Histoire des immersions isométriques

par Abdelghani Zeghib

Le 15 Juillet 2002

1 Introduction

Ceci est un essai pour retracer l'évolution historique d'un problème central et naturel en géométrie, celui des immersions (et plongements) isométriques. L'auteur avoue et insiste sur son incompétence du point de vue chronologique et culturel (i.e. qu'il n'a point entrepris une recherche documentaire systématique). Il pense cependant que ce travail reste intéressant à accomplir, par des gens plus compétents en la matière, i.e. des historiens des mathématiques.

Je voudrais ici en profiter pour exprimer un avis, partagé par certains collègues, sur cette question : un mathématicien (qui n'est pas historien des mathématiques) est-il habilité à parler de l'histoire de son thème ? Mon approche est, sans croire en un déterminisme (stricte) dans l'évolution de la recherche mathématique, qu'il est intéressant de permettre à un mathématicien pratiquant, ayant quelques repères historiques, d'interpoler, et de reconstituer une histoire idéale du thème de recherche qui est le sien. Cela donnerait l'histoire non pas telle qu'elle s'est déroulé, mais "comme elle aurait du logiquement se dérouler". [1] L'évolution de la recherche dans un thème mathématique est certainement monotone (par définition, disait R. Thom), mais il me paraît qu'il existe, généralement, une sorte de "self-similarité", qui fait que chaque chercheur, retrouve personnellement, au fur et à mesure, les idées qui se sont dégagées au cours de l'histoire, dans son thème. Dans ce cas, le chercheur n'est pas seulement un bon modélisateur, mais aussi un témoin naturel, au service de l'historien, du rôle et de l'importance de différentes idées apparues dans l'évolution de son thème.

À l'opposé des textes historiques standards, le présent texte traite le sujet jusqu'aux développements les plus récents. Ce texte reprend l'essentiel d'un exposé, au colloque "Géométrie au XX ème siècle" (Septembre 2001), conçu essentiellement pour parler des diverses contributions de M. Gromov dans le domaine. M. Gromov s'est intéressé aux immersions isométriques dès le début de sa carrière (voir son doctorat publié fragmenté en plusieurs articles autour de 1970). Il y introduit, en particulier sa théorie de h-principe

[1] après tout, le mathématicien modélise des phénomènes de toute nature, en tant que systèmes dynamiques, pour prévoir leurs futurs, et savoir leurs passés.

permettant de montrer l'abondance des immersions isométriques (aussi bien dans le sens sous-entendu ici, i.e. dans le cas riemannnien, que dans le cas de structures géométriques plus générales). J'ai eu la chance de suivre un cours assuré par Gromov sur ce thème, en 1981-82 (à Paris). En 1986, Gromov publie le livre [14], duquel on puisera beaucoup de faits mathématiques cités ici, au lieu de se référer aux publications originelles, car ce livre offre une approche globale et simplifiée.

Je remercie les organisateurs du colloque, notamment P. Nabonnand et D. Flament, pour m'avoir permis d'exposer et rédiger le présent texte. Je remercie également F. Béguin et T. Barbot pour leurs remarques et suggestions.

2 Début de la géométrie extrinsèque

C'est Carl Friedrich Gauss (1777-1855), qui a inauguré, au début du 19 ème siècle, l'étude de la géométrie différentielle et métrique (locale) des surfaces dans l'espace euclidien (3-dimensionel). Il a ainsi introduit la première forme fondamentale (i.e. la métrique induite), quantité, à l'évidence extrinsèque, mais il s'est en même temps posé le problème de déformation rigide, ou plus généralement, d'existence d'applications isométriques, entre surfaces, et qui soient non-triviales, i.e. qui ne proviennent pas d'un déplacement de l'espace ambiant. Il a aussi introduit, la seconde forme fondamentale, une entité également extrinsèque, mais donnant lieu, à sa grande surprise, à un invariant intrinsèque, qui est la courbure (Theorema Egregium). Il reconnaissait, en particulier, une surface à courbure égale à -1, la pseudosphère. Il s'agit de la surface graphe de la fonction

$$(x, y) \to -\sqrt{1 - x^2 - y^2} + \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

3 Naissance de la géométrie non-euclidienne

En parallèle avec les travaux de Gauss en géométrie métrique des surfaces, on n'a pas cessé de travailler sur la géométrie euclidienne plane synthétique, notamment du point de vue de l'indépendance des postulats d'Euclide, plus précisément, la dépendance du cinquième postulat de ces précédents. Il s'agit bien sur de celui stipulant que, d'un point, on peut mener une unique droite parallèle à une droite donnée.

Les arguments pour démontrer ce postulat procédaient par l'absurde, pour arriver à un fait dont l'effet choquant est plus évident. En d'autres termes, on développait et étudiait une géométrie hypothétique (imaginaire), dont on espérait montrer un jour l'évidence de son inexistence.

