

**EXAMEN**  
**(COURS DE GÉOMÉTRIE LORENTZIENNE ET ÉQUATIONS D'EINSTEIN)**

(Chaque exercice est noté sur 5 points. On prend les 4 meilleures notes + bonus ...)

**Exercice 1.** Soit  $c : s \in I \rightarrow c(s) \in \mathbb{R}^2$  une courbe lisse dans le plan euclidien, paramétrée par la longueur d'arc ( $|\dot{c}(s)| = 1$ ).

Soit  $s \rightarrow N(s)$  la normale unitaire direct de  $c : (\dot{c}(s), N(s))$  forme un repère orthonormé direct.

Soit  $s \rightarrow k(s)$  la courbure de  $c : \dot{c}''(s) = k(s)N(s)$ .

Considérons  $\phi : (s, t) \in I \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow c(s) + tN(s) \in \mathbb{R}^2$ .

- Montrer que l'image réciproque  $\phi^*(\text{euc})$  de la métrique euclidienne est :  $g = (1 - tk(s))^2 ds^2 + dt^2$ .

- Réciproquement, soit  $(\Sigma, g)$  une surface riemannienne, admettant (partout) des coordonnées locales  $(u, v)$  dans lesquelles la métrique s'écrit  $g = (1 - vk(u))^2 du^2 + dv^2$ , pour une certaine fonction  $k$ . Montrer alors que cette surface est plate (courbure nulle).

- En déduire le "théorème fondamental des courbes dans le plan" : toute fonction réelle sur un intervalle, peut se réaliser, localement, comme courbure d'une courbe dans le plan.

**Exercice 2.** Formuler et démontrer les mêmes énoncés que dans l'exercice 1, avec le plan euclidien remplacé par le plan Minkowskian  $Min_{1,1}$  ( $= \mathbb{R}^{1,1}$ ).

**Exercice 3.** Rappeler et démontrer (en détail) les équations de contraintes satisfaites par une hypersurface  $M$  dans une variété  $\bar{M}$  Ricci plate ( $Ric_{\bar{M}} = 0$ ). (Distinguer les cas où  $\bar{M}$  est riemannienne ou lorentzienne).

**Exercice 4.** Soit  $(M^n, g)$  une variété riemannienne à courbure scalaire  $Scal_g = 0$ .

- Montrer qu'il existe une variété lorentzienne Ricci plate  $\bar{M}^{n+1}$  dans laquelle  $M$  peut être vue (i.e. isométriquement plongée) comme hypersurface totalement géodésique.

Sous quelle condition causale globale sur  $\bar{M}$ , a-t-on unicité (de  $\bar{M}$ , à isométrie près) ?

- Y-a-il toujours une solution dans le cas Riemannien, i.e. en imposant que  $\bar{M}$  soit une variété riemannienne Ricci plate ?

- Cas particulier où  $M$  est de dimension 2. Rappeler pourquoi en dimension 3, Ricci plat équivaut à être plat, mais pas en dimension  $\geq 4$ .

**Exercice 5.** Soit  $T^1\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times S^1$  le fibré unitaire tangent de  $\mathbb{R}^2$ .

Pour  $v \in S^1$ , notons  $\hat{v}$  son orthogonal unitaire direct, i.e.  $\hat{v} = iv$  (ici  $i = \sqrt{-1}$ ).

Soit  $k : t \in I \rightarrow k(t)$  une fonction réelle donnée.

Considérons le champ de vecteur (non-autonome) sur  $T^1\mathbb{R}^2$  défini par :  $X_k(x, v) = (v, k(t)\hat{v})$ .

- Expliquer comment une solution (locale) de  $X_k$  (i.e. une trajectoire) correspond à une courbe du plan à courbure prescrite  $k(t)$ .

- Remplacer le plan euclidien par le plan minkowskien. Que deviennent alors les objets correspondants,  $T^1Min_{1,1}$ ,  $\hat{v}$  et  $X_k$  ?

