Cours du Mercredi 13 Février (Très préliminaire!)

Contenu: - Cône géométrique - Temps - $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$.

1. Cône géométrique

$\exp_x$ définie sur un ouvert de T_xM,
$x(t) = \exp tu$ est la géodésique déterminée par $u \in T_xM$.

1.1. **Convexité.** $U \subset M$ est convexe, si $\forall x \in U$, il existe $\mathcal{U}_x$ étoilé dans T_xM, $\exp_x : \mathcal{U}_x \to U$ difféomorphisme.

Existence: tout x admet un système fondamental de voisinage convexes (au sens d'une connexion donnée).

Sphères et cônes tangents: Ici $r \leq 0$,
$S_x(r) = \{u \in T_xM, g_x(u,u) = r,\ u$ pointe vers le futur$\}$

$S(0)$ = cône isotrope

$Tim_x^+ \subset Cau_x \subset T_xM$, cônes temporel et causal (tangents)

Cônes et sphères géométriques.

U est supposé convexe.

Cône géométrique causal futur: $\mathcal{C}_U^+(x) = \exp_x(Cau_x \cap \mathcal{U}_x)$

Cône géométrique temporel futur....

Sphère géométrique: $\mathcal{S}_x(r) = \exp_x(S_x(r) \cap \mathcal{U}_x)$

Théorème. *Si U est convexe, alors, le futur causal est égal au cône géométrique (futur causal):* $C_U^+(x) = I^+(x)$ ....

Corollaire: si $p \leq q$, alors il existe une courbe causale géodésique par morceaux joignant p à q.

- $p < q,\ q \ll r \Rightarrow p \ll r$.

- Si $q \in J^+(p) \setminus I^+(p)$, alors il existe une géodésique lumière...

Preuve (du théorème)

Lemme de Gauß: L'image par $\exp_x$ ressemble au cas Minkowski: - Les sphères $\mathcal{S}_x(r)$ sont orthogonaux aux rayons géodésiques issus de x:
$y = \exp_x u \in \mathcal{S}_x(r)$,

u_y vecteur tangent de la géodésique $\exp_x(tu)$ en y.
Alors $T_y(\mathcal{S}_x(r)) = (u_y)^\perp$.

Donc:

- Les sphères géométriques sont de type espace,

- Le futur d'un point d'une telle sphère ne (re-)coupe pas la sphère, donc contenu dans le cône géométrique....

1.1.1. *Géométrie du bord du cône géométrique.* Il est dégénéré (lemme de Gauß).
Il contient les géodésiques isotropes issues de x (par définition).
Ce sont les seules courbes isotropes contenues dans le bord.

Corollaire: Invariance conforme des géodésiques de lumière.

2. TEMPS(S)

Rappel: $T : M \to \mathbb{R}$ est une fonction temps si pour tout x, $Ker(d_xT)$ est une hyperplan de type espace $\iff$ $\nabla_x T$ est de type temps pointant vers le passé....

REM: T croit le long de toute courbe causale.
En particulier, si T existe, alors M est causale.

Définition topologique: $T : M \to \mathbb{R}$ continue est une fonction temps topologique (i.e au sens topologique) si T croit strictement le long de toute courbe causale.

L'ancienne définition; temps différentiable...

Courbe inextensible: une courbe paramétrique est inextensible s'il ne peut se prolonger à un intervalle plus large que son domaine de définition. Ici, une courbe causale est inextensible si elle est en tant que courbe géométrique, i.e. elle est inextensible, même en changeant de paramétrisation.

Temps de Cauchy (Top ou Diff): $T : M \to I =]a, b[\subset \mathbb{R}$, telle que la restriction de T à toute courbe causale inextensible soit une bijection sur $]a, b[$.

