

Variétés anti-de Sitter de dimension 3 possédant un champ de Killing non trivial

François SALEIN

UMPA, UMR 128, ENS Lyon, 46, allée d'Italie, 69364 Lyon CEDEX 07.
E-mail : fsalein@umpa.ens-lyon.fr

Résumé. Le but de cette Note est de trouver toutes les variétés anti-de Sitter compactes de dimension 3 possédant un champ de Killing non trivial.

Anti-de Sitter 3-manifolds with non-trivial Killing field

Abstract. *The aim of this Note is to find all compact 3-dimensional anti-de Sitter manifolds admitting a non-trivial Killing field.*

Abridged English Version

Anti-de Sitter manifolds are Lorentz manifolds with constant negative curvature. The three-dimensional ones are modeled on $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{PSL}_2$ endowed with its Killing form, whose isometry group is essentially $G = \mathrm{PSL}_2 \times \mathrm{PSL}_2$, acting by multiplication on the left and by multiplication of the inverse on the right.

The first examples of closed anti-de Sitter 3-manifolds are obtained by quotienting the universal covering $\widetilde{\mathrm{PSL}}_2$ of PSL_2 , by one of its discrete cocompact subgroups $\tilde{\Gamma}$ acting by multiplication on the left. Non-standard deformations of such examples have been discovered by E. Ghys and W. M. Goldman (see [4] and [6]). They are obtained as quotients of $\widetilde{\mathrm{PSL}}_2$ by $\mathrm{Graph}(\tilde{\Gamma}, \tilde{\rho}) = \{(x, \tilde{\rho}(x)), x \in \tilde{\Gamma}\}$, where $\tilde{\rho}$ is a representation of $\tilde{\Gamma}$, near the trivial representation and with an abelian image in PSL_2 . The aim of this Note is to show how far such deformations of the trivial representation can be extended.

B. Klingler recently generalised a result of Y. Carrière and showed that Lorentz structures with constant curvature are geodesically complete (see [3] and [7]). So the universal cover of anti-de Sitter 3-manifolds is $\widetilde{\mathrm{PSL}}_2$ and the study of such closed manifolds reduces to an algebraic problem on quotients of $\widetilde{\mathrm{PSL}}_2$ by discrete isometry subgroups acting freely, properly and cocompactly.

In fact, Kulkarni and Raymond showed (see [9]) that such a manifold is obtained, up to finite cover, as a quotient of PSL_2 by a subgroup of G , $\mathrm{Graph}(\Gamma, \rho) = \{(x, \rho(x)), x \in \Gamma\}$, where Γ is a

Note présentée par Étienne GHYS.

F. Salein

subgroup of PSL_2 isomorphic to the fundamental group of a closed surface, and ρ is a representation of this subgroup in PSL_2 .

If such a group acts properly, freely and cocompactly, the representation will be called *admissible*.

A Killing field on a Lorentz manifold is a vector field generating an isometric flow. Since non-trivial Killing fields on PSL_2 are those fields generated by one-parameter subgroups of G , the study of closed anti-de Sitter 3-manifolds admitting a non-trivial Killing field reduces to finding all admissible representations in one-parameter subgroups (*i.e.* abelian subgroups).

THEOREM 2.1 [Classification of abelian admissible representations]. – *Admissible representations ρ in one-parameter subgroups are:*

- all elliptic or parabolic representations,
- hyperbolic representations ρ such that $\rho(\gamma)$ is $\left[\begin{pmatrix} e^{u(\gamma)/2} & 0 \\ 0 & e^{-u(\gamma)/2} \end{pmatrix} \right]$ (up to conjugation) and $u \in Hom(\Gamma, R)$ is in the open unit-ball of the stable norm (see [1] and 3.2 further) $\| \cdot \|_s$ of $H^1(S, R)$.

COROLLARY 2.2 [Classification of closed anti-de Sitter 3-manifolds admitting a non-trivial Killing field]. – *Up to finite cover, these are quotients of PSL_2 by the graph of a representation of a subgroup Γ described in the theorem 2.1.*

1. Introduction

Les variétés anti-de Sitter sont les variétés lorentziennes à courbure négative constante. En dimension 3, elles sont modélées sur $PSL_2(R)$ (noté PSL_2) muni de sa forme de Killing, dont le groupe d'isométrie est essentiellement $G = PSL_2 \times PSL_2$, qui agit par multiplication à gauche, et par multiplication à droite par l'inverse.

