
Produits scalaires pseudo-euclidiens

1 Formes bilinéaires et quadratique

1.1 Définition

On se place sur un espace vectoriel réel E de dimension finie n .

Définition 1 — Une application $\phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée forme bilinéaire symétrique sur E si elle est linéaire en chacune de ses variables et vérifie

$$\phi(x, y) = \phi(y, x) \quad \forall x, y \in E. \quad (1)$$

Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique sur E . On définit sur E une fonction Q_ϕ par

$$Q_\phi(x) = \phi(x, x) \quad \forall x \in E. \quad (2)$$

On dit que Q_ϕ est la *forme quadratique* associée à ϕ et que ϕ est la *forme polaire* de Q_ϕ .

Comme ϕ et Q_ϕ sont reliés par la relation

$$\phi(x, y) = \frac{1}{4}(Q_\phi(x + y) - Q_\phi(x - y)) \quad \forall x, y \in E \quad (3)$$

il y a unicité de la forme polaire.

Exemples : Le produit scalaire canonique

$$((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \mapsto x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

est une forme bilinéaire symétrique sur \mathbb{R}^n . L'application

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1 y_2 + y_1 x_2$$

en est une sur \mathbb{R}^2 qui a un comportement bien différent : sa forme quadratique est donnée par $q(x_1, x_2) = 2x_1 x_2$, certains vecteurs ont donc une image nulle ou négative.

1.2 représentation matricielle

Définition 2 — Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On note $\phi_{i,j} = \phi(e_i, e_j)$, la matrice $n \times n$ dont ce sont les coefficients est notée $M_{\mathcal{B}}^{\phi}$ et appelée matrice de ϕ dans la base \mathcal{B} .

Comme ϕ est symétrique, $M_{\mathcal{B}}^{\phi}$ l'est également.

Si X et Y sont les vecteurs colonne de \mathbb{R}^n exprimant les coordonnées dans la base \mathcal{B} de vecteurs $x = \sum x_i e_i$, $y = \sum y_i e_i$ de E , la bilinéarité de ϕ entraîne :

$$\phi(x, y) = {}^t X M_{\mathcal{B}}^{\phi} Y = \sum_{i,j} \phi_{i,j} x_i y_j. \quad (4)$$

donc $M_{\mathcal{B}}^{\phi}$ détermine entièrement ϕ . C'est la seule matrice vérifiant (4) pour tous les couples de vecteurs de E .

Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une autre base de E , $P \in GL(n, \mathbb{R})$ la matrice de changement de base de \mathcal{B} à \mathcal{B}' et X' les coordonnées de x dans \mathcal{B}' , de sorte que $X = P X'$.

On a alors $\phi(x) = {}^t X M_{\mathcal{B}}^{\phi} Y = {}^t X' {}^t P M_{\mathcal{B}}^{\phi} P X'$ donc :

$$M_{\mathcal{B}'}^{\phi} = {}^t P M_{\mathcal{B}}^{\phi} P. \quad (5)$$

Ainsi, le rang de $M_{\mathcal{B}}^{\phi}$ ne dépend pas de \mathcal{B} .

Le déterminant de $M_{\mathcal{B}}^{\phi}$, lui, dépend de \mathcal{B} mais pas son signe ($\in \{-1, 0, 1\}$) qu'on appelle parfois *discriminant* de ϕ .

L'expression (4) montre qu'une forme quadratique est toujours (et en toute base) un polynôme homogène de degré 2 en les coordonnées du vecteur considéré.

Inversement l'identité de polarisation (3) permet de voir que tout polynôme homogène de degré 2 est une forme quadratique.

2 Description des produits scalaires

2.1 Définition

Définition 3 — Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique sur E dont on note Q la forme quadratique. On dit que ϕ est :

- positive [négative] si $Q(x) \geq 0$ [≤ 0] pour tout $x \in E$;
- définie positive [définie négative] si $Q(x) > 0$ [< 0] pour tout $x \neq 0$;
- non dégénérée si aucun vecteur $x \neq 0$ ne vérifie $\phi(x, y) = 0 \quad \forall y \in E$.

