2, \hat{y}_2) + iQ(\hat{x}_2, \hat{y}_2),$$

où P et Q sont des séries formelles qui vérifient les conditions de Cauchy Riemann. Remarquons que puisque h est holomorphe, pour tout couple non nul de réels (α, β) , le feuilletage $\mathcal{F}^{\alpha, \beta}$ défini par $\alpha\varpi + \beta\varpi^\perp$ est invariant par h ; c'est une conséquence des conditions de Cauchy-Riemann. On a en effet les relations :

$$\hat{\varphi}^*\varpi = \left(a \circ \hat{\varphi} \frac{\partial P}{\partial \hat{x}_2} + b \circ \hat{\varphi} \frac{\partial Q}{\partial \hat{x}_2}\right) dx_2 + \left(a \circ \hat{\varphi} \frac{\partial P}{\partial \hat{y}_2} + b \circ \hat{\varphi} \frac{\partial Q}{\partial \hat{y}_2}\right) dy_2 = \hat{a}_1 d\hat{x}_2 + \hat{b}_1 d\hat{y}_2$$

$$\hat{\varphi}^*\varpi^\perp = \left(b \circ \hat{\varphi} \frac{\partial P}{\partial \hat{x}_2} - a \circ \hat{\varphi} \frac{\partial Q}{\partial \hat{x}_2}\right) dx_2 + \left(b \circ \hat{\varphi} \frac{\partial P}{\partial \hat{y}_2} - a \circ \hat{\varphi} \frac{\partial Q}{\partial \hat{y}_2}\right) dy_2 = \hat{b}_1 d\hat{x}_2 - \hat{a}_1 d\hat{y}_2.$$

En posant $\hat{l}_1 = \hat{x}_2 \hat{a}_1 + \hat{y}_2 \hat{b}_1$ et $\hat{l}_2 = -\hat{x}_2 \hat{b}_1 + \hat{y}_2 \hat{a}_1$ on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}^*\varpi &= \frac{\hat{l}_1}{\hat{x}_2^2 + \hat{y}_2^2} (\hat{x}_2 d\hat{x}_2 + \hat{y}_2 d\hat{y}_2) + \frac{\hat{l}_2}{\hat{x}_2^2 + \hat{y}_2^2} (\hat{y}_2 d\hat{x}_2 - \hat{x}_2 d\hat{y}_2) \\ \hat{\varphi}^*\varpi^\perp &= -\frac{\hat{l}_2}{\hat{x}_2^2 + \hat{y}_2^2} (\hat{x}_2 d\hat{x}_2 + \hat{y}_2 d\hat{y}_2) + \frac{\hat{l}_1}{\hat{x}_2^2 + \hat{y}_2^2} (\hat{y}_2 d\hat{x}_2 - \hat{x}_2 d\hat{y}_2). \end{aligned}$$

Si \hat{l}_2 (resp. \hat{l}_1) est identiquement nulle le feuilletage \mathcal{F} (resp. $\mathcal{F}^{0,1}$) admet une intégrale première de type Morse formelle. On en déduit qu'il admet une intégrale première de Morse convergente; et par suite h admet un domaine invariant. Dans la suite on suppose que ni \hat{l}_1 ni \hat{l}_2 n'est identiquement nulle. L'invariance de $\hat{\varphi}^*\mathcal{F}$ par $\hat{z}_2 \mapsto \exp(2i\pi\lambda)\hat{z}_2$ implique que $\frac{\hat{l}_1}{\hat{l}_2}(\hat{x}_2, \hat{y}_2) = \hat{l}(\hat{x}_2^2 + \hat{y}_2^2)$, où \hat{l} appartient au corps des fractions de $\mathbb{R}[[x]]$. En remplaçant, si nécessaire, \mathcal{F} par le feuilletage orthogonal $\mathcal{F}^{0,1}$, on suppose que \hat{l} est une série formelle. Quitte à considérer de nouveau le feuilletage $\mathcal{F}^{1, \hat{l}(0)}$ on se ramène au cas où $\hat{l}(0) = 0$. On en déduit que le 1-jet de ϖ s'écrit à isomorphisme linéaire près sous la forme $y_2 dx_2 - x_2 dy_2$ et celui de ϖ^\perp sous la forme $x_2 dx_2 + y_2 dy_2$. En particulier ϖ est linéarisable. Si ϖ^\perp est à configuration centrale, alors h admet un domaine invariant. Dans le cas contraire considérons un voisinage U de $(0, 0)$ assez petit et un point P de coordonnées $(x_2, 0)$ proche et distinct de $(0, 0)$. Puisque les feuilletages $\mathcal{F}^{\alpha, 1}$ sont monodromiques, la feuille de ce