Les premiers exemples de variétés anti-de Sitter fermées de dimension 3 sont obtenus en quotientant le revêtement universel \widetilde{PSL}_2 de PSL_2 par un de ses sous-groupes discrets cocompacts $\tilde{\Gamma}$ agissant par multiplication à gauche. Les déformations non-standard de tels exemples ont été découvertes par E. Ghys et W. M. Goldman (*voir* [4] et [6]). Elles sont obtenues en quotientant \widetilde{PSL}_2 par $Graph(\tilde{\Gamma}, \tilde{\rho}) = \{(x, \tilde{\rho}(x)), x \in \tilde{\Gamma}\}$, où $\tilde{\rho}$ est une représentation de $\tilde{\Gamma}$, proche de la représentation triviale et à image abélienne dans \widetilde{PSL}_2 . Le but de cette note est de montrer jusqu'où de telles déformations de la représentation triviale peuvent être prolongées.

B. Klingler a généralisé récemment un résultat de Y. Carrière et a montré la complétude des structures lorentziennes à courbure constante (*voir* [3] et [7]). Ainsi, le revêtement universel des variétés anti-de Sitter de dimension 3 est \widetilde{PSL}_2 , et l'étude de telles variétés fermées se ramène à un problème algébrique sur les quotients de \widetilde{PSL}_2 par des sous-groupes discrets d'isométries agissant librement, proprement et de façon cocompacte.

En fait, Kulkarni et Raymond ont montré (*voir* [9]) qu'une telle variété compacte est obtenue, modulo un revêtement fini, comme quotient de PSL_2 par un sous-groupe de G , $Graph(\Gamma, \rho)$, où Γ est un sous-groupe de PSL_2 , isomorphe au groupe fondamental d'une surface fermée, et ρ une représentation de ce sous-groupe dans PSL_2 .

Si un tel groupe agit proprement, librement et donne un quotient compact, la représentation sera dite *admissible*.

Un champ de Killing sur une variété lorentzienne M est un champ de vecteur engendrant un flot isométrique. Comme les seuls champs de Killing non triviaux sur PSL_2 sont ceux engendrés par les sous-groupes à un paramètre de G , l'étude des variétés anti-de Sitter de dimension 3 admettant

un champ de Killing non trivial équivaut à trouver toutes les représentations admissibles dans des sous-groupes à un paramètre (*i.e.* les sous-groupes abéliens).

Notations. – Si A est un élément de $SL_2(R)$, son image dans PSL_2 sera notée $[A]$. La matrice 2-2 diagonale de diagonale (e^l, e^{-l}) sera notée $Exp(l)$ de même que sa projection dans PSL_2 .

Le demi-plan de Poincaré H^2 sera muni de la distance hyperbolique d_{H^2} .

Dorénavant, Γ sera un sous-groupe de PSL_2 discret cocompact sans torsion, c'est-à-dire isomorphe au groupe fondamental d'une surface $S = H^2/\Gamma$. À chaque élément γ de Γ est associée une géodésique fermée sur S dont la longueur $\inf_{x \in H^2} d(x, \gamma(x)) = 2ch(1/2 \operatorname{tr}(\gamma))$ sera notée $t(\gamma)$.

2. Principaux résultats

THÉORÈME 2.1 [Classification des représentations abéliennes admissibles]. – *Les représentations admissibles ρ dans des groupes à un paramètre sont :*

- toutes les représentations elliptiques ou paraboliques,
- les représentations hyperboliques de la forme $\rho(\gamma) = \operatorname{Exp}(u(\gamma)/2)$ (à une conjugaison près) telles que $u \in \operatorname{Hom}(\Gamma, R)$ appartienne à la boule unité ouverte de la norme stable (voir [1] et 3.2 plus bas) $\| \cdot \|_s$ définie sur $H^1(S, R)$.