On appelle produit scalaire (pseudo-euclidien) une forme bilinéaire symétrique non dégénérée.

On appelle produit scalaire euclidien un produit scalaire qui est défini positif. Dans la littérature, la terminologie peut varier, il est donc important de noter qu'ici « produit scalaire » signifie seulement « forme bilinéaire symétrique non dégénérée ».

Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique sur E .

On dit que ϕ est *définie* si elle est définie positive ou définie négative, qu'elle est *semi définie* si elle est positive ou négative.

Il faut noter que ϕ est non dégénérée si et seulement si elle est de rang n , *i.e.* si son discriminant est non nul. Si ϕ est définie, elle est nécessairement non dégénérée.

Si ϕ est définie, positive ou négative, et si F est un sous-espace de E , la restriction de ϕ à $F \times F$ notée $\phi|_F$ garde cette propriété. Mais si ϕ est non dégénérée, il peut très bien exister un sous-espace F de E tel que $\phi|_F$ soit dégénérée (il y en a même toujours si ϕ n'est pas définie : l'espace engendré par un vecteur non nul vérifiant $Q(x) = 0$ en est un exemple). Ainsi un produit scalaire non euclidien n'induit pas un produit scalaire sur tous les sous-espace de E . On introduit en conséquence la terminologie suivante.

Définition 4 — On dit d'un sous-espace où la restriction de ϕ est non dégénérée qu'il est non dégénéré.

De même, on dit d'un espace où la restriction de ϕ est définie positive, définie négative, positive ou négative qu'il est lui-même respectivement défini-positif, défini-négatif, positif ou négatif.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz $\phi(x, y)^2 \leq Q(x)Q(y)$ et l'inégalité triangulaire $Q(x + y)^{\frac{1}{2}} \leq Q(x)^{\frac{1}{2}} + Q(y)^{\frac{1}{2}}$, connues dans le cas euclidien, se prolongent au cas positif mais pas au cas général.

2.2 Orthogonalité et isotropie

Définition 5 — Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique sur E et x, y des vecteurs. On dit que x et y sont orthogonaux et on note $x \perp y$ si $\phi(x, y) = 0$.

Un vecteur est dit *isotrope* s'il est orthogonal à lui-même.

L'ensemble des vecteurs isotropes est appelé *cône isotrope* de ϕ .

L'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de E est appelé le *noyau* de ϕ .

La relation d'orthogonalité est bien entendu symétrique.

Le cône isotrope est réduit à 0 si et seulement si ϕ est définie. Le noyau est réduit à 0 si et seulement si ϕ est non dégénérée.

Définition 6 — Soient F et I des sous-espaces de E . On dit que F et I sont orthogonaux et on note $F \perp I$ si tout vecteur de l'un est orthogonal à tous les vecteurs de l'autre.

On appelle orthogonal de F et on note F^\perp l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de F .

On dit de F qu'il est totalement isotrope s'il est inclus dans le cône isotrope.

Ainsi le noyau de ϕ n'est rien d'autre que E^\perp .

La bilinéarité de ϕ fait de l'orthogonal de F un sous-espace vectoriel de E , mais en général ce n'est pas un supplémentaire de F . On garde tout de même du cas euclidien le résultat suivant.

Lemme 7 — Si ϕ est un produit scalaire et si F est un sous-espace de E , on a $\dim F + \dim F^\perp = n$ et $(F^\perp)^\perp = F$.

DÉMONSTRATION : Soit (e_1, \dots, e_k) une base de F que l'on complète en une base (e_1, \dots, e_n) de E . Un vecteur $\sum x_i e_i$ est orthogonal à F si et seulement si il vérifie

$$\sum_{j=1}^n \phi_{i,j} x_j = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq k$$

qui est un système linéaire de rang k car ϕ étant non dégénéré sa matrice est inversible. Donc la dimension de F^\perp est $n - k$ où k est la dimension de F .

