Rigidité des actions des réseaux de groupes de Lie sur les variétés kaehlériennes

Abdelghani Zeghib

UMPA, ENS-Lyon
http://www.umpa.ens-lyon.fr/~zeghib

(en collaboration avec Serge Cantat)

Introduction

Rencontre de deux mondes

Systèmes dynamiques,

d'abord, systèmes dynamiques holomorphes:

Minimiser l'entropie, (et modèles minimaux)!

M Kaehlerienne,

$f \in Diff(M) \to Ent_{top}(f)$ entropie topologique

si $f \in \mathrm{Aut}(M)$, alors $Ent_{top}(f) \leq Ent_{top}(g)$,

pour tout $g \in Diff$ homotope à f

f est la plus harmonique, ..., dans sa classe,

f est un modèle minimal dynamique et géométrique

f est un modèle minimal dynamique et géométrique

Situations similaires:

- Définition d'une dynamique sud-nord: $f : S^1 \to S^1$, avec $f(S) = S$, $f(N) = N$, et $\forall x \in S$, $\lim_{n\to+\infty} f^n(x) = N$

Modèle: $f(x) = \lambda x$ sur $\mathbb{R}$, compactifié!

- Sur le tore (réel) T^2: tout $f \in Diff(T^2)$ est homotope à $g \in GL(2, \mathbb{Z})$
- Pour une surface (réelles) de genre ≥ 2: les homéomorphismes pseudo-Anosov, sont des modèles dans leurs classes (ils sont affines au sens de structures plates singulières)

À propos des espaces

M variété complexe compacte,

Aut(M) groupe de Lie

i.e. $Aut^0(M)$ groupe de Lie (de dimension finie)

Son algèbre: champs de vecteurs holomorphes,

$Aut^{\#}(M) = \mathrm{Aut}(M)/\mathrm{Aut}^0(M)$ groupe discret

À propos des espaces

M variété complexe compacte,

$\mathrm{Aut}(M)$ groupe de Lie

i.e. $Aut^0(M)$ groupe de Lie (de dimension finie)

Son algèbre: champs de vecteurs holomorphes,

$Aut^{\#}(M) = \mathrm{Aut}(M)/\mathrm{Aut}^0(M)$ groupe discret

M Kaelerienne, $\mathrm{Aut}^0(M)$ facile à comprendre,

Dynamique pauvre: les orbites sont propres....

Compactification par une action méromorphe,

Pratiquement un groupe algébrique agissant sur une variété algébrique

Si M est projective, alors $k : M \to \mathbb{C}P^N$,

$\mathrm{Aut}^0(M) \to G \subset \mathrm{PSL}_N(\mathbb{C})$,

$k(M) \cong M$ est une sous-variété invariante de G.

Pratiquement un groupe algébrique agissant sur une variété algébrique

Si M est projective, alors $k : M \to \mathbb{C}P^N$,

$\mathrm{Aut}^0(M) \to G \subset \mathrm{PSL}_N(\mathbb{C})$,

$k(M) \cong M$ est une sous-variété invariante de G.

Il est donc intéressant de comprendre $\mathrm{Aut}^{\#}(M)$!?

Pratiquement un groupe algébrique agissant sur une variété algébrique

Si M est projective, alors $k : M \rightarrow \mathbb{C}P^N$,

$\mathrm{Aut}^0(M) \rightarrow G \subset \mathrm{PSL}_N(\mathbb{C})$,

$k(M) \cong M$ est une sous-variété invariante de G.

Il est donc intéressant de comprendre $\mathrm{Aut}^{\#}(M)$!?

Peut-il être contenir égal ou contenir un groupe discret Γ donné?

À propos des groupes

Prototype: Γ sous-groupe d'indice fini dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$,

i.e. Γ noyau de la réduction $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$

- Γ agit sur le tore (réel) $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$

En général

Définition: Γ réseau de $G \iff G/\Gamma$ est de volume fini.

G groupe de Lie simple de rang supérieur, e.g.