COROLLAIRE 2.2 [Classification des variétés fermées anti-de Sitter de dimension 3 admettant un champ de Killing non trivial]. – *Modulo revêtement fini, ce sont les quotients de PSL_2 par le graphe d'une représentation d'un sous-groupe Γ décrite dans le théorème 2.1.*

Interprétations. – Dans le cas d'une représentation dans un sous-groupe à un paramètre, le flot engendré par ce sous-groupe dans PSL_2 passe au quotient. Ainsi, dans le cas hyperbolique, à chaque élément $\gamma \in \Gamma$ est associée une orbite périodique dans le quotient de période $|t(\gamma) - |u(\gamma)||$, où $t(\gamma)$ est la longueur de la géodésique fermée dans S associée à γ . Lorsque l'on déforme la représentation triviale le long d'une représentation abélienne hyperbolique, la dégénérescence est obtenue seulement lorsqu'il apparaît un h de $H_1(S, R)$ tel que $u(h) = 1$. Pour les points rationnels h , cette condition exprime le fait qu'une géodésique fermée dans le quotient devient de période nulle. De plus, il n'y a pas de régénérescence (*i.e.* pas de représentations admissibles telles que $t(\gamma) - |u(\gamma)| < 0$).

THÉORÈME 2.3. – *L'ensemble des représentations admissibles est un ouvert de $\operatorname{Hom}(\Gamma, PSL_2)$.*

3. Démonstrations

3.1 Démonstration du théorème 2.3

On note π l'application de revêtement lorentzien de \widetilde{PSL}_2 sur PSL_2 , et \tilde{G} le groupe $\widetilde{PSL}_2 \times \widetilde{PSL}_2$ quotienté par le sous-groupe engendré par (h, h) , où h est un générateur du centre de \widetilde{PSL}_2 ; c'est un sous-groupe d'indice 4 du groupe des isométries lorentziennes de \widetilde{PSL}_2 . Soit ρ_0 une représentation admissible de Γ , $\operatorname{Graph}(\Gamma, \rho_0)$ son graphe dans $G = PSL_2 \times PSL_2$ et $\{a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g\}$ un système de générateurs de Γ . Soient $\tilde{a}_i, \tilde{b}_i, \rho_0(\tilde{a}_i), \rho_0(\tilde{b}_i)$ des relevés à \widetilde{PSL}_2 respectivement de $a_i, b_i, \rho_0(a_i), \rho_0(b_i)$; alors le relevé de $\operatorname{Graph}(\Gamma, \rho_0)$ à \tilde{G} , $\operatorname{Graph}(\Gamma, \rho_0)$ est engendré par $\{[(\tilde{a}_i, \rho_0(\tilde{a}_i))], [(\tilde{b}_i, \rho_0(\tilde{b}_i))], [(h, id)], i \in \{1, g\}\}$.

La variété $M_0 = PSL_2/\Gamma_0$ est ainsi munie d'une $(\tilde{G}, \widetilde{PSL}_2)$ -structure, donc d'une application développante, $\operatorname{Dev} : \widetilde{PSL}_2 = \tilde{M}_0 \rightarrow \widetilde{PSL}_2$ qui est un difféomorphisme local équivariant par rapport au morphisme d'holonomie $h_0 \in \operatorname{Hom}(\pi_1(M_0), \tilde{G})$ (voir [10] et [6]). Ici l'holonomie est un isomorphisme de $\pi_1(M_0)$ sur $\operatorname{Graph}(\Gamma, \rho_0)$. D'après un principe observé par Ehresmann (voir [10], [6] et [5]), il existe un voisinage U de h_0 dans la variété réelle-analytique $\operatorname{Hom}(\pi_1(M_0), \tilde{G})$ tel que tout élément