feuilletage qui passe par P recoupe l'axe des x_2 une première fois en un point P_α de coordonnées $(h(\alpha, x_2), 0)$, $h(\alpha, x_2)$ dépendant analytiquement de α . Suivant que α tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ la feuille $\mathcal{F}^{\alpha,1}$ passant par P est attirée ou expulsée de U . On en déduit qu'il existe deux réels α_0 et α_1 tels que les points $(h(\alpha_0, x_2), 0)$ et $(h(\alpha_1, x_2), 0)$ se trouvent de part et d'autre de P . Le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe un orbite périodique pour $\mathcal{F}_\varepsilon^{\alpha_1,1}$; et donc un domaine invariant pour h . On aurait pu évoquer le Théorème de Poincaré-Andronov-Hopf [H-K] pour nous assurer d'une valeur de α pour laquelle il existe une orbite périodique. \square

La preuve du théorème précédent donne en fait l'énoncé suivant :

Corollaire 5.1. *Soit ω une 1-forme holomorphe réduite à l'origine de \mathbb{C}^2 . Si les feuilles de $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}$ sont contenues dans celles d'un feuilletage analytique réel à l'origine de $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{C}^2$, alors ω est holomorphiquement normalisable.*

Preuve. Il suffit de remarquer que le générateur d'holonomie, d'une séparatrice forte de $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}$, laisse invariant un feuilletage analytique réel à l'origine de \mathbb{R}^2 et procéder comme dans la preuve du Théorème 5.2.

Proposition 5.1. *Soit $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{R}}$ un germe de feuilletage analytique à l'origine de \mathbb{R}^2 , défini par une 1-forme analytique de type elliptique ω . Si $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$ est Pfaffien, alors ω est soit linéarisable soit analytiquement normalisable.*

Preuve. Soit $\Pi : \tilde{\mathbb{C}}_0^2 \rightarrow \mathbb{C}_0^2$ le morphisme d'éclatement de l'origine de \mathbb{C}^2 muni des cartes (z_1, t) et (s, z_2) . Considérons le lacet γ d'indice 1 autour de la singularité P , de coordonnées $(i, 0)$ dans la carte (s, z_2) , et de support $\tilde{\mathbb{R}}_0^2 \cap \Pi^{-1}\{(0, 0)\}$. Notons h le difféomorphisme d'holonomie, évalué sur la transversale $\Sigma : s = 1$, associé à γ . Dans la coordonnée z_2 , h s'écrit sous la forme $h(z_2) = \alpha z_2 + h.o.t.$, où α appartient à $]-\infty, 0[$. Si α est en plus différent de -1 un calcul élémentaire montre que le rapport des valeurs propres du 1-jet de $\omega^{\mathbb{C}}$ est non réel. On conclut alors, par Poincaré, que ω est analytiquement linéarisable. Si $\alpha = -1$ l'application premier retour de Poincaré s'écrit $h^2(z_2) = z_2 + h.o.t.$; s'il est l'identité on est en présence d'un centre analytique non dégénéré. Le Théorème de Poincaré-Lyapounov assure alors, que ω est analytiquement linéarisable. Dans le cas contraire h^2 est tangent à l'identité. Puisque $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$ est Pfaffien la restriction à Σ de son éclaté strict par Π définit un feuilletage invariant par h^2 . D'après ce qui précède h^2 est holomorphiquement normalisable. On en déduit, par suite, que le générateur d'holonomie de chacune des séparatrices de $\mathcal{F}_\omega^{\mathbb{C}}$ est holomorphiquement normalisable. Donc ω est analytiquement normalisable. \square