Il est clair que $F \perp F^\perp$, donc $F \subseteq (F^\perp)^\perp$. Mais $\dim (F^\perp)^\perp = n - (n - \dim F) = \dim F$ donc en fait $F = (F^\perp)^\perp$. ■

Lemme 8 — Soit ϕ un produit scalaire sur E et F un sous-espace. Alors F est non dégénéré si et seulement si $E = F \oplus F^\perp$. De plus F est non dégénéré si et seulement si F^\perp l'est.

DÉMONSTRATION : Comme $\dim F + \dim F^\perp = n$, $E = F \oplus F^\perp$ si et seulement si $F \cap F^\perp = 0$, donc si et seulement si il n'y a aucun vecteur non nul de F orthogonal à tous les vecteurs de F , ce qui est la définition d'un sous-espace non-dégénéré.

Enfin, comme $(F^\perp)^\perp = F$, F est non dégénéré si et seulement si F^\perp l'est. ■

2.3 Bases orthonormales

Soit ϕ une forme bilinéaire. On appelle *carré* de x le nombre $\phi(x, x)$. On appelle *norme* de x le nombre $|\phi(x, x)|^{1/2}$. Cette appellation est abusive, puisqu'en général ce n'est pas une norme. Un vecteur est *unitaire* s'il est de norme 1.

On dit d'une famille de vecteurs de E qu'elle est *orthogonale* si les vecteurs qui la composent sont deux à deux orthogonaux. Si ϕ est un produit scalaire et si de plus les vecteurs sont unitaires, on dit que la famille est *orthonormale*.

Dans le cas pseudo-euclidien, on voit facilement qu'une famille orthonormale est toujours libre. Ainsi on appelle *base orthonormale* une famille orthonormale à n éléments.

Proposition 9 — *Tout produit scalaire admet une base orthonormale.*

DÉMONSTRATION : Soit ϕ un produit pseudo-euclidien. Comme ϕ est une forme bilinéaire non dégénérée, il existe un vecteur e_1 tel que $\phi(e_1, e_1) \neq 0$. Quitte à remplacer e_1 par un de ses multiples on peut supposer que e_1 est unitaire.

Raisonnons par récurrence sur la dimension n de E . Si E est de dimension 1, (e_1) en est une base, orthonormale pour ϕ . Si E est de dimension au moins 2, comme l'espace $\langle e_1 \rangle$ engendré par e_1 est non dégénéré, d'après le lemme 8 l'espace $\langle e_1 \rangle^\perp$ est non-dégénéré et $E = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_1 \rangle^\perp$. Alors $\phi|_{\langle e_1 \rangle^\perp}$ est un produit pseudo-euclidien de dimension $n - 1$. Par hypothèse de récurrence il existe une base orthonormale (e_2, \dots, e_n) de $\langle e_1 \rangle^\perp$, et (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormale de E . ■

On voit de la même manière que toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale car elle engendre un sous-espace non dégénéré.

Soit (e_1, \dots, e_n) une base orthonormale pour ϕ . La matrice de ϕ dans cette base a pour coefficients $\phi_{i,j} = \phi(e_i, e_j) = \delta_i^j \varepsilon_j$ où δ_i^j vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon et $\varepsilon_j = \phi(e_j, e_j) = \pm 1$. Elle est donc diagonale et tous ses coefficients diagonaux valent plus ou moins 1.

On note p le nombre de 1 et q le nombre de -1 qui apparaissent parmi les ε_j . Le couple (p, q) est appelé *signature* de ϕ .

Lemme 10 — *La signature de ϕ est bien définie, c'est-à-dire ne dépend pas de la base orthonormale considérée.*

DÉMONSTRATION : Supposons qu'il existe une base orthonormée (e'_1, \dots, e'_n) pour laquelle ϕ a une signature $(p', q') \neq (p, q)$.