F. Salein

de U soit l'holonomie d'une $(\tilde{G}, \widetilde{\text{PSL}}_2)$ -structure sur M_0 . Il existe donc un voisinage W de ρ_0 dans $\text{Hom}(\Gamma, \text{PSL}_2)$, tel que toute représentation de W donne un isomorphisme de $\text{Graph}(\Gamma, \rho_0)$ sur $\text{Graph}(\Gamma, \rho)$ proche de l'identité, et donc un isomorphisme h_ρ de $\pi_1(M_0)$ sur $\text{Graph}(\Gamma, \rho)$ dans U . De plus, toute structure lorentzienne de courbure constante est complète (voir [7]); donc la nouvelle application développante, d'holonomie h_ρ , est un revêtement, donc un difféomorphisme de $\widetilde{\text{PSL}}_2$ sur lui-même qui envoie $\pi_1(M_0)$ sur $h_\rho(\pi_1(M_0))$, qui est le relevé à \tilde{G} du graphe de ρ dans G . Ainsi, $\widetilde{\text{PSL}}_2/\pi_1(M_0) = M_0$ est difféomorphe à $\text{PSL}_2/h_\rho(\pi_1(M_0)) = \text{PSL}_2/\text{Graph}(\Gamma, \rho)$, ρ est donc admissible.

3.2 Démonstration du théorème 2.1

Remarque. – Comme $\text{Graph}(\Gamma, \rho)$ est discret dans G et sans torsion, la liberté de son action sur PSL_2 découle de la propreté.

Soit ρ une représentation abélienne telle que $\text{Graph}(\Gamma, \rho)$ agisse proprement, librement sur PSL_2 . Le revêtement universel du quotient M_ρ est topologiquement R^3 et son groupe fondamental $\pi_1(M_\rho)$ est isomorphe au groupe fondamental de la variété compacte PSL_2/Γ . Ainsi, $H_3(\pi_1(M_\rho), R) \neq 0$ et l'action de $\text{Graph}(\Gamma, \rho)$ est cocompacte.

Le problème d'admissibilité est invariant par conjugaison de ρ par un élément de PSL_2 .

3.2.1 Cas elliptique ou parabolique

Dans le cas elliptique, on peut construire sur PSL_2 une métrique riemannienne g invariante par $\text{Graph}(\Gamma, \rho)$ qui agit alors de façon propre comme sous-groupe discret des isométries de g .

Le Cas parabolique, modulo une conjugaison, ramène à : $\gamma \mapsto \begin{bmatrix} 1 & u(\gamma) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, où $u \in \text{Hom}(\Gamma, R)$.

Or, en conjugant ρ par $\text{Exp}(-l)$, le morphisme u est changé en $u \cdot e^{-2l}$. Ainsi, ρ est conjuguée à une représentation proche de la représentation triviale. On conclut alors par le théorème 2.3 (voir [6] et [5]).

3.2.2 Cas hyperbolique

On va utiliser un critère dû, dans le cas général, à Y. Benoist (voir [2]).

LEMME 3.1 [Critère de propreté]. – *Le sous-groupe $\text{Graph}(\Gamma, \rho)$ de G agit proprement sur PSL_2 si et seulement si :* (1) $\lim_{l(\gamma) \rightarrow \infty} |l(\gamma) - l(\rho(\gamma))| = +\infty$, où $l(\gamma) = d_{H^2}(i, \gamma(i))$.

Démonstration. – Remarquons que, si $\gamma \in \text{PSL}_2$ est tel que $\gamma = O_1 \cdot \text{Exp}(l/2) \cdot O_2$, avec $O_1, O_2 \in \text{PSO}(2)$, alors $l = l(\gamma)$, que l est sous-additive et que $l(\gamma) = l(\gamma^{-1})$. Si K est un compact de PSL_2 , pour tout x dans K , $l(\gamma x \rho(\gamma)^{-1}) \geq |l(\gamma) - l(\rho(\gamma))| - \max\{l(y), y \in K\}$; l'action donc est propre si (1) est vérifié.

Réciproquement, si $\text{Graph}(\Gamma, \rho)$ agit proprement sur PSL_2 , on applique la propreté de l'action au compact $K_C = \{x, l(x) \leq C\}$ où $C > 0$. Alors, quelle que soit la suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Gamma$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} l(\gamma_n) = +\infty$, il existe $x_n \in \text{PSO}(2)$ tel que $l(\gamma_n x_n \rho(\gamma_n)^{-1}) = |l(\gamma_n) - l(\rho(\gamma_n))|$; donc, pour n assez grand, $|l(\gamma_n) - l(\rho(\gamma_n))| \geq C$, et ceci quel que soit C ; (1) est donc vérifié.