- Comment peut-on généraliser la construction à une surface riemannienne (ou lorentzienne) quelconque (pas nécessairement plate).

**Exercice 6.** Soit  $Min_{1,1}$  le plan de Minkowski muni des coordonnées  $(x, y)$  et la forme  $x^2 - y^2$ . Soit  $V$  une sous-variété lisse de dimension 1 connexe (une courbe plongée) et de type espace.

Montrer que  $V$  est un graphe, i.e.  $V = \{(x, f(x)), x \in I\}$  pour une certaine fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$ . De plus,  $f$  est 1-Lipschitz :  $|f'(x)| < 1, \forall x \in I$ .

Notons  $C_0^+ = \{(x, y), x^2 - y^2 < 0\}$  le cône géométrique positif. On définit de la même façon  $C_0^-$ , et leurs versions affine  $C_u^\pm = u + C_0^\pm$ , pour tout  $u$ .

Soit  $D(V)$  le domaine de dépendance de  $V$  (i.e.  $V$  est une surface de Cauchy dans  $D(V)$  et tout ouvert  $\Omega$  dans lequel  $V$  est une surface de Cauchy est contenu dans  $D(V)$ ).

On se propose de montrer que  $D(V)$  a la forme d'un "parallélogramme"  $C_{u^+}^+ \cap C_{u^-}^-$ , avec la possibilité que l'un ou les deux cônes soient égaux à tout le plan (i.e.  $u^\pm$  est à l'infini).

Pour cela, montrer que parmi tous les cônes positifs  $C_u^+$  contenant  $V$ , il existe un plus petit (i.e. qui soit contenu dans tous)  $C_{u^+}^+$  (il peut être trivial, i.e. égal au plan entier). Définir de la même façon  $C_{u^-}^-$ . Conclure.

**Exercice 7.** (Application développante) Soit  $M^n$  une variété riemannienne plate

- Rappeler l'existence d'isométries locales entre petits ouverts de  $M$  et l'espace modèle  $\mathbb{R}^n$ , et leurs unicité à isométrie ambiante globale près.

- Lorsque  $M$  est simplement connexe, alors il existe  $d : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  une immersion isométrique, qui est unique modulo isométrie globale de  $\mathbb{R}^n$ . (Indication : le passage du local au global se fait par prolongement analytique).

- Formuler le même énoncé dans le cas lorentzien (plat).

Utilisant l'exercice 6, considérons  $V$  est une variété riemannienne de dimension 1 muni d'une fonction courbure  $k$ . Alors, il existe un espace plat globalement hyperbolique maximal unique  $\bar{D}(V)$  contenant  $V$ , avec une courbure  $k$ .

- Montrer que si  $V$  n'est pas compacte, alors  $\bar{D}(V)$  est (globalement) isométrique au domaine de dépendance d'une courbe dans le plan de Minkowski.

- Si  $V$  est compact, donc difféomorphe au cercle,  $\bar{D}(V)$  est le quotient d'une domaine de dépendance dans le plan  $Min_{1,1}$ .

**Exercice 8.** Considérons une immersion isométrique  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  (tous les deux euclidiens). Munissons  $\mathbb{R}^2$  de coordonnées  $(u, v)$ , avec  $h = du^2 + dv^2$  sa première forme fondamentale. Notons  $k = edu^2 + 2gdudv + fv^2$  la seconde forme fondamentale.

Écrivez les équations de contraintes sous forme d'équations différentielles et algébriques sur  $e, f$  et  $g$ .

Montrer que le tore plat  $T^2 = S^1 \times S^1$  ne peut pas se plonger isométriquement dans  $\mathbb{R}^3$ . Essentiellement, montrer que lorsque les fonctions  $e, f$  et  $g$  sont doublement périodiques, i.e. sont invariantes pas les translations  $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ , alors elles sont triviales....