On avait ainsi développé la trigonométrie de cette géométrie et Gauss avait remarqué que cette trigonométrie (pour des petits triangles) coïncidait avec celle de la pseudo-sphère. Il était seulement gêné par la topologie (non-simplement connexe) et l'incomplétude de cette pseudo-sphère, pour en arriver au but inattendu, i.e. la réalité de la géométrie "imaginaire".

Ce n'est qu'autour de 1830, que fût déclarée l'existence de cette géométrie imaginaire, par Jànos Bolyai (1802-1860, fils du plus célèbre Wolfang Bolyai) et Ivanovich Lobatchovsky (1792-1856), et ensuite l'aval par Gauss de cette découverte. Cette existence n'a pas été démontré de façon formelle (par exemple, en donnant un modèle) mais, en exprimant (avec un courage de braves) que la guerre millénaire contre cette géométrie "imaginaire" était injuste et vaine. Il faudrait au contraire investir ses propriétés, et poursuivre sa construction "positive" tout comme celle de la géométrie euclidienne, et non plus dans le but de la faire écrouler (au profit de cette dernière).

4 Géométrie riemannienne

En introduisant les métriques (dites par la suite) riemanniennes, Riemann révolutionne la géométrie, d'une part, en abandonnant tous les postulats d'Euclide (ce qui revient en termes modernes, à essentiellement relaxer l'hypothèse d'homogéinéité locale d'une géométrie ; la contre-révolution à cette idée fût entreprise, dans un certain sens par F. Klein dans son programme d'Erlangen) ; et d'autre part, en munissant une surface (en se restreignant au cas 2-dimensionel) d'un champ de formes quadratiques définies positives, qui ne correspond pas nécessairement à la première forme fondamentale d'une réalisation de cette surface dans l'espace.

5 Modèles de géométrie hyperbolique

Il a donc fallu attendre l'introduction des métriques riemanniennes pour montrer l'existence de la géométrie non-euclidienne plane, et ce en l'exprimant comme métrique riemannienne sur le disque. Ceci fût réalisé par E. Beltrami en 1868, donc presque 40 ans après la "naissance" de cette géométrie. Ceci donne donc une preuve formelle du fait que cette nouvelle géométrie est aussi consistante (ou inconsistante) que la géométrie euclidienne elle même. F. Klein introduit ensuite son modèle projectif (1871), en outrepassant, les métriques riemanniennes, et revenant à l'approche synthétique. H. Poincaré (1854-1912), introduit son modèle conforme, de la géométrie non-euclidienne, en tant que métrique riemannienne sur le disque. Mais le modèle le plus simple dû également à Poincaré, et dit (maintenant) demi-plan de Poincaré noté $\mathbb{H}^2$, est celui où la métrique est définie sur le demi-plan supérieur de $\mathbb{R}^2$ par le formule :

$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

Désormais, on utilisera la terminologie moderne *géométrie hyperbolique* (plane) pour désigner cette géométrie non-euclidienne, même si l'auteur ignore l'historique de cette transformation terminologique (à propos de l'évolution terminologique, il est remarquable, qu'un siècle après, M. Gromov introduit une notion de groupes (et espaces) hyperboliques, au sens large, au point où le terme "variété hyperbolique" devient un peu confus, tout comme le terme "géométrie non-euclidienne" était un peu péjoratif !).

6 Problème d'immersions isométriques

On a ainsi vérifié que la pseudo-sphère est localement isométrique au demi-plan de Poincaré. Il paraît ainsi naturel de se poser la question :

"Y-a-t-il une surface dans l'espace (euclidien de dimension 3) qui soit globalement isométrique au demi-plan de Poincaré ?"

De surcroît, la question peut se poser pour une surface quelconque munie d'une métrique riemannienne (au lieu du demi-plan de Poincaré). Une réponse positive à cette question reviendrait à dire que Riemann n'a pas inventé plus de surfaces que Gauss.

7 Obstructions : Théorème de Hilbert

Heureusement (ou malheureusement) Hilbert (1901) [18] a montré que la réponse à cette question est négative. Plus précisément, il n'existe pas dans l'espace une surface, de classe C^2, qui soit globalement isométrique au demi-plan de Poincaré. Faisons, un saut dans le temps pour citer quelques développements de la théorie des obstructions aux immersions isométriques. D'abord l'énoncé de Hilbert a été généralisé, par Efimov (1964) [6] (et revu par T. Milnor (1972) [25], voir aussi Schlencker [32] pour une généralisation dans un autre sens) en remplaçant, le demi-plan de Poincaré par une surface complète à courbure pincée entre deux nombres (strictement) négatifs

Il n'est cependant pas encore connu si *le demi-plan de Poincaré peut se plonger isométriquement dans l'espace euclidien* $\mathbb{R}^4$. En revanche, le théorème d'Efimov est faux dans ce cas là.