La Théorie:

(1) Raffinement des axiomes de causalité
(2) Existence: critère d'existence de (diverses) fonctions temps, vs axiomes de causalité
(3) Régularité: Top = Diff (terminologie: Top: fonction temps, Diff: fonction temporelle?) (la preuve est un feuilleton riche en rebondissements, i.e. de preuves incorrectes[1]...)
(4) Réminiscences Dynamiques:

Mots clés

1) Causalité:

Causalité forte

Causalité stable

[1] Voir Bernal & Sanchez

• Hyperbolicité globale, au sens de: compacité des intervalles “fermés” $J^+(p) \cap J^-(q)$ (l’espace-temps ordonné ressemble à un segment...)

2) Existence:

Causalité stable $\iff$ Temps (Théorème de Hawking)

• Hyperbolicité globale $\iff$ Temps de Cauchy (Théorème de Geroch)

• Autre critère: (Hyper-)Surface de Cauchy $\iff$ Temps de Cauchy

Définition: une surface de Cauchy est un sous-ensemble fermé qui coupe exactement une fois toute courbe causale inextensible. On ajoute parfois que ce soit une hyeprsurface lisse de type espace.

3) Systèmes dynamiques. Le parallèle de ces conditions se traduit par le fait d’avoir une “faible dynamique”, e.g. absence de:

Points non-errants (vs causalité forte)

Points récurrents par chaîne (causalité stable)

• Section (de Poincaré) globale, Propreté (de l’action)... (vs globale hyperbolicité).

Outils: Mthodes constructives, Hahn-Banach... [2]

Formalisme dynamique...

2.1. **Exercices.**

1) Soit $f : M \to \mathbb{R}$ une submersion. Montrer qu’il existe une métrique lorentzienne pour laquelle f est une fonction temps.

2) Surfaces ouvertes: toute surface ouverte admet une métrique lorentzienne ayant un temps. Indication: une telle surface admet une submersion sur $\mathbb{R}$ (et également sur $\mathbb{R}^2$). Pour la preuve, considérer une fonction: $h : M \to \mathbb{R}$, une fonction à singularités isolées, e.g. une fonction de Morse. En enlevant de la surface des courbes contenant ces singularités, on obtient une submersion. Montrer qu’il est possible de choisir de telles courbes, allant à l’infini, de telle façon que la surface définie est difféomorphe à la surface initiale).

3) Un temps de Cauchy définit une fibration sur $\mathbb{R}$. En particulier, M est difféomorphe à un produit $\mathbb{R} \times N$.

À retenir (et à re-venir)

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Surface de Cauchy}\\ \text{Temps de Cauchy}\\ \text{Espace globalement hyperbolique}\end{array}}$$

[2] Hawking-Ellis (The large scale structure of spacetime), Sullivan (Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds), Barbot (Notes de cours, www.umpa.ens-lyon.fr/˜barbot/), Béguin (www.umpa.ens-lyon.fr/˜zeghib/proceedings.html)

3. Groupes de Lie, ..., $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$

3.1. L'espace anti de Sitter de dimension 3. (Notes §) (AdS_3 et son Le revêtement universel $\widetilde{AdS_3}$.)

AdS_n est la sphère de rayon $\sqrt{-1}$ de $\mathbb{R}^{2,n-1}$

En dimension $(1+3)$,
$AdS_3 \to -(t^2+x^2)+y^2+z^2=-1$

$\phi_\theta : (t,x,y,z) \to (R_\theta(t,x),y,z)$, Rotation, axe (2-plan) de rotation $\{y,z\}$

– Considérons dans $\{x,y,z\}$ le graphe de $f : (y,z) \to x = \sqrt{1+y^2+z^2}$

Il s'identifie à $\mathbb{H}^3 = \{(0,x,y,z)/ -x^2+y^2+z^2=-1\}$

– L' hypersurface engendrée par rotation du graphe autour du 2-plan $\{y,z\}$ est: AdS_3

Figure: Une section 3-dimensionnelle de AdS_3: prendre $z=0 \to$ une surface de révolution dans $Min^{1,2}$ isométrique à dS_2.