6 Appendice : Théorème de normalisation pour les difféomorphismes holomorphes par J. Ribón

Soit $Diff_1(\mathbb{C}, 0)$ le groupe formé par l'identité de \mathbb{C} et des éléments de $Diff(\mathbb{C}, 0)$ qui lui sont tangents. Considérons un élément φ de $Diff_1(\mathbb{C}, 0) \setminus \{Id\}$. Il s'écrit sous la forme $\varphi(z) = z + \sum_{j=\nu+1} a_j z^j$, où ν appartient à \mathbb{N} et $a_{\nu+1} \neq 0$. On définit :

$$D_s(\varphi) = \left\{ \lambda \in \mathbf{S}^1 : \frac{a_{\nu+1}}{|a_{\nu+1}|} \lambda^\nu = -s \right\}$$

pour $s \in \{-1, 1\}$ et $D(\varphi) = D_{-1}(\varphi) \cup D_1(\varphi)$. Une demi-droite $\lambda\mathbb{R}^+$ est préservée par $z + a_{\nu+1}z^{\nu+1}$ pour λ appartenant à $D(\varphi)$. Plus précisément $\lim_{k \rightarrow \infty} (z + a_{\nu+1}z^{\nu+1})_{|\lambda\mathbb{R}^+}^{sk} = 0$ si λ appartient à $D_s(\varphi)$. Le difféomorphisme φ est une petite déformation de $z + a_{\nu+1}z^{\nu+1}$. Etant donné un voisinage ouvert U de 0, on définit :

$$V_U(\lambda) = \left\{ z \in U \setminus \{0\} : \varphi^{js}(z) \in U \ \forall j \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ et } \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\varphi^{sj}, \frac{\varphi^{sj}}{|\varphi^{sj}|} \right) (z) = (0, \lambda) \right\}$$

pour λ appartenant à $D_s(\varphi)$. Les ouverts $V_U(\lambda)$ sont des pétales qui donnent la structure locale de φ en fleur. On supposera toujours que U est suffisamment petit. On a pour tout $\varepsilon > 0$:

- $\cup_{\lambda \in D(\varphi)} V_U(\lambda) \cup \{0\}$ est un voisinage de 0.
- $V_U(\lambda)$ contient un secteur $(0, \delta(\varepsilon))\lambda \exp(i(\frac{-\pi}{\nu+\varepsilon}, \frac{\pi}{\nu+\varepsilon}))$.
- $V_U(\lambda) \cap V_U(\lambda \exp(\frac{i\pi}{\nu}))$ contient un secteur $(0, \delta(\varepsilon))\lambda \exp(i\varepsilon, \frac{i\pi}{\nu+\varepsilon})$.
- $V_U(\lambda) \cap V_U(\mu) \neq \emptyset$ si et seulement si $\mu \in \{\lambda \exp(\frac{-i\pi}{\nu}), \lambda, \lambda \exp(\frac{i\pi}{\nu})\}$

Soit \hat{X} le générateur infinitésimal de φ , il est un champ de vecteurs formel, c'est-à-dire une dérivation de l'idéal maximal \hat{m} de $\mathbb{C}[[z]]$ tel que $\varphi = \exp(\hat{X})$. Notons $\hat{X} = \log \varphi$. Soit θ l'opérateur défini sur \hat{m} par :

$$g \rightarrow g \circ \varphi - g.$$

On a $\hat{X}(g) = \sum_j \frac{(-1)^{j+1} \theta^j(g)}{j}$ pour $g \in \hat{m}$; la série étant convergente pour la topologie de Krull. Etant donné un pétale $V_U(\lambda)$ de φ il existe un unique champ de vecteurs holomorphe $X_{\varphi, \lambda} \in \mathcal{H}(V_U(\lambda))$, qui ne dépend pas de U , tel que pour tout $\varepsilon > 0$ on a :

- $\varphi = \exp(X_{\varphi, \lambda})$,
- $\log \varphi$ est, dans les secteurs $(0, \delta(\varepsilon))\lambda \exp(i(\frac{-\pi}{\nu+\varepsilon}, \frac{\pi}{\nu+\varepsilon}))$, un développement ν -Gevrey de $X_{\varphi, \lambda}$.