$G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}),\ n \geq 3,\ O(p,q),\ p,q \geq 2\ldots$

Quelques aspects de rigidité de ces groupes

• Tout sous-groupe normal est soit fini soit d'indice fini,

Cor: une représentation est essentiellement fidèle (i.e. à indice fini près), ou elle est finie....

• Annulation $H^1_\rho(\Gamma)$, $\forall\ \rho$: toute action affine sur un espace affine (de dimensin finie) admet un point fixe)

• Kazdhan: toute action hilbertienne affine admet un point fixe...

Super-rigidité(s)

• Super-rigidité de Margulis: $\rho : \Gamma \longrightarrow H$ groupe de Lie (linéaire de dimension finie)

Alors ρ s'étend en un homomorphisme $H \rightarrow G$,

sauf, exception

Super-rigidité(s)

• Super-rigidité de Margulis: $\rho : \Gamma \longrightarrow H$ groupe de Lie (linéaire de dimension finie)

Alors ρ s'étend en un homomorphisme $H \longrightarrow G$,

sauf, exception

i.e. image de ρ précompact

Dans le cas de $\mathrm{SL}_N(\mathbb{Z})$, sauf si l'image est finie

Super-rigidité non-linéaire (programme de Zimmer)

Question sur les actions de Γ, i.e. $\rho : \Gamma \longrightarrow Diff(M)$

Il ne s'agit pas d'extension à G!

Diverses autres questions plus ou moins précises,

Exemples

Les exemples, Tores

R réseau de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$

$\Lambda = R \times R \times R \subset \mathbb{C}^3$

- $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}) \subset \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ préserve Λ
- Si $R = \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$, alors $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}) \subset \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ préserve Λ,
- Plus généralement,

$R = \mathcal{O} = \mathcal{O}(\sqrt{-d})$ anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, d entier sans facteur carré

$\mathrm{SL}_3(\mathcal{O})$ préserve le réseau Λ $(= \mathcal{O} \times \mathcal{O} \times \mathcal{O})$

$\Gamma = \mathrm{SL}_3(\mathcal{O}(\sqrt{-d})$ est un réseau de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$

Γ agit sur le tore $A = \mathbb{C}^3/\Lambda$

Question naturelle

Λ réseau de $\mathbb{C}^3 = \mathbb{R}^6$,

$\Gamma = \mathrm{Aut}(\Lambda) \subset \mathrm{SL}_6(\mathbb{Z})$

Dans quels cas, Γ est un réseau dans un certain sous-groupe de Lie $G \subset SL_6(\mathbb{R})$, avec G semi-simple..., de rang ≥ 2....,

e.g. G isomorphe à $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{SL}_6(\mathbb{C})$?

Proposition

À conjugaison dans $\mathrm{SL}_6(\mathbb{R})$, et à indices finis près, il n y a que les exemples précédents...
e.g. si un tore $M = \mathbb{C}^3/\Lambda$ admet une action affine d'un groupe Γ isomorphe à un réseau de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$, alors, à conjugaison près:
Λ est d'indice fini dans R^3, où R est un réseau de $\mathbb{C}$
Γ est d'indice fini dans $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$.

(observation: les tores en question sont projectives)

Éclatement

$x_0 \in A$ est Γ-périodique si Γx_0 est fini.

On éclate T^3 en des points Γ-périodiques,

Γ agit naturellement sur l'éclaté M,

Exemple: $0 \in A = \mathbb{C}^3/(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})^3$ est fixe par $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}[i])$.

Orbifolds

$M_0 = A/F$, où

F est un sous-groupe fini d'automorphimses de A,

- e.g. $A = \mathbb{C}^3/(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})^3$, alors,

F est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}) \ltimes A$

Γ = centralisateur de F (ou normalisateur, à indice fini)

Γ agit sur M_0

Orbifolds

$M_0 = A/F$, où

F est un sous-groupe fini d'automorphimses de A,

- e.g. $A = \mathbb{C}^3/(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})^3$, alors,

F est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}) \ltimes A$

Γ = centralisateur de F (ou normalisateur, à indice fini)

Γ agit sur M_0

Rappel, définition d'orbifold: localement $\mathbb{C}^n/F$...