3.1.1. *Revêtement universel.*

Revêtement:

$(t,u) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \mapsto (\sqrt{(1+\mid u\mid^2}\cos t, \sqrt{(1+\mid u\mid^2}\sin t, u) \in AdS_3 \quad (u=(y,z))$

$T : (t,u) \to t$ est un temps Killing.

Les niveaux de T sont isométrique à $\mathbb{H}^3$.

Figure?

3.1.2. $SL(2,\mathbb{R})$.

$\mathcal{A} = End(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{*2}$, matrices 2×2, une algèbre.

$Q(a) = \det(a)$ forme quadratique sur $\mathcal{A}$

$G = SL(2,\mathbb{R})\times SL(2,\mathbb{R})$ agit isométriquement:

$(A,B).a = AaB^{-1}$

Identifications.

$a = \begin{pmatrix} t' & y' \\ x' & z' \end{pmatrix}$, $Q(a) = t'z' - x'y' \to -t^2-x^2+y^2+z^2$

$(\mathcal{A},Q) \cong \mathbb{R}^{2,2}$,

$G \cong O(2,2)$

$\{Q(a)=1\} \cong AdS_3$

Mais, $\{Q(a)=1\} = \{A \in End(\mathbb{R})^2, \det A = 1\} = SL(2,\mathbb{R})$.

Donc $SL(2,\mathbb{R}) \cong AdS_3$, la métrique induite est Lorentz..

L'action de $G = SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R})$ sur $SL(2,\mathbb{R})$ s'identifie à l'action gauche-droite:

$((g,h),A) \in (SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R})) \times SL(2,\mathbb{R}) \mapsto gAh^{-1}$

- La métrique est bi-invariante...

L'ordre sur $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$.

$SL(2,\mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{S}^1$.

$\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$ agit sur $\mathbb{R}$. Il contient toutes les translations (qui proviennent de son sous-groupe $SO(2)$). Tous ses éléments commutent avec la translation $x \to x+1$ (qui engendre le groupe fondamental de $\mathbb{S}^1$ revêtu par $\mathbb{R}$).

On peut définir un ordre: $f \geq g \iff f(0) \geq g(0)$,

C'est un ordre invariant à gauche (tous les éléments de $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$ sont croissants).

L'ordre bi-invariant est telle que le futur de l'élément neutre:

$I^+(Id) = \{g$ conjugé à une translation, et $g(0 > 0\}$

3.2. **Métriques invariantes sur les groupes de Lie.** G groupe de Lie,

Translations à gauche et à droite L_g, R_g

Métriques pseudo-riemanniennes invariantes à gauche

Métriques bi-invariantes

3.3. $SO(3)$**,** $\mathbb{S}^3$**,** $SL(2,\mathbb{R})$**...**

$\mathcal{B} = M_{22}(\mathbb{C})$, algèbre des matrices 2×2 complexes.

$H = \{\begin{pmatrix} u & -\bar{v} \\ v & \bar{u} \end{pmatrix}, u, v \in \mathbb{C}\}$ est une sous-algèbre isomorphe au corps des quaternions (H = Hamilton).

La métrique induite est Riemannienne,

La sphère unité $\mathbb{S}^3$ est un groupe,

- Duality: $\mathbb{S}^3$ et $SL(2,\mathbb{R})$ sont sous-groupes de $SL(2,\mathbb{C})$.

Exo (voir Notes): $\mathbb{S}^3$ *est le revêtement universel de* $SO(3)$.
$\mathbb{S}^3 \cong SU(2)$ *(Montrer que* $SU(2)$ *agit transitivement librement sur* $\mathbb{S}^3$.

(En général, le revêtement universel de $SO(n)$ est à deux feuillets (revêtement double). Ce groupe est $Spin(n)$. Sa plus petite représentation fidèle vit dans un espace de dimension $> n$, dit espace des spineurs...).

3.3.1. *Algèbres de Lie.*