En conséquence $\varphi^t = \exp(t \log \varphi)$ est un développement ν -Gevrey de $\exp(tX_{\varphi,\lambda})$ dans les secteurs $(0, \delta(\varepsilon)) \lambda \exp\left(\frac{-i\pi}{\nu+\varepsilon}, \frac{i\pi}{\nu+\varepsilon}\right)$ pour tout $\varepsilon > 0$ et $t \in \mathbb{C}$.

Théorème 6.1. *Soit $\varphi \in \text{Diff}_1(\mathbb{C}, 0) \setminus \{Id\}$. On suppose qu'il existe un germe de feuilletage analytique réel $\mathcal{F}_\omega^\mathbb{R}$, défini par une 1-forme à singularité isolée, tel que $\varphi^*\mathcal{F} = \mathcal{F}$. Alors φ est holomorphiquement normalisable.*

On remarque que φ est holomorphiquement normalisable si son générateur infinitésimal formel $\log \varphi$ est un champ de vecteurs holomorphe au voisinage de 0. Le lemme suivant est classique :

Lemme 6.1. *Soit φ un élément de $\text{Diff}_1(\mathbb{C}, 0) \setminus \{Id\}$. On a :*

$$\varphi^t(x_1, x_2) = \left(x_1 + \sum_{j+k \geq \nu+1} A_{j,k}^1(t) x_1^j x_2^k, x_2 + \sum_{j+k \geq \nu+1} A_{j,k}^2(t) x_1^j x_2^k\right)$$

pour $t \in \mathbb{R}$ où $A_{j,k}^l(t) \in \mathbb{R}[t]$ pour $j+k \geq \nu+1$ et $l \in \{1, 2\}$.

Lemme 6.2. *Soit φ un élément de $\text{Diff}_1(\mathbb{C}, 0) \setminus \{Id\}$ qui préserve le feuilletage analytique réel \mathcal{F}_ω . Alors $(\varphi^t)^*\omega \wedge \omega = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En particulier on a $L_{\Re(\log(\varphi))}\omega \wedge \omega = 0$, où $\Re(*)$ et $\Im(*)$ désignent respectivement les parties réelle et imaginaire du champ de vecteurs $* = (\Re(*) - i\Im(*))/2$.*

Preuve. La 2-forme $(\varphi^t)^*\omega \wedge \omega$ est de la forme :

$$\left(\sum_{j+k \geq 0} B_{j,k}(t) x_1^j x_2^k\right) dx_1 \wedge dx_2$$

où $B_{j,k}(t)$ appartient à $\mathbb{R}[t]$ pour $j+k \geq 0$. Le difféomorphisme φ préserve $\omega = 0$; on en déduit que $(\varphi^t)^*\omega \wedge \omega = 0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Chaque polynôme $B_{j,k}$ s'annule sur \mathbb{Z} , on obtient $(\varphi^t)^*\omega \wedge \omega = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. La définition de la dérivée de Lie $L_{\Re(\log \varphi)}\omega = \lim_{t \in \mathbb{R}, t \rightarrow 0} \frac{(\varphi^t)^*\omega - \omega}{t}$ implique que $L_{\Re(\log \varphi)}\omega \wedge \omega = 0$. \square

Remarque 6.1. *En général on a $L_{\Im(\log \varphi)}\omega \wedge \omega \neq 0$. Soit $\varphi = \exp\left(z^2 \frac{\partial}{\partial z}\right)$. Le flot complexe $\varphi^t(z) = \frac{z}{1-tz}$ satisfait $\left(\frac{-1}{z}\right) \circ \varphi^t = \frac{-1}{z} + t$ pour tout $t \in \mathbb{C}$. Le feuilletage \mathcal{F} d'intégrale première méromorphe*

$$\text{Re}\left(\frac{-1}{z}\right) + \left[\text{Im}\left(\frac{-1}{z}\right)\right]^2 = \frac{-x_1}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

est tel que $(\varphi^t)^*\omega \wedge \omega = 0$ pour $t \in \mathbb{R}$, mais $(\varphi^t)^*\omega \wedge \omega \neq 0$ pour $t \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Lemme 6.3. Soit φ un élément de $\text{Diff}_1(\mathbb{C}, 0) \setminus \{Id\}$ qui préserve le feuilletage analytique réel $\mathcal{F}_\omega^\mathbb{R}$. Alors on a $\exp(tX_{\varphi,\lambda})^*\omega \wedge \omega = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in D(\varphi)$.