D'après Rosendorn (1960) $\mathbb{H}^2$ *s'immerge* isométriquement dans $\mathbb{R}^5$. Plus généralement, l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$ s'immerge isométriquement dans $\mathbb{R}^{4n-3}$.

Blanusa (1955) a démontré que $\mathbb{H}^2$ se plonge isométriquement de façon C^∞ dans $\mathbb{R}^6$, et ce comme graphe d'une application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$. M. Gromov démontre (sous forme d'exercise ([14], p 277) qu'il existe un plongement isométrique analytique (et propre) de $\mathbb{H}^2$ dans $\mathbb{R}^8$.

On voit ainsi que les questions autour du théorème de Hilbert, qui peuvent être vues comme la motivation originelle de la théorie (des immersions isométriques) ne sont pas encore réglées.

8 Courbure positive, cas des surfaces : rigidité et existence

Les travaux sur la géométrie extrinsèque des surfaces ne se sont pas arrêtés avec Gauss. Citons, à titre d'exemple, l'œuvre colossale de G. Darboux sur ce sujet, au 19 ème siècle, et qui reste source d'inspiration jusqu'à nos jours.

L'une des questions posées depuis cette époque était de voir si certaines surfaces sont rigides, ou au contraire, admettent des deformations isométriques non-triviales (i.e. qui ne soient pas déduites de rotations de l'espaceambient). Ainsi, Cohn-Vossen [4] (voir aussi [3]) démontre la rigidité de la sphère canonique dans l'espace euclidien. Il démontre en fait la rigidité globale de celle-ci (i.e. pas seulement par déformation), en montrant précisément que toute surface complète (ou disons compacte) à courbure positive constante dans l'espace euclidien, est une sphère "ronde". La raison essentielle derrière ce fait est la convexité (globale) des surfaces compactes à courbure positive (même variable). Le résultat optimal de rigidité des hypersurfaces de dimension quelconque est attribué à R. Sacksteder (1962) [31].

Dans le cas de surfaces à courbure positive, on doit à Alexandrov (1944), le commencement de la preuve du résultat d'existence et unicité suivant, avec des contributions de Nirenberg (1953) et Pogorelov. Ce dernier en donne la version définitive en (1969) (où l'on ne suppose pas la métrique partout à courbure positive) :

Si une métrique C^∞ (resp. analytique) sur la sphère S^2 admet une courbure $> k$, alors, elle se plonge de façon C^∞ (resp. analytique) dans l'espace 3-dimensionnel universel (i.e. l'espace complet et simplement connexe) à courbure constante k. Ce plongement est rigide (i.e. unique à congruence près) (voir [14], p 289).

9 Obstructions. cas générique

Le problème d'immersions isométrique d'une variété riemannienne (V^n, g) dans un espace euclidien $\mathbb{R}^q$ se traduit localement, par une application $(x_1, \ldots, x_n) \to (f_1, \ldots, f_q)$, vérifiant le système de $n(n+1)/2$ équations à q inconnues :

$$\langle \frac{\partial f_k}{\partial x_i}, \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \rangle = g_{ij}$$

Ainsi pour une métrique g générique, il n'existe pas de telle immersion s'il y a plus d'équations que d'inconnues, i.e. $q < n(n+1)/2$.

10 Cas analytique : Théorème de Cartan-Janet, systèmes différentielles, et autres approches

Janet [21] démontre en 1926 que, dans le cas analytique (i.e. V et g sont analytiques réelles), le système d'équations des immersions isométriques admet des solutions **locales** dès que $q \geq n(n+1)/2$.

Ce ne serait pas une "erreur historique" d'affirmer qu'Elie Cartan a résolu tous les problèmes **locaux** de la géométrie, à la seule réserve près, d'insister sur le caractère analytique de ses problèmes. En effet, il a développé pour cela sa théorie des systèmes différentielles extérieurs, et a en particulier démontré le théorème d'intégrabilité dit "Théorème de Cartan-Kähler". Cette théorie reste jusqu'à nos jours difficile à pénétrer ! Son contenu analytique est simplement le Théorème de Cauchy-Kowalewka classique, mais ces subtilités algébriques sont "transcendantes".

E. Cartan a effectué les vérifications algébriques, permettant d'appliquer le théorème de Cartan-Kähler, au problème d'immersions isométriques, et a retrouvé ainsi le résultat de Janet (1927). Dans l'article en question [2], Cartan affirme qu'il disposait de cette preuve depuis plusieurs années (on peut en tirer qu'il sous-entendait, avant la parution de celle de Janet). Il rappelle également que c'est Schläffli, qui a énoncé ce théorème pour la première fois en 1871.

Ceci n'a pas empêché la parution de beaucoup d'autres publications plus modernes, simplifiant le travail algébrique d'E. Cartan (voir par exemple [10]).