Possibilités pour F

Quelles sont les possibilités pour qu'il soit centralisé par un Γ isomorphe à un réseau d'un groupe de Lie G de rang ≥ 2?

il est engendré par une homothétie $(x, y, z) \to \alpha x, \alpha y, \alpha z)$

Avec α racine de l'unité d'ordre: 1, 2, 3, 4 ou 6.

Exemple: $\alpha = -1$

Variétés de Kummer

M obtenue par résolution de singularité d'un orbifold M_0:

- $\pi : M \to M_0$ birationnelle, M_0 orbifold
- $\epsilon : A \to M_0$, revêtement orbifold, A tore

Action de Γ sur M:

$\rho : \Gamma \to \mathrm{Aut}(M)$

$\eta : \Gamma \to \mathrm{Aut}(A)$,

$\epsilon \circ \eta(\gamma) = (\pi \circ \rho(\gamma) \circ \pi^{-1}) \circ \epsilon, \quad \forall \gamma$

Exemple:

M est Calabi-Yau (i.e. simplement connexe...) $\iff$ $\alpha = j = e^{2i\pi/3}$

Rigidité

Théorème 1

Théorème

- *M^3 Kaehlerienne compacte, munie d'une action $\rho : \Gamma \to \mathrm{Aut}(M)$.*
- *Γ est isomorphe à un réseau de $G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$*

• *Supposons que $\rho(\Gamma)$ n'est pas à indice fini près contenue dans la composante neutre $\mathrm{Aut}^0(M)$.*

Alors, c'est un exemple de Kummer

Exemple, si $G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$, alors, essentiellement, $\Gamma = \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$, et $A = \mathbb{C}^3/R^3$, où R est un réseau de $\mathbb{C}$.

Théorème 2 (autres groupes)

Mêmes conclusions, en supposant que G est un groupe de Lie semi-simple de rang (réel) ≥ 2 et que Γ est un réseau irréductible dedans. (Il n y a pas de nouveaux exemples)

Théorème 3 (dans la composante neutre)

Supposons G simple et que $\rho(\Gamma) \subset \mathrm{Aut}^0(M)$,

• Alors, modulo revêtement fini, l'action de Γ s'étend en une action de G, et M est:

1. $\mathbb{C}P^3$, ou $\mathbb{C}P^2$ éclaté en des points fixes (s'ils existent)
2. $\mathbb{C}P^2 \times B$, B est une courbe de genre ≥ 2
3. Un fibré principal sur $\mathbb{C}P^2$ de groupe structural un tore
4. Un fibré projectif $P(E)$ associé à un fibré $E \to \mathbb{C}P^2$ de rang 2

Conjecture

Le théorème 1 s'étend avec le même énoncé en dimension supérieure: G de rang $n-1$ agissant sur M^n...

Plan

Un outil de géométrie algébrique

Une variété Kaehlerienne compacte M telle que $c_1(M) = c_2(M) = 0$ est un tore!!!

(dû à Yau? s'obtient par exemple en regardant la décomposition de Bogomolouv-Beauville?)

($c_1 = 0 \Longrightarrow$ Ricci plate, et $c_1 = c_2 = 0$ Riemann-plate)

Un outil de géométrie algébrique

Une variété Kaehlerienne compacte M telle que
$c_1(M) = c_2(M) = 0$ est un tore!!!
(dû à Yau? s'obtient par exemple en regardant la décomposition de Bogomolouv-Beauville?)
($c_1 = 0 \Longrightarrow$ Ricci plate, et $c_1 = c_2 = 0$ Riemann-plate)

$c_1 \in H^2(M, \mathbb{R})$, plus précisément $\in H^{1,1}$
$c_2 \in H^{2,2}$

Un outil de géométrie algébrique

Une variété Kaehlerienne compacte M telle que

$c_1(M) = c_2(M) = 0$ est un tore!!!

(dû à Yau? s'obtient par exemple en regardant la décomposition de Bogomolouv-Beauville?)