Preuve. Fixons un réel t de \mathbb{R} et λ dans $D_s(\varphi)$. Le caractère Gevrey de $\exp(tX_{\varphi,\lambda})$ implique que $(\varphi^t)^*\omega$ est le développement asymptotique de $\exp(tX_{\varphi,\lambda})^*\omega$ dans les secteurs $(0, \delta(\varepsilon))\lambda \exp(\frac{-i\pi}{\nu+\varepsilon}, \frac{i\pi}{\nu+\varepsilon})$ pour tout $\varepsilon > 0$. En particulier $\exp(tX_{\varphi,\lambda})^*\omega \wedge \omega$ est plate, pour tout $\varepsilon > 0$, dans les secteurs $(0, \delta(\varepsilon))\lambda \exp(\frac{-i\pi}{\nu+\varepsilon}, \frac{i\pi}{\nu+\varepsilon})$; c'est une conséquence du Lemme 5.2. Posons $\omega = a(x_1, x_2)dx_1 + b(x_1, x_2)dx_2$ et $|\omega|(x_1, x_2) = a(x_1, x_2)^2 + b(x_1, x_2)^2$. Notons que l'ensemble $(|\omega| = 0)$ est contenu dans $\{(0, 0)\}$. Il existe alors $\beta \in \mathbb{R}^+$ tel que $|\omega|(x_1, x_2) \geq C_0|x_1, x_2|^\beta$ au voisinage de 0 pour un certain $C_0 > 0$. Le minimum des choix possibles de β est un exposant de Lojasiewicz. L'ordre de $\varphi(z) - z$ est plus grand que 1; on en déduit que $(\varphi^t)^*\omega$ est de la forme $\hat{h}_t\omega$ pour une certaine $\hat{h}_t \in \mathbb{R}[[x_1, x_2]]$ telle que $\hat{h}_t(0, 0) = 1$. Par conséquent, étant donné $\varepsilon > 0$ on a $|\exp(tX_{\varphi,\lambda})^*\omega|(x_1, x_2) \geq C_0|x_1, x_2|^\beta/2$ pour (x_1, x_2) assez proche de $(0, 0)$ dans le secteur $(0, \delta(\varepsilon))\lambda \exp(\frac{-i\pi}{\nu+\varepsilon}, \frac{i\pi}{\nu+\varepsilon})$. La discussion précédente implique que :

$$(1) \lim_{(x_1, x_2) \in \lambda \exp(\frac{-i\pi}{\nu+\varepsilon}, \frac{i\pi}{\nu+\varepsilon}), (x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{|i \frac{\partial}{\partial x_2} i \frac{\partial}{\partial x_1} (\exp(tX_{\varphi,\lambda})^*\omega \wedge \omega)|}{|\omega| |\exp(tX_{\varphi,\lambda})^*\omega|} (x_1, x_2) = 0,$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Soit $\alpha(x_1, x_2)$ l'angle entre l'espace tangent à ω et l'espace tangent à $\exp(tX_{\varphi,\lambda})^*\omega$ au point (x_1, x_2) . Le difféomorphisme φ préserve les feuilletages définis par ω et $\exp(tX_{\varphi,\lambda})^*\omega$. Comme φ est conforme on obtient $\alpha \circ \varphi = \alpha$. L'équation (1) est équivalente à la suivante :

$$\lim_{(x_1, x_2) \in \lambda \exp(\frac{-i\pi}{\nu+\varepsilon}, \frac{i\pi}{\nu+\varepsilon}), (x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)} \alpha(x_1, x_2) = 0.$$