Comme $p+q = p'+q' = n$, on aurait $p' > p$ ou $q' > q$. Quitte à considérer $-\phi$, on peut supposer $p' > p$.

Alors il existe un sous-espace E'_+ de dimension p' sur lequel ϕ est définie positive et un sous-espace E_- de dimension $n - p$ sur lequel ϕ est définie négative. Comme $p' + n - p > n$, $E'_+ \cap E_- \neq 0$ et il existe un vecteur x tel que $\phi(x, x)$ est à la fois strictement positif et strictement négatif, ce qui est absurde. ■

Finalement, ce qui précède permet d'établir le résultat suivant.

Théorème 1 — *Soit ϕ un produit pseudo-euclidien. Alors il existe une unique paire d'entiers (p, q) , appelée signature de ϕ , telle qu'il existe une base \mathcal{B} de E dans laquelle la matrice de ϕ soit*

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} \quad (6)$$

où I_k désigne la matrice unité de dimension k .

Remarque : On s'est limité au cas non dégénéré, mais on pourrait énoncer un résultat similaire pour une forme bilinéaire symétrique quelconque : il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale avec des coefficients diagonaux égaux à 1, -1 ou 0. La signature comporte alors trois nombres p, q, r donnant respectivement le nombre de 1, de -1 et de 0 sur la diagonale. Le rang de la forme bilinéaire considérée est $p + q$ et c'est un produit scalaire si et seulement si $r = 0$.

2.4 Traduction dans l'écriture polynômiale

Soit ϕ un produit scalaire, Q sa forme quadratique, $(e_i)_i$ une base ortho-normale. On note comme précédemment $\varepsilon_i = Q(e_i) = \pm 1$.

Pour tout vecteur $x \in E$, comme ϕ est non dégénéré et que pour tout j on a $\phi(x - \sum \varepsilon_i \phi(x, e_i) e_i, e_j) = 0$,

$$x = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \phi(x, e_i) e_i \quad (7)$$

Ainsi on a

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \phi(x, e_i)^2 \quad (8)$$

et on voit que la forme quadratique de ϕ s'écrit sous la forme $Q = \sum \pm l_i^2$ où les l_i forment une base du dual E^* de E . Autrement dit, il existe une base de E dans laquelle on peut écrire $Q(x) = \sum \pm x_i^2$ où les x_i sont les coordonnées de x dans la base en question.

Donnons une méthode pratique pour établir une telle écriture à partir de la donnée de Q . Dans une base $\mathcal{B} = (e_i)_i$ quelconque, on peut écrire $Q(x)$ sous la forme d'un polynôme homogène de degré 2 en (x_1, \dots, x_n) , les coordonnées de x dans \mathcal{B} .

Si $Q(x)$ admet un terme carré, de la forme ax_i^2 , on écrit (en se plaçant dans le cas $i = 1$ pour simplifier l'écriture)

$$Q(x) = ax_1^2 + x_1 P_1(x_2, \dots, x_n) + Q'(x_2, \dots, x_n)$$

où P_1 est un polynôme homogène de degré 1 donc représente une forme linéaire et $Q'(x)$ est un polynôme homogène de degré 2 en x_2, \dots, x_n donc représente une forme quadratique sur l'espace engendré par e_2, \dots, e_n . On écrit ensuite

$$Q(x) = \frac{a}{|a|} \left(\sqrt{|a|} x_1 + \frac{\sqrt{|a|}}{2a} P_1(x_2, \dots, x_n) \right)^2 - \frac{1}{4a} P_1(x_2, \dots, x_n)^2 + Q'(x_2, \dots, x_n)$$

où on observe que $\frac{a}{|a|} = \pm 1$, $\sqrt{|a|} x_1 + \frac{\sqrt{|a|}}{2a} P_1(x_2, \dots, x_n)$ est une forme linéaire sur E , $-\frac{1}{4a} P_1(x_2, \dots, x_n)^2 + Q'(x_2, \dots, x_n)$ est une forme quadratique sur le sous-espace engendré par e_2, \dots, e_n . Il suffit ensuite d'itérer le procédé.