H. Jacobowitz est parmi ceux ayant fait une brillante carrière d'isométrico-plongeur, tant dans le cas analytique que le cas lisse (voir ci-dessous les répercussions inattendues du travail de Nash). Dans le cas analytique [19, 20], il applique l'esprit de la preuve du théorème de Cartan-Khäler au problème d'immersions isométriques (ainsi que des manipulations algébriques et différentielles figurant déjà dans la preuve de Janet) , en le traduisant en un problème de prolongement de telles immersions.

Ce problème a été en fait considéré par Darboux [5] dans le cas de surfaces. Étant donnée une courbe H contenue dans une surface M, et analytiquement isométriquement plongée dans $\mathbb{R}^3$, à quelle condition ce plongement isométrique se prolonge dans un voisinage de H dans M ? La formule de Gauss, montre que si un tel prolongement existe, alors nécessairement, H est moins courbé dans M que dans $\mathbb{R}^3$ (au sens de la courbure géodésique, pensez par exemple aux courbes géodésiques de M). Darboux démontre que cette condition est également suffisante. Jacobowitz dégage une généralisation de cette condition lorsque H est une hypersurface dans une variété riemannienne. C'est une condition de non-dégénéréscence, à comparer avec la condition de liberté ci-dessous. Si cette condition est satisfaite, on arrive alors à écrire le problème de prolongement, sous forme de système de Cauchy–Kowalewka standard.

11 Cas C^1 : Travaux de Nash (1954) et Kuiper (1955)

En 1954 [27], J. Nash, surprend le monde mathématique, en passant de l'hypothèse courante d'analyticité des immersions isométriques, à la régularité la plus “faible” imaginable, c’est-à-dire C^1. De plus, il passe de considérations locales au problème global. On peut dire que ce fût là la première révolution nashienne dans l’évolution de cette histoire d’immersions isométriques. Ses résultats ont été complétés par N . Kuiper en 1955 [22]. Les deux auteurs montrent ainsi le résultat “incroyable” :

Dès qu’une variété riemannienne (V^n, g) *admet une immersion* différentiable *dans* $\mathbb{R}^q$*, alors, elle admet une immersion isométrique* C^1*, si* $q > n$.

(L’amélioration de Kuiper par rapport à Nash était de passer de $q > n+1$ à $q > n$).

Deux exemples d’applications de ce résultat qui défient l’imagination sont : un tore plat de dimension 2, et le plan hyperbolique, isométriquement plongés dans $\mathbb{R}^3$, ou même dans un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^3$! Ce résultat contredit aussi une vieille conjecture selon laquelle le théorème de rigidité de la sphère s’étend au cas C^1.

Pour “modérer” un peu “l’effet choquant” dans ce résultat, disons qu’à ce niveau de régularité, la courbure, qui est l’invariant infinitésimal principal des métriques riemanniennes, n’a pas de sens. Les obstructions usuelles aux immersions isométriques proviennent de la comparaison de la courbure intrinsèque avec la courbure ambiante, via la formule de Gauss.

12 h-principe de Gromov

La lettre h dans le terme h-principe désigne le mot homotopie (en particulier, elle n’a rien avoir avec la constante de Planck !). Le h-principe est valable pour un système d’équations aux dérivées partielles, dès que toute solution formelle peut être homotopée à une vraie solution (solution holonome). Le concept de solutions formelles a été déjà introduit par E. Cartan, et consiste à considérer les dérivées partielles comme des variables indépendantes.

Le h-principe permet d’avoir des solutions “bon marchés” (suivant les termes de D. Sullivan). Il permet en particulier de montrer l’abondance de solutions, dès qu’il y en a une. M. Gromov, démontre le h-principe sous les hypothèses du théorème de Nash-Kuiper. Cela revient à dire, essentiellement que toute immersion C^1 est C^1-homotope à une immersion isométrique C^1. Plus spectaculaire (mais dans le même esprit), sous certaines conditions topologiques (assez faibles) ajoutées aux hypothèses de Nash-Kuiper,

Toute application continue $V^n \to W^q$*,* $q > n$ *peut être approchée au sens de la topologie* C^0 *(fine dans le cas non-compact) par des immersions isométriques* C^1 *([14], p 204)* .