($c_1 = 0 \Longrightarrow$ Ricci plate, et $c_1 = c_2 = 0$ Riemann-plate)

$c_1 \in H^2(M, \mathbb{R})$, plus précisément $\in H^{1,1}$

$c_2 \in H^{2,2}$

Tout $f \in \mathrm{Aut}(M)$ fixe ces classes de cohomologie.

Théorie des représentations

Une étape majeure de la preuve, étudier l'action de Γ sur la cohomologie,

On la note ρ la représentation de Γ dans $W = H^{1,1}$

$H^{2,2}$ est le dual de $H^{1,1}$ (on est en dimension 3)

- On conclut si l'on montre que ρ n'a pas de vecteur fixe.

Théorie des représentations

Une étape majeure de la preuve, étudier l'action de Γ sur la cohomologie,

On la note ρ la représentation de Γ dans $W = H^{1,1}$

$H^{2,2}$ est le dual de $H^{1,1}$ (on est en dimension 3)

• On conclut si l'on montre que ρ n'a pas de vecteur fixe.

• Mais, c'est à posteriori faux: e.g. l'éclatement crée des classes invariantes.

On note $T \subset H^{1,1}$ le sous-espace des vecteurs fixes de ρ

Objets invariants

$H^{1,1} \cap H^2(M, \mathbb{Z})$ correspond à des classes de cohomologie de diviseurs...

soit $T_{\mathbb{Z}} = T \cap H^2(M, \mathbb{Z})$

Si $c = [D] \in T_{\mathbb{Z}}$, et si D est effective, e.g. $[D] = [V]$, V hypersurface, alors, on montre,

- Invariance cohomologique $\Longrightarrow$ invariance "physique", i.e. $\Gamma V = V$
- On comprend V car on est en dimension inférieure, $V = \mathbb{C}P^2$ et son fibré normale est négative,.

Contraction

donc V est contractable $\to (\mathbb{C}^2, 0)/F$, F engendré par la multiplication par une racine de l'unité (Grauert),

On élargit le problème aux orbifolds,
Chaque fois qu'un diviseur effective est cohomologiquement invariant, on le contracte...
On arrive à un orbifold (d'après Grauert)
telle que: les classes invariantes dans $H^{1,1}$ sont non-effectives

Positivité

À l'aide de structures concourantes sur $H^{1,1}$..., on montre si $T \neq 0$, alors il existe $D \in T_{\mathbb{Z}}$ effectif.

On l'obtient en appliquant un théorème de Demailly-Paun:

$E \in$ la partie non-invariante de $H^{1,1}$,

$E = [\omega]$ presque Kaehler, mais ne l'est pas (big et nef mais non-ample...)

Il existe donc D, tel que $E^2.D = 0$,...

Donc $T = 0$, en particulier $c_1(M) = c_2(M) = 0$ ... $\Longrightarrow$ M orbifold plat $M = A/F$

Quelques résultats antérieurs

Un résultat de Serge Cantat

Soit Γ un réseau dans G groupe de Lie simple G de rang $r \geq 2$,

$\rho : \Gamma \to \mathrm{Aut}(M^n)$ (non-triviale)

Alors $r = (\text{rang } G) \leq n$ $(=\dim M)$

Remarques:

- C'est une généralisation du cas linéaire, si $\rho : \Gamma \to (\mathbb{C}^n, 0)$, i.e.

$\rho : \Gamma \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, alors rang $\Gamma \leq n$

Par superrigidité de Margulis ρ s'étend $G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, donc

$r \leq n - 1 < n$

- Cette inégalité est une variante de conjecture(s) de Zimmer...
- Elle est vraie dès que Γ admet un point fixe (ou périodique)

Cas d'égalité: à indice fini près, $\rho(\Gamma) \subset \mathrm{Aut}^0(M)$, et l'action se prolonge à G.

Exemple, Cas de $G = \mathrm{SL}_r(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{SL}_r(\mathbb{C})$,

r fixé, on a: $r - 1 \leq n$,

e.g. $r = 3$, i.e. $\Gamma \subset \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$

Si $n < r - 1$, action triviale, (action triviale sur les courbes)

Si $n = r - 1$, $M = \mathbb{C}P^{n-1}$, (unique action de Γ sur une surface)

Si $r = n$, notre cas, des actions en dimension 3 existent...