Si $Q(x)$ n'admet pas de terme carré et est non nul, il admet un terme rectangle de la forme $bx_i x_j$. On effectue alors le changement de variable $y = \frac{x_i + x_j}{2}$, $z = \frac{x_i - x_j}{2}$, ce qui revient à se placer dans la base obtenue à partir de \mathcal{B} en remplaçant e_i par $e_i + e_j$ et e_j par $e_i - e_j$. L'expression de $Q(x)$ dans la nouvelle base présente alors un terme carré by^2 et on est ramené au cas précédent.

Cette méthode fonctionne sans utiliser l'hypothèse de non dégénérescence, et permet donc de démontrer la remarque du théorème 1.

2.5 Interprétation de la signature

Dans cette section on ne parle que de produits scalaire, mais on dispose de résultats analogues dans le cas dégénéré.

On dit que deux produits scalaires ϕ_1 et ϕ_2 sur des espaces vectoriels E_1 et E_2 sont *équivalents* s'il existe un isomorphisme $a : E_1 \rightarrow E_2$ qui envoie l'un sur l'autre, c'est-à-dire telle que pour tout couple $(x, y) \in E_1^2$ on ait $\phi_1(x, y) = \phi_2(a(x), a(y))$.

D'après le théorème 1, deux produits scalaires sont équivalents si et seulement si ils ont même signature. La signature traduit donc complètement les propriétés d'un produit scalaire ; par exemple le discriminant de ϕ vaut $(-1)^q$. Des signatures opposées (p, q) et (q, p) sont semblables puisque si l'une est la signature de ϕ , l'autre est celle de $-\phi$. En général on se contente donc d'étudier le cas où $p \geq q$.

Proposition 11 — Soit ϕ un produit scalaire de signature (p, q) . Alors il est défini positif si et seulement si $q = 0$, il est défini négatif si et seulement si $p = 0$.

DÉMONSTRATION : Il suffit de voir que si p et q sont tous les deux non nuls, il existe nécessairement un vecteur isotrope. Or il existe alors deux vecteurs unitaires orthogonaux e_+ et e_- de carrés respectifs 1 et -1 . Alors $e_+ + e_-$ est non nul et la bilinéarité donne $\phi(e_+ + e_-, e_+ + e_-) = \phi(e_+, e_+) + 2\phi(e_+, e_-) + \phi(e_-, e_-) = 1 + 0 - 1 = 0$ donc $e_+ + e_-$ est isotrope. ■

Proposition 12 — Soit ϕ un produit scalaire de signature (p, q) . Alors p est la plus grande dimension possible pour un sous-espace défini positif, q est la plus grande dimension possible pour un sous-espace défini négatif et $\min(p, q)$ est la plus grande dimension possible pour un espace totalement isotrope.

DÉMONSTRATION : Il est facile en considérant une base orthonormée de voir qu'il existe un sous-espace défini positif de dimension p et un sous-espace défini négatif de dimension q . De plus s'il existait un sous-espace défini positif ou négatif de dimension plus grande, comme dans la démonstration du lemme 10 il existerait un vecteur de carré à la fois positif et négatif.

Pour les sous-espaces isotropes, on utilise la méthode de la démonstration de la proposition 11. Soit $l = \min(p, q)$. Une base orthonormale nous donne en particulier une famille orthonormale libre de vecteurs

$$(e_1^+, e_1^-, e_2^+, e_2^-, \dots, e_l^+, e_l^-)$$

où les e_i^+ sont de carré 1 et les e_i^- de carré -1 . Alors la famille

$$(e_i^+ + e_i^-)_{1 \leq i \leq l}$$

est libre, orthogonale et formée uniquement de vecteurs isotropes donc l'espace qu'elle engendre est totalement isotrope de dimension l .