13 Cas C^k : Grand Théorème de Nash

En 1956 [28], J. Nash révolutionne une deuxième fois la théorie en montrant la possibilité de plongement lisse et global, d’une variété riemannienne quelconque dans un espace euclidien de dimension assez grande. Plus précisément, *soit* (V, g) *une variété riemannienne* C^k, *avec* $3 \leq k \leq \infty$, *alors, elle se plonge* C^k *isométriquement dans* $\mathbb{R}^q$, *dès que :*

$q =\geq \frac{1}{2}n(3n+11)$, *si* V *est compacte,*

$q =\geq \frac{1}{2}n(3n+11)(n+1)$, *si* V *est non-compacte.*

Ce n'est que 10 ans plus tard [29], qu'il démontre le même résultat de plongement (global) dans le cas de variétés *analytiques compactes.*

13.1 Amélioration de $q(n)$ Gromov et Rohlin [13] et [12, 14] améliorent la preuve de Nash, et ainsi démontrent un résultat valable, dans le cas compact ou non, et pour $3 \leq k \leq \omega$, avec $q = n^2 + 10n + 3$. (C^ω signifie analytique). [2]

13.2 Cas C^2 Ainsi, on voit, essentiellement dû à Nash, la possibilité d'immersions C^1 ainsi que C^k, pour $3 \leq k \leq \omega$ dans un espace euclidien. On ne sait encore rien sur le cas C^2. En d'autres termes, on ne sait pas si une métrique C^2 peut être immergée de façon C^2 dans un certain espace euclidien !

13.3 Le h-principe de Gromov Dans l'approche de Nash (et reprise par les autres auteurs), on commence par considérer des applications $f : V^n \to \mathbb{R}^q$ qui sont libres. Cela veut dire que le plan osculateur, i.e. celui engendré par les dérivées partielles de premier et second ordre de f est de dimension maximale, i.e. $\frac{1}{2}n(n+1)+n$. Cela assure en particulier que le système est sous-déterminé, et aussi l'absence de toute obstruction infinitésimale, de type courbure (par exemple dû a la formule de Gauss ou Godazzi, ou ce qui peut s'en déduire).

Gromov démontre [14] le h-principe pour les applications libres isométriques, de V^n dans $\mathbb{R}^q$ dès que $q \geq \frac{1}{2}(n+2)(n+3)$, et ce dès que la classe de différentiabilité k est ≥ 5 (jusqu'au cas analytique), et pour toute variété (compacte ou ouverte).

14 Théorème de la fonction implicite dans les espaces de Fréchet

L'article de 1956 de Nash [28] était écrit de façon "brutale", [3] ce qui a fait dire a M. Gromov, qu'il pense qu'il est le seul à l'avoir vraiment lu [23]

[2]Voir le site : www.math.princeton.edu/jfnj/, où Nash commente une lettre qu'il a reçu en 1998, stipulant que sa preuve donne des immersions qui ne sont pas nécessairement des plongements. De toute façon les améliorations apportées par d'autres auteurs remédient en particulier à ce problème.

[3]La vie de Nash, y compris durant cette période ultra-créative, était très turbulente. On estime que son travail lui vallait la médaille Fields, très probablement déjà en 1958, et certainement en 1962, mais les complications de son état de santé dans cette dernière période l'ont mis "hors jeu". Ce n'est qu'en 1994, qu'il obtient le prix Nobel d'économie, pour un travail sur la théorie de jeux, qu'il a efectué au début de sa carrière. Voir par

Mais, c'est en fait J. T. Schwartz qui a remarqué que cet article contient (implicitement) un théorème de fonction implicite sur les espaces de Fréchet [34]. Ceci n'a pas empêché d'autres mathématiciens à essayer d'expliciter davantage, et d'utiliser dans d'autres domaines ce théorème. Citons à titre d'exemple : Moser, Kolmogorov, Arnold, Sternberg, Jacobowitz, Gromov, R. Hamilton... Le théorème de la fonction implicite sur les espaces de Fréchet porte actuellement le nom du théorème de Nash-Moser (ou même Newton-Nash-Moser, car sa preuve si délicate repose sur la méthode d'itération de Newton). Ce théorème a été utilisé en particulier en systèmes dynamiques dans la preuve du célèbre théorème KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser).

15 Cas pseudo-riemannien

Une variété (V, g) pseudo-riemannienne (ou semi-riemannienne, suivant d'autres terminologies, mais à ne pas confondre avec sous-riemannienne) est telle que g soit un champ de formes quadratiques non-dégénérées de signature (n_-, n_+), i.e. sur tout espace tangent la forme est isomorphe à la forme $-x_1^2 \ldots - x_{n_-}^2 + y_1^2 + \ldots + y_{n_+}^2$ sur $\mathbb{R}^n$, et $n = n_- + n_+$. Un sous-espace tangent $E \subset T_xV$ est isotrope si la forme quadratique g_x y est identiquement nulle. La dimension maximale d'un tel E vaut exactement l'indice de g, $ind(g) = \min(n_-, n_+)$. Il est clair que si une immersion isométrique $(V, g) \to (W, h)$ existe, alors $ind(g) \leq ind(h)$. Moyennant cette condition, Gromov [12] et Greene [11], généralisent toute la théorie de Nash, avec des constantes adaptées (voir l'exposition de [14] qui contient des résultats supplémentaires).