Un résultat de Dinh-Sibony

Soit $\mathcal{A}$ abelien, agissant sur M^n

Supposons l'action de $\mathcal{A}$ sur la cohomologie injective et diagonalisable,

Alors $\mathcal{A} \cong \mathbb{Z}^r$, et $r \leq n-1$

La condition de Dinh-Sibony est: tout $a \in \mathcal{A}$ possède un valeur propre de module $\neq 1$ sur $H^*(M, \mathbb{R})$

Exemple: $n = 2$,

$\mathbb{Z}^2$ ne peut pas agir de la sorte, sur une surface

Nother $\Longrightarrow$ la signature sur $H^2(M, \mathbb{R})$ est lorentzienne...,

$\mathbb{Z}^2$ ne peut pas se plonger de manière discrète et diagonalisable dans $SO(1, d)$ (car c'est un groupe hyperbolique)

Exemple: $n = 2$,

$\mathbb{Z}^2$ ne peut pas agir de la sorte, sur une surface

Nother $\Longrightarrow$ la signature sur $H^2(M, \mathbb{R})$ est lorentzienne...,

$\mathbb{Z}^2$ ne peut pas se plonger de manière discrète et diagonalisable

dans $SO(1, d)$ (car c'est un groupe hyperbolique)

En dimension supérieure, substituts du théorème de Nother?

Relations de Hodge-Riemann...

Autres

Transformations birationneles...

Dynamique et cohomologie

Lieberman-Fujiki

(M, ω)

$\mathrm{Aut}_{[\omega]}(M) = \{f \in \mathrm{Aut}(M)$ tel que $f^*\omega$ est cohomologue à ω $\}$

ω Kaehler,

Fait: $Aut_{[\omega]}(M)$ a un nombre fini de composantes connexes.

Idée: $\mathrm{Graph}(f^n) \subset M \times M$, ont un volume borné à cause de $f^*[\omega] = [\omega]$

Généralisations: compactification de $\mathrm{Aut}^0(M)$, autres conditions sur ω...?

Analyse et Dynamique, ensembles analytiques et fibrés en droites invariants

Points fixes de Γ

Soit V une sous-variété Γ-invariante

Cas $V = 1$ pt $= \{x_0\}$

Représentation infinitésimale:

$\phi : \gamma \to D_{x_0}\gamma \in \mathrm{GL}\,(T_{x_0}M)$,

- Super-rigidité: ϕ est l'injection canonique $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C}) \to \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ ou 0...
- Linéarisation (Ghys-Cairns): ρ est localement conjuguée à ϕ
- en particulier, si $\phi = 0$, alors l'action est triviale.

Codimension > 1

Si $\dim V < n - 1$, alors tous ses points sont fixes,

en $x_0 \in V$, ϕ ne préserve aucun sous-espace propre $\Longrightarrow$

idem pour ρ,

Contradiction,

Codimension 1

V_1, V_2 hypersurfaces invariantes

$V_1 \cap V_2 = \emptyset$ (sinon cas précédents)

$V \cong \mathbb{C}P^2$

Fibrés en droites invariants

E fibré en droites Γ-invariant (e.g. K_M)

$\dim H^0(M, E) = 0, 1, 2....$

Fait: $\dim H^0 \leq 2$

Si $\dim H^0 \geq 2$, application de Kodaira

$k_E : M \rightarrow P((H^0)^*)$,

$x \rightarrow \{s \in H^0, s(x) = 0\}$

Elle est Γ-équivariante, l'action sur H^0 est linéaire

(Elle est méromorphe, mais...)