DÉFINITION 3.2 (voir [1] et [9]). – *La norme stable sur $H_1(S, R)$ est définie comme suit :*

$$\text{si } h \in H_1(S, Z), \|h\|_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \inf \{t(\gamma_n), \text{ où } \gamma_n \in \Gamma = \pi_1(S) \text{ représente } nh\}$$

Ensuite, on étend cette définition par homogénéité aux points rationnels de $H_1(S, R)$, puis par uniforme continuité à tout $H_1(S, R)$. Sur $H^1(S, R)$, la norme stable est définie par dualité.

LEMME 3.3 [Non régénérescence des représentations hyperboliques]. – *Si une représentation hyperbolique de la forme $\rho(\gamma) = \text{Exp}(u(\gamma)/2)$ est admissible alors, pour tout γ élément de Γ , $|u(\gamma)| < t(\gamma)$.*

Variétés anti-de Sitter de dimension 3 possédant un champ de Killing non trivial

Démonstration. – Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, alors

$$l(A) = 2 \log(1/2(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2} + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2})).$$

Comme tout élément γ de Γ est hyperbolique, pour que l'action soit libre il faut que $\rho(\gamma)$ et γ ne soient pas conjugués, donc que $l(\rho(\gamma)) = t(\rho(\gamma)) = |u(\gamma)| \neq t(\gamma)$ pour tout γ non trivial.

Soient $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, deux éléments ne commutant pas; alors $\gamma_1 = P.\text{Exp}(t(\gamma_1)/2).P^{-1}$ et $\gamma_2 = Q.\text{Exp}(t(\gamma_2)/2).Q^{-1}$ avec $P^{-1}Q = A$, aucune des deux diagonales n'étant nulle. Si on note $u(\gamma_i) = u_i$ et $t(\gamma_i) = t_i$, nous obtenons, comme condition nécessaire, que :

$$\lim_{l(\gamma_1^{n_1}, \gamma_2^{n_2}) \rightarrow +\infty} l(P.\text{Exp}(n_1 t_1/2).P^{-1}Q.\text{Exp}(n_2 t_2/2).Q^{-1}) - |n_1 u_1 + n_2 u_2| = \pm\infty.$$

soit

$$\lim_{l(\gamma_1^{n_1}, \gamma_2^{n_2}) \rightarrow +\infty} l\left(\begin{bmatrix} a.e^{\frac{1}{2}(n_1 t_1 + n_2 t_2)} & b.e^{\frac{1}{2}(n_1 t_1 - n_2 t_2)} \\ c.e^{\frac{1}{2}(n_2 t_2 - n_1 t_1)} & d.e^{-\frac{1}{2}(n_1 t_1 + n_2 t_2)} \end{bmatrix}\right) - |n_1 u_1 + n_2 u_2| = \pm\infty.$$

On peut simplifier l'expression de la manière suivante : Si $a \neq 0$ alors $l(\gamma_1^{n_1}, \gamma_2^{n_2}) = n_1 t_1 + n_2 t_2 + O(1)$ quand n_1 et n_2 tendent vers $+\infty$. Si $a = 0$, alors $d \neq 0$ car a et d ne sont pas simultanément nuls. Alors, en remplaçant γ_1 et γ_2 par leurs inverses, on obtient : $l(\gamma_1^{n_1}, \gamma_2^{n_2}) = n_1 t_1 + n_2 t_2 + O(1)$ quand n_1 et n_2 tendent vers $+\infty$.

On obtient donc comme condition nécessaire pour la propriété :

$$(2) \quad \forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma \text{ ne commutant pas, } \lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} |n_1 t_1 + n_2 t_2 - |n_1 u_1 + n_2 u_2|| = +\infty.$$

Comme Γ n'est pas abélien, $u \in \text{Hom}(\Gamma, R)$ est non injectif; il existe donc un élément de γ_1 de Γ , tel que $|u_1| < t_1$.

Supposons qu'il existe un élément γ_2 de Γ tel que $|u_2| > t_2$. Alors il ne commute pas avec γ_1 et comme $l(\gamma_1^{n_1}, \gamma_2^{n_2}) = l(\gamma_2^{-n_2}, \gamma_1^{-n_1})$, on peut supposer $u_1 > 0$.