En particulier toute variété pseudo-riemannienne de type (n_-, n_+) *admet un plongement isométrique dans un espace de Minkowski* $\mathbb{R}^{q_-, q_+}$, *i.e. l'espace plat* $\mathbb{R}^q$, $q = q_- + q_+$ *muni partout de la forme :*

$$-x_1^2 \ldots - x_{q_-}^2 + y_1^2 + \ldots + y_{q_+}^2$$

dès que $\min(n_-, n_+) \leq \min(q_-, q_+)$ *et* q *est assez grand.*

Dans le cas d'immersions isométriques C^1, Nash et Kuiper ont utilisé des applications courtes (i.e. lipschitziennes, à constante de Lipschitz 1) qu'ils rendent ensuite isométriques. Dans [14], on arrive à adapter cette notion non-évidente au cas pseudo-riemannien, et ainsi généraliser le théorème de Nash-Kuiper dans le cas C^1, à cette situation.

Mais Greene et Gromov n'étaient pas les seuls à étudier le problème pseudo-riemannien. On peut remarquer à ce propos :

- La preuve du théorème d'immersion local analytique, s'adapte directement au cas pseudo-riemannien, notamment suivant l'approche de Jacobovitz (en formulant le problème sous forme de prolongement).

---

exemple, le site www-gap.dcs.st-and.ac.uk/ history/Mathematicians/Nash.html pour une biographie assez dramatique sur la vie de Nash, ainsi que [24] et [26].

- On savait que le problème pseudo-riemannien général contient le cas riemannien au sens suivant. Si l'on veut immerger isométriquement (V, g) dans (W, h), on construit $(V \times W, g \bigoplus -h)$, et on immerge dedans V de façon isotrope (pour être cohérent ici, il faudrait étendre la discussion, comme c'est fait dans [14], au cas des métriques pseudo-riemanniennes "dégénérées", i.e. des champs de tenseurs covariants symétriques d'ordre 2 quelconques).

- Le problème pseudo-riemannien est parfois plus facile que le cas riemannien. Ainsi le plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$ admet une réalisation connue sous le nom de modèle de l'hyperboloide dans l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,2}$. On peut donc dire, d'une part que le théorème de Hilbert est faux si l'on remplace l'espace euclidien par l'espace de Minkowski. D'autre part, le théorème de rigidité de la sphère dans l'espace euclidien ne se généralise pas à cette situation. En effet, l'hyperboloide peut être vu comme une sphère de rayon imaginaire dans l'espace de Minkowski, et il se trouve qu'il admet des déformations isométriques non-triviales [17].

16 Obstructions en codimension relativement petite

16.1 Géodésibilité d'une sous-variété On apprend au premier cours de géométrie "intrinsèque", à différencier entre les surfaces *planes* et les surfaces *plates* dans l'espace euclidien. Les premières sont contenues dans des plans et les secondes sont simplement à courbure de Gauss nulle. Des exemples de ces dernières sont les cônes et cylindres généralisés. Modulo rotation de l'espace, ces derniers consistent à se donner une section s, c.à-d. une courbe de Jordan lisse horizontale, et ensuite de la saturer par les droites verticales. On voit sur cet exemple que même si le cylindre n'est pas plan, il l'est à un deuxième ordre. On veut dire par cela qu'il est engendré par des droites. C'est un fait général :

Une surface plate de l'espace euclidien est engendrée par des droites le long desquelles, son plan tangent est parallèle (voir [33] pour une approche moderne).

Notons cependant, qu'en dehors du cas analytique, une surface plate, peut contenir une partie (strictement) plane et une autre *réglée* comme on vient de le décrire. Dans le cas du cylindre ci-dessus, la partie plane correspond aux segments de droites contenus dans sa section s (c'est le pur hasard qui permet dans cette situation de prolonger les droites génératices à la partie plane).

En général, le défaut de planitude (i.e. géodésibilité) d'une sous-variété V d'une variété riemannienne W (tout étant C^∞ ici, pour simplifier), se mesure à l'aide de sa seconde forme fondamentale, une forme (vectorielle) bilinéaire symétrique π.

L'espace plat (dit aussi espace de nullité relative) Fl_x de V en x est le noyau de π_x :

$$Fl_x = \{X \in T_xV / \pi_x(X,Y) = 0, \forall\, Y \in T_xV\}$$

On a la propriété suivante d'intégrabilité dans le cas des sous-variétés des variétés à courbure *constante*, généralisant le constat ci-dessus sur les surfaces plates de l'espace euclidien (voir par exemple [14] pour une approche synthétique) :

Supposons la variété ambiante W à courbure constante. Alors, dans l'ouvert $\mathcal{U}$ de V où sa dimension est minimale, l'espace plat Fl de V est intégrable et ses feuilles sont géodésiques dans W (et à fortiori dans V). On l'appellera le feuilletage plat de V et notera $\mathcal{F}l$.