$N = k_E(M)$

L'action de Γ sur N se fait via $\mathrm{PSL}_d(\mathbb{C})$, $d = \dim H^0 - 1$

Elle s'étend à la fermeture de Zariski de Γ (dans $\mathrm{PSL}_d(\mathbb{C})$)

• $\dim N = 3$, k_E à fibre finis $\Longrightarrow$ l'action sur M est sans entropie,

• $\dim N = 1$, L'action sur N est triviale, les fibres sont invariantes, donc $\cong \mathbb{C}P^2$, donc entropie $= 0$

• $\dim N = 2$, $k_E : M \to \mathbb{C}P^2$, on montre: entropie $= 0$ (Dinh-Nguyen)

V est contractable

N fibré normal $\cong O(k)$, $k \in \mathbb{Z}$,

• Si $k > 0$, alors $E = [V]$ admet des sections: il est ample

• Si $k = 0$, N trivial, V admet une unique déformation $\rightarrow$ application méromorphe équivariante: $M \rightarrow S$...

• Donc $k < 0$, V est contractable

Classes effectives

$E = D$ effective

$H^0 \neq 0$,

Nécessairement, $\dim H^0 = 1$, i.e. D rigide

$D = \Sigma a_i V_i$, $a_i \in \mathbb{Z}^+$, $\Gamma V_i = V_i$....

Albanese

$$a_M : M \rightarrow Alb(M),\ y \rightarrow \int_x^y$$

Théorie des représentations

$W = H^{1,1}$

$\rho : \Gamma \ (\subset G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})) \ \to GL(W)$

$\wedge : W \times W \to H^{2,2} = W^*$

(Par algébricité) l'action étendue de G préserve $\wedge$

Indice de Hodge

$q_\omega : \alpha \in H^{1,1} \rightarrow -\int \omega \wedge \alpha \wedge \alpha$

Si ω est une forme de Kaehler, alors q_ω est définie positive sur $P_\omega = \{\alpha \in W, \alpha \wedge \omega \wedge \omega = 0\}$

Corr: Soit $L \subset W$ un sous espace sur lequel $\wedge$ est nul. Alors $\dim L \leq 1$

Preuve: sinon $L \cap P_\omega$ est de dimension > 0.

Représentations de $SL_2(\mathbb{R})$

R_k représentation dans

P_k= Polynômes homogènes de degré $k = \{p = \Sigma x^i y^{k-i}\}$

A matrice diagonale (λ, λ^{-1})

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

A_k action sur P_k

Poids (valeurs propres) $\lambda^k, \lambda^{k-2}, \lambda^{2-k}, \lambda^k,$

Vecteurs propres $e_k, \ldots e_{-k}$

• Wedge: $e_r \wedge e_s$

$$A_k(e_r \wedge e_s) = \lambda^{r+s}(e_r \wedge e_s) = A_k^*(e_r \wedge e_s) = \lambda^l(e_r \wedge e_s)$$

Donc: soit $e_r \wedge e_s = 0$

soit $r + s$ poids de $R_k^* \cong R_k \iff -k \leq r + s \leq k$

- Nécessairement $e_k \wedge e_k = 0$ (car $2k > k$)

On ne peut pas avoir

$e_k \wedge e_{k-2} = 0$, et $e_{k-2} \wedge e_{k-2} = 0$ (par Hodge)

Donc $2(k-2) \leq k$, i.e. $k \leq 4$.

$G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$

Le poids de ρ restreinte à tout $H \subset \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$, $H \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est borné par 4.

Proposition

W ou W^* est isomorphe à $Sym_2(E^*) \times E^k \times T$,où,

- $E = \mathbb{R}^3$
- $Sym_2(E^*) =$ *espace des formes quadratiques sur* E
- *Sur* T, *la représentation est triviale*

Cas du tore

$\alpha = \Sigma a_{ij} dz^i d\bar{z}^j$

α réelle $\Longrightarrow A = (a_{ij})$ hermitienne: $a_{ji} = \bar{a}_{ij}$

$A = B + C,$

A réelle symétrique $\rightarrow Sym_2(\mathbb{R}^3)$

iB réelle antisymétrique $\rightarrow \mathbb{R}^3$

Cup-produit

$W \times W \to W^* = Sym_2(E) \times E^* \times T$

- $Sym(E^*) \times Sym(E^*) \to Sym^*(E^*) = Sym(E)$:
$(q, u) \to q(u, .) \in E^*$
- $Sym \times E \to E^*$
- $E \times E \to Sym^*$: $(u, v) \to u \otimes v + v \otimes u \in Sym(E)$
- $Sym \times T \to 0$ (preuve: sinon $Sym =\cong Sym^*$)
- À constante près, $Sym \times Sym \times Sym \to \mathbb{R}$ est det

Remarque générale

M variété Kaehlerienne, $H^*(M, \mathbb{R})$ admet cocktail de structures (de nature algébrique), $\wedge$, dualité de Poincaré...