Si $u(\gamma_1)$ et $u(\gamma_2)$ sont de même signe (positif), on peut alors choisir n_1 et n_2 arbitrairement grands et tels que $n_1(t_1 - u_1) + n_2(t_2 - u_2) = |n_1 t_1 + n_2 t_2 - |n_1 u_1 + n_2 u_2||$ reste borné. Ceci contredit le critère de propriété (2).

Si $u(\gamma_1)$ et $u(\gamma_2)$ sont de signes opposés, de même on peut choisir n_1 et n_2 arbitrairement grands tels que $n_1 u_1 + n_2 u_2$ reste négatif (i.e. $n_1/n_2 < -u_2/u_1$) et que $n_1(t_1 + u_1) + n_2(t_2 + u_2)$ reste borné (comme $(-u_2 - t_2)/(t_1 + u_1) < -u_2/u_1$ il suffit que $n_1/n_2 = (-u_2 - t_2)/(t_1 + u_1) + O(1/n_2)$). Ceci contredit (2). Ainsi, pour que l'action soit propre, il faut, pour tout élément $\gamma \in \Gamma$, que $|u(\gamma)| < t(\gamma)$.

THÉORÈME 3.4. – *Les représentations hyperboliques sont de la forme $\rho(\gamma) = \text{Exp}(u(\gamma)/2)$ (à conjugaison près) et sont admissibles si et seulement si u est dans la boule unité ouverte de la norme stable de $H^1(S, R)$.*

Démonstration. – D'après le lemme précédent, si la représentation ρ est admissible, pour tout γ élément de Γ , $|u(\gamma)| < t(\gamma)$, soit, pour tout h dans $H_1(S, Z)$,

$$|u(h)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n \inf\{t(\gamma)/\gamma \text{ représente } nh\},$$

c'est-à-dire $|u(h)| \leq \|h\|_s$, soit $\|u\|_s \leq 1$, mais, d'après le théorème 2.3, l'ensemble est ouvert donc $\|u\|_s < 1$. Réciproquement, si $\|u\|_s < 1$, alors pour tout γ de Γ , $|u(\gamma)| \leq \|u\|_s t(\gamma)$ et

F. Salein

$|u(\gamma)| \leq \|u\|_s l(\gamma)$, soit $\lim_{l(\gamma) \rightarrow \infty} l(\gamma) - |u(\gamma)| = +\infty$. La représentation est donc admissible d'après le lemme 3.1. Ceci démontre le lemme 3.4 et le théorème 2.1.

Remerciements. Je remercie Abdelghani Zeghib pour son encadrement, ses encouragements et ses conseils.

Note remise le 18 septembre 1996, acceptée le 21 octobre 1996.

Références bibliographiques

- [1] **Bangert V., 1989.** Minimal geodesics. *Erodic. Theory Dyamical. Systems*, 10, p. 263-286.
- [2] **Benoist Y., juin 1995.** Actions propres sur les espaces homogènes réductifs. *Preprint*.
- [3] **Carrière Y., 1989.** Autour de la conjecture de L. Markus sur les variétés affines. *Invent. Math.*, 95, p. 615-618.
- [4] **Ghys É., 1987.** Flots d'Anosov dont les feuilletages stables sont différentiables. *Ann. Sci. École. Norm. Sup.*, 4^e série, 20, p. 251-270.
- [5] **Ghys É., 1995.** Déformations des structures complexes sur les espaces homogènes de $SL(2, C)$. *J. Reine angew. Math.*, 468, p. 113-138.
- [6] **Goldman W. M., 1985.** Nonstandard Lorentz space forms, *J. Differential Geom.*, 21, p. 301-308.
- [7] **Klinger B., mars 1995.** Complétude des Variétés Lorentziennes à Courbure Constante. *Preprint*.
- [8] **Kulkarni R. S. et Raymond F., 1985.** 3-dimensional Lorentz space-forms and Seifert fiber spaces. *Journal of Differential Geom.*, 21, 231-268.
- [9] **Massart D., juin 1996.** Normes stables des surfaces. *Thèse ENS-Lyon*.
- [10] **Thurston W., 1977.** The geometry and topology of 3-manifolds. *Princeton Univ. Lecture Notes*.