Maintenant s'il existait un espace totalement isotrope de dimension plus grande, il intersecterait non trivialement tout espace défini (négatif ou positif) de dimension maximale ($\geq n - l$) donc il existerait un vecteur de norme à la fois nulle et strictement positive ou négative. ■

3 Groupes orthogonaux

Étant donné un produit scalaire ϕ sur E , on s'intéresse au groupe $O(\phi)$ des endomorphismes qui préservent ϕ (on parle d'*isométries*).

Remarquons que préserver ϕ est équivalent à préserver sa forme quadratique Q . Un sens est évident, l'autre découle de l'identité de polarisation.

Soit \mathcal{B} une base de E et M la matrice de ϕ dans cette base. Alors si X et Y sont les vecteurs coordonnées d'éléments x et y de E , on a vu que $\phi(x, y) = {}^tXY$. Soit a une application linéaire de E dont on note A la matrice dans la base \mathcal{B} . Alors a préserve ϕ si pour tous les couples de vecteurs de E on a $\phi(a(x), a(y)) = \phi(x, y)$, autrement dit si ${}^tAMA = M$.

D'après le théorème 1 il existe une base pour laquelle $M = I_{p,q}$ où (p, q) est la signature de ϕ . Ceci justifie la définition suivante.

Définition 13 — On note $O(p, q)$ le groupe des matrices réelles carrée A de dimension n (où $n = p + q$) telles que

$${}^tAI_{p,q}A = I_{p,q} \quad (9)$$

On note $SO(p, q)$ le groupe des matrices de $O(p, q)$ dont le déterminant vaut 1. On note $SO_0(p, q)$ et on appelle groupe orthochrone la composante connexe de l'identité dans $O(p, q)$.

On définit de façon semblable $SO(\phi)$ et $SO_0(\phi)$.

L'équation (9) montre que $O(p, q) \subseteq GL_n(\mathbb{R})$.

On peut montrer (voir par exemple [1]) que $O(p, q)$ est homéomorphe à $O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$ et que par conséquent il possède 4 composantes connexes. Grâce au théorème 1 il est facile de voir que $O(p, q)$ contient un sous-groupe isomorphe à $O(p) \times O(q)$ et que $SO(p, q)$ contient un sous-groupe isomorphe à $SO(p) \times SO(q)$.

Comme dans le cas euclidien, on peut caractériser les éléments de $O(p, q)$ par leur action sur les bases.

Proposition 14 — Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E orthonormale pour ϕ . Un endomorphisme a de E est une isométrie si et seulement s'il envoie (e_1, \dots, e_n) sur une base orthonormale pour ϕ en respectant le carré de ses éléments ($Q(a(e_i)) = Q(e_i)$ pour tout i).

DÉMONSTRATION : Il suffit de considérer l'écriture matricielle : l'action d'un endomorphisme correspond exactement à un changement de base. ■

Une conséquence importante de ce résultat est la transitivité de l'action de $O(\phi)$ sur les courbes de niveau de Q : étant donnés deux vecteurs non

nuls de même carré il existe toujours un endomorphisme de $O(\phi)$ qui envoie l'un sur l'autre.

Il n'y a donc pas de direction privilégiée, d' « axe » du cône isotrope.

Proposition 15 — *Si ϕ est un produit scalaire de signature (p, q) avec $p > 1$ et $q > 1$, alors $SO_0(\phi)$ est également transitif sur les courbes de niveau de Q .*

DÉMONSTRATION : Pour fixer les idées, on va faire la démonstration dans le cas de deux vecteurs e et f de même carré positif. Quitte à multiplier e et f par une même constante, on suppose qu'ils sont unitaires.