16.2 Lemme algébrique [35] et ([14], p 262). *Soit $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{q-n}$, une forme biliéaire symétrique vérifaint :*

$$\langle \pi(X,X), \pi(Y,Y\rangle - \langle \pi(X,Y), \pi(X,Y\rangle = 0, \forall X, Y \in \mathbb{R}^n,$$

alors, la dimension du noyau de π est $\geq 2n - q$.

On continue à améliorer et généraliser ce résultat à des situations similaires, par exemple en remplaçant l'égalité $= 0$ par ≤ 0 (voir par exemple [9]).

16.3 Le feuilletage local $\mathcal{F}l$ La seconde forme fondamentale d'une immersion entre variétés à *même* courbure *constante* satisfait à la condition ci-dessus (grâce à l'équation de Gauss). On en déduit :

Soit $V^n \to W^q$ une immersion isométrique entre variétés de même courbure constante, alors, l'espace plat de V vérifie : $dim(\mathcal{F}l) \geq 2dim(V) - dim(W) = dim(V) - codim(V) = 2n - q$.

La difficulté majeure réside dans le fait que $\mathcal{F}l$ n'est défini que dans $\mathcal{U}$ qui est généralement un ouvert propre de V. Ailleurs, la dimension de Fl peut exploser. Heureusement, on arrive a montrer qu'une telle explosion ne se produit pas en suivant une feuille de $\mathcal{F}l$ dans $\mathcal{U}$. En d'autres termes, les feuilles de $\mathcal{F}l$ sont *relativement complètes* dans V, ce qui signifie lorsque V est suppposée complète, que les feuilles de $\mathcal{F}l$ le sont également [7, 14].

Toutes ces informations algébrico-géométriques servent à démontrer le résultat :

Il n'existe pas d'immersion isométrique d'un tore plat de dimension n dans $\mathbb{R}^{2n-1}$ [30],

et surtout le résultat de rigidité suivant :

Soit $f : V^n \to W^q$ une immersion isométrique, où V et W ont une même courbure constante non-nulle. *Si, V est compacte et $2n - q > 0$, alors $f(V)$ est totalement géodésique dans W (voir [8] (1975) et une autre jolie preuve dans ([14], p) en courbure positive, et [37] (1985) en courbure négative*).

16.4 Intervalles On observe ainsi que pour les immersions isométriques $V^n \to W^q$:

• Il y a une riche (et encore ouverte) théorie d'obstructions, si $q < 2n$.

• Pour $q \geq n(n+1)/2$, des immersions isométriques locales existent en général (Cartan-Janet dans le cas analytique et [20] dans le cas lisse).

• Pour $q \geq q(n)$, où $q(n)$ est le polynome donné par Nash (ou celui amélioré par Gromov), les immersions isométriques (globales) existent et abondent.

• Pour $2n \leq q \leq q(n)$, on ne sait rien (sur les immersions globales) !

17 Coup de théâtre : Preuve de Günther

Autour de 1987, vivant en Allemagne de l'est, M. Gunther, trouve une démonstration du théorème des immersions isométriques, cas lisse, ($C^{2,\alpha}$, $\alpha > 0$), par une méthode classique, c'est-à-dire en d'autres termes, en utilisant plutôt un théorème de fonction implicite classique sur les espaces de Banach (ou disons plus précisément le principe d'applications contractantes standard). Sa preuve occupe quelques petites pages (voir [15, 16] et les expositions [1, 36]).

Décidément, Gunther n'était guère impressionné par la réputation de la difficulté singulière du problème, ou peut-être simplement les échos de cette réputation ne lui sont-ils pas parvenus (à cause du mur de Berlin ?). C'est dire que l'adage "un homme averti en vaut deux" est "un théorème" faux dans la recherche mathématique (et probablement dans la recherche scientifique en général). Mais ce n'est pas par cette "sagesse" que nous voudrions terminer notre histoire, car, d'une part, cette histoire reste encore inachevée, et d'autre part, qu'on ne se trompe pas, le théorème de Nash-Moser reste d'un intérêt exceptionnel en mathématiques, même si son usage reste très délicat. Ceci conduit à se poser la question, peut-on touver des preuves classiques, à des théorèmes célèbres (e.g. KAM) abordés actuellement par la méthode de Nash ?

Références

[1] S. Alinhac, P. Gérard, Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser. Savoirs Actuels. InterEditions, Éditions du CNRS, Paris (1991).

[2] E. Cartan, Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien. Ann. Soc. Pol. Math. 6 (1927) 1-7.

[3] S. Chern, A proof of the uniqueness of Minkowski's problem for convex surfaces. Amer. J. Math. 79 (1957) 949–950.

[4] S. Cohn-Vossen, unstarre gescholassen flächen. Math. Ann. 102 (1929) 10-29.