On en déduit que $\lim_{j \rightarrow \infty} \alpha \circ \varphi^j = 0$ et donc $\exp(tX_{\varphi,\lambda})^*\omega \wedge \omega = 0$. \square

Lemme 6.4. Soit φ un élément de $\text{Diff}_1(\mathbb{C}, 0) \setminus \{Id\}$ qui préserve le feuilletage $\mathcal{F}_\omega^\mathbb{R}$. On fixe $\lambda \in D(\varphi)$. Alors il existe un voisinage U de 0 tel que les feuilletages associés aux champs de vecteurs $\Re(X_{\varphi,\lambda})$ et $\Re(X_{\varphi,\lambda \exp(i\pi/\nu)})$ coïncident dans $V_U(\lambda) \cap V_U(\lambda \exp(i\pi/\nu))$.

Preuve. Soit $Y_0 = b(x_1, x_2)\frac{\partial}{\partial x_1} - a(x_1, x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}$ un champ de vecteurs, à singularité isolé, induisant le feuilletage $\mathcal{F}_\omega^\mathbb{R}$. On définit Y_θ comme étant $\exp(i\theta)Y_0$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Plus précisément on a :

$$Y_\theta = (a(x_1, x_2) \sin \theta + b(x_1, x_2) \cos \theta) \frac{\partial}{\partial x_1} + (-a(x_1, x_2) \cos \theta + b(x_1, x_2) \sin \theta) \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Soit \mathcal{F}^θ le feuilletage induit par Y_θ . Le difféomorphisme φ est conforme et laisse invariant $\mathcal{F}_\omega^\mathbb{R}$; on en déduit que $\varphi^*\mathcal{F}^\theta = \mathcal{F}^\theta$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Notons $\lambda' = \lambda \exp(i\pi/\nu)$. Fixons un voisinage ouvert W de 0. On considère un autre voisinage ouvert U de 0, contenu dans W , tel que $\exp(tX_{\varphi,\mu})(x_1, x_2)$ est bien défini et appartient à W pour tout $\mu \in \{\lambda, \lambda'\}$, tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $(x_1, x_2) \in V_U(\lambda) \cap V_U(\lambda')$. On fixe $(x_1, x_2) \in V_U(\lambda) \cap V_U(\lambda')$. Soit \mathcal{L}_μ la trajectoire de $\Re(X_{\varphi,\mu})$ qui passe par (x_1, x_2) pour $\mu \in \{\lambda, \lambda'\}$. Il suffit de prouver que $\mathcal{L}_\lambda = \mathcal{L}_{\lambda'}$. Il existe $\theta(\mu) \in [0, \pi)$ tel que $Y_{\theta(\mu)}$ est tangent à $\Re(X_{\varphi,\mu})$ au point (x_1, x_2) pour $\mu \in \{\lambda, \lambda'\}$. L'application $\exp(tX_{\varphi,\mu})$ préserve les feuilletages donnés par $\Re(X_{\varphi,\mu})$ et $Y_{\theta(\mu)}$ pour $\mu \in \{\lambda, \lambda'\}$ et $t \in \mathbb{R}$ d'après le lemme 6.3. Cela implique que \mathcal{L}_μ est tangent à $Y_{\theta(\mu)}$ à tout point de \mathcal{L}_μ . En particulier on obtient que \mathcal{L}_μ est une feuille de $Y_{\theta(\mu)}$ pour tout $\mu \in \{\lambda, \lambda'\}$. Il suffit de montrer que $\theta(\lambda) = \theta(\lambda')$.