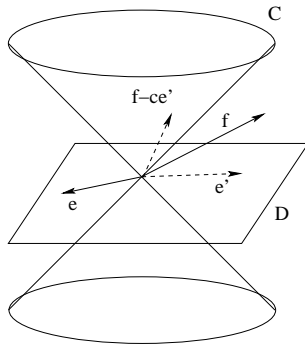
On commence par compléter e en une base orthonormée $(e_i)_i$ où $e = e_1$ et les p premiers vecteurs sont de carré positif. Alors on peut écrire

$$f = \sum_{i \leq p} x_i e_i + \sum_{i > p} y_i e_i$$

avec $x_1^2 + \dots + x_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_n^2 = 1$. Comme $SO(p)$ est transitif sur la sphère unité de l'espace euclidien de dimension p , il existe un élément de $SO_0(\phi)$ qui envoie e sur le vecteur

$$e' = \left(\sum_{i \leq p} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{i \leq p} x_i e_i$$

en agissant trivialement sur les e_i pour $i > p$. On se ramène ainsi au cas où $e' = e_1$ (voir figure).



Passage de e à e' . C est le cône isotrope, D le sous-espace défini positif engendré par les $(e_i)_{i \leq p}$.

On peut alors écrire $f = ce_1 + \sum_{i > p} y_i e_i$. Alors $f - ce_1$ est orthogonal à e_1 et quitte à se placer dans une nouvelle base orthonormale on peut supposer que f s'écrit $f = ce_1 + se_n$, avec nécessairement $c^2 - s^2 = 1$.

Il existe donc un réel t_0 tel que $c = \cosh(t_0)$ et $s = \sinh(t_0)$. La famille a_t d'isométries définie par $a_t(e_i) = e_i$ pour $i \neq 1$ et $i \neq n$, $a_t(e_1) = \cosh(t)e_1 +$

$\sinh(t)e_n$ et $a_t(e_n) = \sinh(t)e_1 + \cosh(t)e_n$ constitue un chemin continu d'isométries entre l'identité et a_{t_0} , qui envoie e' sur f . ■

La situation est différente si $q = 1$, ce cas est traité à la section suivante.

4 Le cas lorentzien

Un cas particulier très étudié car il est au cœur de la théorie de la relativité est le cas pseudo-euclidien le plus proche du cas euclidien, c'est-à-dire la signature $(p, 1)$.

Définition 16 — *On appelle produit scalaire lorentzien (ou parfois seulement produit lorentzien) un produit scalaire de signature $(p, 1)$.*

Un produit lorentzien a des droites isotropes mais pas de plan totalement isotrope. Il a des droites définies négatives mais aucun plan défini négatif.

L'ensemble des vecteurs de carré négatif est divisé en deux composantes connexes, donc la conclusion de la proposition 15 n'a pas lieu : l'action de $SO_0(p, 1)$ n'est pas transitive sur l'ensemble des vecteurs de carré -1 .

Cette propriété est fondamentale, car elle correspond à l'orientation du temps.

Définition 17 — *Soit ϕ un produit lorentzien sur E . On dit d'un vecteur x qu'il est :*

- de type temps si son carré est strictement négatif ;
- de type lumière si son carré est nul (i.e. si x est isotrope) ;
- de type espace si son carré est strictement positif.

On dit qu'un sous-espace est de type temps, lumière ou espace si tous ses vecteurs non nuls sont de ce type.

Ainsi, un sous-espace isotrope est appelé, dans le cas lorentzien, sous-espace (droite, en fait) de type lumière. De même on appelle *cône de lumière* le cône isotrope.

Un choix de l'orientation du temps correspond au choix d'une des deux composantes de l'ensemble des vecteurs de type temps. Cette composante est alors appelée *avenir* tandis que l'autre est appelée *passé*.

Références

- [1] Rached Mneimné and Frédéric Testard. *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*. Collection Méthodes. [Methods Collection]. Hermann, Paris, 1986.
- [2] Barrett O'Neill. *Semi-Riemannian geometry*, volume 103 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1983. With applications to relativity.

www.umpa.ens-lyon.fr/~bkloeckn/
bkloeckn@umpa.ens-lyon.fr

UMPA, ÉNS Lyon
46, allée d'Italie
69 364 Lyon cedex 07
France