[5] G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, Vol. 3. Gauthier-Villars, Paris (1984)

[6] V. Efimov, Generation of singularites on surfaces of negative curvature. (Russian) Mat. Sb. (N.S.) 64, no. 106 (1964) 286–320.

[7] D. Ferus, On the completeness of nullity foliations. Michigan Math. J. 18 (1971) 61–64.

[8] D. Ferus, Isometric immersions of constant curvature manifolds. Math. Ann. 217, no. 2 (1975) 155–156.

[9] L. Florit, On submanifolds with nonpositive extrinsic curvature. Math. Ann. 298, 1, (1994) 187–192.

[10] J. Gasqui, Sur l'existence d'immersions isomtriques locales pour les varits riemanniennes. J. Differential Geometry 10 (1975) 61–84.

[11] R. Greene, Isometric embeddings of Riemannian and pseudo-Riemannian manifolds. Memoirs of the American Mathematical Society, No. 97 (1970).

[12] M. Gromov, Isometric imbeddings and immersions. Dokl. Akad. Nauk SSSR 192 (1970) 1206–1209.

[13] M. Gromov, V. Rohlin, Imbeddings and immersions in Riemannian geometry. Uspehi Mat. Nauk 25 no. 5 (155) (1970) 3–62.

[14] M. Gromov, Partial differential relations. Springer-Verlag, Berlin (1986).

[15] M. Günther, On the perturbation problem associated to isometric embeddings of Riemannian manifolds. Ann. Global Anal. Geom. 7, n. 1 (1989) 69–77.

[16] M. Günther, Isometric embeddings of Riemannian manifolds. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, II (Kyoto, 1990), Math. Soc. Japan, Tokyo (1991) 1137–1143.

[17] J. Hano, Jun-ichi, K. Nomizu, On isometric immersions of the hyperbolic plane into the Lorentz-Minkowski space and the Monge-Ampre equation of a certain type. Math. Ann. 262, no. 2(1983) 245–253.

[18] D. Hilbert, Uber Flächer von konstanter Gauβscher Krummung. Tans. AMS 2 (1901) 87-99.

[19] H. Jacobowitz, Local isometric embeddings. Seminar on Differential Geometry, pp. 381–393, Ann. of Math. Stud., 102, Princeton Univ. Press, (1982) Princeton, N.J.

[20] H. Jacobowitz, Extending isometric embeddings. J. Differential Geometry 9 (1974), 291–307.

[21] M. Janet, Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans une espace euclidien. Ann. Soc. Pol. Math. 5 (1927) 38-43.

[22] N. Kuiper, On C^1-isometric imbeddings. I, II. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 58 = Indag. Math. 17 (1955), 545–556, 683–689.

[23] R. Langevin, Interview with Mikhael Gromov. Development of mathematics 1950–2000 (2000) 1213–1227, Birkhäuser, Basel.

[24] J. Milnor, John Nash, and A beautiful mind. Notices Amer. Math. Soc. 45, no. 10, (1998) 1329–1332.

[25] T. Milnor, Efimov's theorem about complete immersed surfaces of negative curvature. Advances in Math. 8 (1972) 474–543.

[26] S. Nasar, A beautiful mind. Simon and Schuster (1998) New York.

[27] J. Nash, C^1 isometric imbeddings. Ann. of Math. (2) 60 (1954) 383–396.

[28] J. Nash, The imbedding problem for Riemannian manifolds. Ann. of Math. (2) 63 (1956) 20–63.

[29] J. Nash, Analyticity of the solutions of implicit function problems with analytic data. Ann. of Math. (2) 84 (1966) 345–355.

[30] B. O'Neill, Isometric immersion of flat Riemannian manifolds in Euclidean space. Michigan Math. J. 9 (1962) 199–205.

[31] R. Sacksteder, The rigidity of hypersurfaces. J. Math. Mech. 11 (1962) 929–939.

[32] J-M. Schlenker, Complete surfaces with negative extrinsic curvature. Preprint.

[33] M. Spivak : "A comprehensive introduction to differential geometry", Berkely, Publish or Perish (1979).

[34] J. Schwartz, On Nash's implicit functional theorem. Comm. Pure Appl. Math. 13 (1960) 509–530.

[35] C. Tompkins, Isometric imbedding of flat manifolds in Euclidean space. Duke Math. J. 5 (1939) 38-61.

[36] D. Yang, Günther's proof of Nash's isometric embedding theorem, xxx.arXiv.cornell.edu/pdf/math.DG/9807169

[37] A. Zeghib, Feuilletages géodésiques appliqués. Math. Ann. 298, no. 4 (1994) 729–759.

CNRS, UMPA, École Normale Supérieure de Lyon
46, allée d'Italie, 69364 Lyon cedex 07, FRANCE
Zeghib@umpa.ens-lyon.fr
http ://umpa.ens-lyon.fr/~zeghib/