On suppose que $\theta(\lambda) \neq \theta(\lambda')$. L'ensemble $\mathcal{L}_\lambda \cup \{0\}$ est une courbe fermée et simple, elle définit deux régions. Les champs $Y_{\theta(\lambda)}$ et $Y_{\theta(\lambda')}$ sont transverses en dehors de l'origine. On en déduit que le champ $Y_{\theta(\lambda')}$ pointe toujours soit vers l'intérieur, soit vers l'extérieur à \mathcal{L}_λ . Ceci implique que $\# \mathcal{L}_{\theta(\lambda)} \cap \mathcal{L}_{\theta(\lambda')} = 1$. Ce qui contredit le fait que $\varphi^j(x_1, x_2)$ appartient à $\mathcal{L}_{\theta(\lambda)} \cap \mathcal{L}_{\theta(\lambda')}$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$. \square

Preuve du Théorème 5.1. On fixe un ouvert U contenant 0. Soit ψ_λ une fonction holomorphe telle que $X_{\varphi,\lambda}(\psi_\lambda) = 1$ dans $V_U(\lambda)$ pour $\lambda \in D(\varphi)$. Les applications :

$$\phi_\lambda = \exp(2i\pi z) \circ \psi_{\lambda \exp(i\pi/\nu)} \circ \psi_\lambda^{-1} \circ \frac{1}{2i\pi} \log(z)$$

pour $\lambda \in D(\varphi)$, donnent la collection d'applications de recollement des chapelets de spheres de Martinet-Ramis. L'application ϕ_λ est un germe de difféomorphisme analytique complexe soit en $0 \in \mathbb{C}$ si $\lambda \in D_{-1}(\varphi)$, soit en $\infty \in \mathbf{P}^1$ si $\lambda \in D_1(\varphi)$. Les trajectoires de $\Re(X_{\varphi,\lambda})$ sont de la forme $\text{Im}g(\psi_\lambda) = 0$, en conséquence $|\phi_\lambda|(z)$ est une fonction de $|z|$ pour tout $\lambda \in D(\varphi)$. On en déduit que ϕ_λ est une application linéaire pour tout $\lambda \in D(\varphi)$. Tous les recollements étant linéaires le difféomorphisme φ est analytiquement normalisable. \square

7 Bibliographie

1. [B-Go] D. Burns, X. Gong : Singular Levi-flat real analytic hypersurfaces. Amer. J. Math., 121, 1999, pages 23-53.
2. [Be-Ce-L] M. Berthier, D. Cerveau et A. Lins Neto : Sur les feuilletages analytiques réels et le problème du centre. J. of Differential Equation, Vol. 131, n°2, 1996, pages 244-266.
3. [Ce-Ma] D. Cerveau, J. F. Mattei : Formes intégrables holomorphes singulières. Astérisque 97.
4. [Ce-Mo] D. Cerveau, R. Moussu : Groupes d'automorphismes de $(\mathbb{C}, 0)$ et équations différentielles $ydy + \dots = 0$. Bull. Soc. Math. France 116, 1988, pages 459-488.
5. [G] D. Garba Belko : Analytic foliation and center problem. Hokkaido Math. J., Vol. 30, 3, 1999, pages 519-536.
6. [H-K] J. Hale, H. Koçak : Dynamics and Bifurcations. Springer-Verlag, 1991.
7. [H-K-M] M. Hukuhara, T. Kimura, T. Matuda : Equations différentielles ordinaires du premier ordre dans le champ complexe. Publ. Math. Soc. Japon, Vol. 7, 1961.
8. [Lo] F. Loray : Feuilletages holomorphes à holonomie résoluble. Thèse, Université de Rennes1, 1994, pages 1-126.
9. [Ma-Mo] J. F. Mattei, R. Moussu : Holonomie et intégrales premières. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., tome 13, 1980, pages 469-523.
10. [Mar-Ra1] J. Martinet, J. P. Ramis : Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., tome 16, 1983, pages 571-621.
11. [Mar-Ra2] J. Martinet, J. P. Ramis : Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 55, 1982, pages 63-124.
12. [Na] I. Nakai : The classification of curvilinear angles in the complex plane and the group of \pm holomorphic diffeomorphism. Ann. Fac. Sci. Toulouse Math., 6, 7, n°2, 1998, pages 313-334.
13. [P] E. Paul : Feuilletages holomorphes singuliers à holonomie résoluble. J. Reine Angew. Math., 514, 1999, pages 9-70.
14. [Tré] J. M. Trépeau : Discrimination analytique des difféomorphismes résonnants de $(\mathbb{C}, 0)$ et réflexion de Schwartz. Astérisque n°284, 2003, pages 271-319.