

PARTIEL
(COURS DE GÉOMÉTRIE LORENTZIENNE ET ÉQUATIONS D'EINSTEIN)

(Chaque exercice est noté sur 5 points. On prend les 4 meilleurs notes + ...)

Exercice 1. On dit qu'un difféomorphisme $F : N \rightarrow N$ conjugue deux difféomorphismes ψ et ϕ de N et M respectivement si $F \circ \psi = \phi \circ F$.

Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne, et ϕ une isométrie de M ayant un point fixe x_0 .

Montrer que localement l'application \exp_{x_0} conjugue la dérivée $D_{x_0}\phi$ et ϕ (au voisinage de x_0 : formuler l'énoncé).

Déduire que si une isométrie fixe un point et admet une dérivée triviale en ce point, alors c'est l'identité (on suppose M connexe).

Déduire qu'une isométrie de l'espace de Minkowski de dimension $1+n$ est composé d'une translation et d'un élément de $O(1, n)$.

(Remarquer que ce fait se généralise aux espaces plats $\mathbb{R}^{p,q}$, de signature (p, q) , avec $O(1, n)$ remplacé par $O(p, q)$).

Exercice 2. Sur l'espace de Minkowski $Min^{1,2}$, muni de la forme quadratique lorentzienne $q(t, x, y) = -t^2 + x^2 + y^2$, considérons l'inversion $\phi : x \mapsto \frac{x}{q(x)}$.

Trouver son domaine de définition, et montrer que ϕ est conforme.

Vérifier que ϕ envoie droite (affine non-paramétrée) isotrope sur droite isotrope.

Est-ce un fait général pour les difféomorphismes conformes (entre ouverts de Minkowski), et par quel outil se démontre-t-il ?

Montrer qu'il existe un difféomorphisme conforme entre deux ouverts de Minkowski, ayant un point fixe et une dérivée égale l'identité en ce point, sans être trivial (i.e. l'identité). (Indication : composer une inversion avec une similitude, i.e. une application $u \rightarrow \lambda A(u) + a$, où $A \in O(1, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^3$).

Exercice 3. Soit (M, g) une variété lorentzienne globalement hyperbolique (GH en abrégé). Soit N une sous-variété de M , et considérons $M' = M \setminus N$.

Montrer que si N est un point, alors M' n'est pas GH.

Plus généralement M' n'est pas GH dès que N est de codimension > 1 .

Étudier le cas où N est de codimension 1.

Exercice 4. Soit (M, g) une variété lorentzienne, ayant une fonction temps $T : M \rightarrow \mathbb{R}$ dont tous les niveaux sont **compacts**.

Montrer qu'alors T est un temps de Cauchy en particulier M est globalement hyperbolique.

(Indication : Montrer qu'une courbe causale inextensible quitte tout compact.

Remarquer que deux niveaux quelconques de T bordent un domaine relativement compact).

Donner un contre-exemple lorsque les niveaux ne sont pas compacts (penser un produit)

Exercice 5. Dans $Min^{1,2}$, soit $Co^{1,2}$ le cône de lumière plein : $\{(t, x, y) / -t^2 + x^2 + y^2 < 0, t > 0\}$

Montrer que $Co^{1,2}$ est globalement hyperbolique. Plus précisément la surface $\mathbb{H}^2 = \{-t^2 + x^2 + y^2 = -1, t > 0\}$ est une surface de Cauchy dans $Co^{1,2}$.

Montrer que $Co^{1,2}$ est exactement le domaine de dépendance de \mathbb{H}^2 (i.e. tout ouvert dans lequel \mathbb{H}^2 est une surface de Cauchy est contenu dans $Co^{1,2}$).

Exercice 6. Soit $a \in \mathbb{R}^{1,2}$, $\gamma : x \rightarrow x + a$ la translation de $Min^{1,2}$ ainsi définie. Considérons C_a le cylindre quotient de $Min^{1,2}$ par le groupe engendré par γ .

Montrer que C_a est isométrique à $C_b \iff$ il existe $A \in O(1,2)$ tel que $A(a) = b$.

Montrer que C_a causal ssi a est de type espace.

Montrer que si a est isotrope, alors toute courbe causale fermée est une géodésique isotrope.

Exercice 7. Soit (M, g) une surface lorentzienne, et \hat{X} et \hat{Y} ses deux champs de directions isotropes.

Montrer que \hat{X} et \hat{Y} sont des champs de directions parallèles.

On suppose ces champs de directions orientables, disons, ils existent deux champs de vecteurs non-singuliers X et Y qui leur sont tangents. Montrer que, localement, X et Y peuvent être choisis commutant : $[X, Y] = 0$ (multiplier les par des fonctions adéquates).

Montrer (ou admettre) que si les deux champs X et Y commutent, alors il existe localement un système de coordonnées (u, v) tel que $X = \frac{\partial}{\partial u}$ et $Y = \frac{\partial}{\partial v}$.

Déduire que la métrique s'écrit $g = e^\sigma du dv$, pour une certaine fonction σ .

Montrer que si les champs de vecteurs X et Y sont parallèles, alors la métrique peut s'écrire $g = du dv$. Réciproquement, si la métrique g est plate, alors X et Y peuvent être choisis parallèles.

Quelle condition différentielle sur σ assure que g est plate.

Montrer que si un seul champ, e.g. X est parallèle, alors g n'est pas nécessairement plate.

Exercice 8. Soit (M, g) une variété lorentzienne. Considérons son recouvrement \mathcal{U} par les futurs de ses points : $\{I^+(x)\}_{x \in M}$.

Montrer que si M est causale, alors \mathcal{U} n'admet pas de sous-recouvrement fini.

Déduire que si M est compacte, alors, elle contient une courbe causale fermée (non-triviale).

Est-il vrai que par tout point passe une courbe causale fermée ?

Décrire un sous-recouvrement de \mathcal{U} dénombrable (et discret, et aussi minimal que possible) dans le cas du plan de Sitter, et dans le cas de d'un produit $(\mathbb{R}, -dt^2) \times N$, où N est une variété riemannienne compacte.