Question: quel est G le groupe (algébrique) G d'automorphismes des ces structures?

Question: quel est les sous-groupe Γ de G préservant $H^*(M, \mathbb{Z})$

Position des classes entières

On suppose pour simplifier $H^{2,0} = 0$,
donc $H^2(M, \mathbb{R}) = H^{1,1}$

Proposition

$Sym_2(E^*)$ rencontre $H^2(M, \mathbb{Z})$ non-trivialement:
$Sym \cap H^2(M, Z)$ est un réseau de Sym
Idem pour les facteurs E^k et T

Idée: $(u, v, w) \in W_{\mathbb{Z}}$,

Appliquons $\gamma \in \Gamma \rightarrow (u', v', w)$,

donc $W_{\mathbb{Z}} \cap (Sym \times E^k) \neq 0$

On peut oublier T

Suite

$W_{\mathbb{Z}}$ est invariant pour toutes les applications $\Sigma a_i \rho(\gamma_i)$, $a_i \in \mathbb{Z}$, $\gamma_i \in \Gamma$

- $\gamma = A \in \Gamma \subset \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$,

A_{Sym} son action sur Sym, matrice 6×6

- Exemple: si A est unipotent: $(A-1)^3 = 1$

Mais, en général, $(A_{Sym} - 1)^3 \neq 0$

- Donc $(\gamma - 1)^3 - 1 : Sym \times E^k \to Sym$ non-trivialement...

Appréhender des fibrés en droites

Cône De Kahler

$\mathcal{K} \subset W$ la fermeture du cône de Kaehler,

C'est un cône convexe propre Γ-invariant.

• Ce n'est pas un objet algébrique, donc pas nécessairement invariant par la fermeture de Zariski de $\rho(\Gamma)$.

• ρ préserve un ordre sur W..., mais il y en a plein d'exemples...

$\mathcal{K} \cap Sym$

Comme dans le cas du tore, $\mathcal{K} \cap Sym = Sym^+ = \{$ formes quadratiques positives $\}$

- Pas de choix: 0, Sym^+ ou $-Sym^+$ sont les seuls cônes Γ-invariant...

- Il suffit de montrer que c'est $\neq 0$:

e.g. si $\gamma \in \Gamma$ est diagonale, alors, pour $\alpha = (u, v, w) \in Sym \times E^k \times T$ générique,

- $\rho(\gamma^n)\alpha$, normalisé, converge dans Sym

Proposition

Un fibré $E \in Sym^* \cap W_{\mathbb{Z}}$ est big et nef

Si $T \neq 0$, alors E n'est pas ample.

Preuve

Nef: par définition,

Big: il admet beaucoup de sections...

$E = (a_{ij})$, $E^3 = \det A$, à constante près, donc $E^3 > 0$

Suite

Soit $\omega \in H^{1,1}$

Par Lefschetz-hard, si ω est Kaehler,

alors $L : \alpha \in H^{1,1} \to \alpha \wedge \omega \in H^{2,2}$ est un isomorphisme

Ici, $\omega \in Sym \Longrightarrow \omega \wedge t = 0, \quad \forall\, t \in T$

Facteur cohomologique trivial

$E = \omega$ n'est pas ample,

Donc, il existe Y une courbe ou hypersurface telles que $E.Y = 0$

ou $E^2.Y = 0$ (Demailly-Paun)

disons, $\int_Y \omega \wedge \omega = 0$

$Y = (a, b, c)$

On montre que $a = 0$ (pour un bon choix de ω)

Une combinaison à coefficients rationnelles positifs de $\gamma_i(0, b, c)$ est

de a forme $(0, 0, c)$