Multiplicité du spectre des surfaces : une approche topologique

Bruno Sévennec*

Introduction

Le problème abordé ici est la majoration de la multiplicité de la première valeur propre non nulle λ_1 du laplacien $-\triangle^h$ sur une surface riemannienne (X, h) (supposée C^∞, compacte, connexe et sans bord). Plus généralement, on se pose la même question pour un opérateur de Schrödinger $H = -\triangle^h + v$, $v \in C^\infty(X, \mathbf{R})$, de spectre $\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ (où les valeurs propres sont répétées selon leur multiplicité). On pourrait aussi bien considérer un opérateur différentiel P d'ordre 2 réel autoadjoint elliptique positif sur X, mais ce cas se ramène à celui d'un opérateur de Schrödinger.

On note $m_k = m_k(X, H)$ (ou $m_k(X, h)$ si $v = 0$) la multiplicité de la valeur propre λ_k, i.e $m_k(X, H) = \dim \ker(H - \lambda_k)$. On a toujours $m_0 = 1$ (voir [Bér] ou [Cha] par exemple). Après les travaux de S. Y. Cheng [Che], G. Besson [Bes], Y. Colin de Verdière [Co1, Co2] et N. S. Nadirashvili [N], on dispose sur la quantité

$$\overline{m}_1(X) = \sup_H m_1(X, H)$$

des informations suivantes

Théorème 1 *[Che, Bes, Co1, Co2, N]*

- *Pour les surfaces X de caractéristique d'Euler $\chi(X) \geq 0$, à savoir $\mathbf{S}^2$, $\mathbf{P}^2$, $\mathbf{T}^2$, $\mathbf{K}^2$, $\overline{m}_1(X)$ vaut* $\mathrm{chr}(X) - 1$, *soit respectivement* $3, 5, 6, 5$;
- *si $\chi(X) < 0$, on a* $\mathrm{chr}(X) - 1 \leq \overline{m}_1(X) \leq 5 - 2\chi(X)$, *où* $\mathrm{chr}(X)$ *est le* nombre chromatique *de X [R], plus grand entier n tel que le graphe complet à n sommets K_n se plonge dans X. D'après Ringel et Youngs [R] on a* $\mathrm{chr}(X) = \lfloor \frac{1}{2}(7 + \sqrt{49 - 24\chi(X)}) \rfloor$, *sauf pour la bouteille de Klein, pour laquelle* $\mathrm{chr}(\mathbf{K}^2) = 6$.

Y. Colin de Verdière a montré qu'en dimension ≥ 3, on ne peut espérer borner $m_1(X, h)$ indépendamment de h. Plus précisément, si $\dim X \geq 3$, n'importe quelle suite finie $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_N$ apparaît comme début du spectre de $-\triangle^h$ pour une métrique h convenable sur X [Co2].

*CNRS, UMPA ENS-Lyon, 46 Allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France

Revenant au cas des surfaces envisagé ici, on ne sait pas si la borne inférieure $\overline{m}_1(X) \geq \mathrm{chr}(X) - 1$ obtenue dans [Co2] est atteinte par un *laplacien* (i.e. pour un potentiel $v = 0$) lorsque $\chi(X) < 0$. Une minoration de $\sup_h m_1(x, h)$ pour les surfaces orientables de genre ≥ 3 est donnée dans [CoCo].

La coïncidence de $\overline{m}_1(X)$ avec $\mathrm{chr}(X) - 1$ si $\chi(X) \geq 0$ amène naturellement à poser (suivant Y. Colin de Verdière [Co2]) la

Conjecture $\quad \forall X, \quad \overline{m}_1(X) = \mathrm{chr}(X) - 1.$

Noter que la majoration du théorème 1 est *linéaire* en $|\chi(X)|$, alors que $\mathrm{chr}(X) = O(\sqrt{|\chi(X)|})$... Pour les premières valeurs négatives de la caractéristique, le tableau suivant fournit les valeurs concernées

$\chi(X)$	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8
$\mathrm{chr}(X) - 1$	6	7	8	8	9	9	9	10
$5 - 2\chi(X)$	7	9	11	13	15	17	19	21

Rappelons que toute surface (compacte connexe sans bord) est somme connexe de copies de $\mathbf{T}^2$ ou $\mathbf{P}^2$, avec la relation $\sharp 3\mathbf{P}^2 = \mathbf{T}^2 \sharp \mathbf{P}^2$. Enfin pour chaque valeur $\chi < 2$ de la caractéristique, il y a une seule surface (non orientable) si χ est impaire, et deux surfaces (l'une orientable, l'autre non) si χ est paire. Par exemple, $\sharp 2\mathbf{P}^2$ est la bouteille de Klein $\mathbf{K}^2$ ($\chi(\mathbf{T}^2) = \chi(\mathbf{K}^2) = 0$), et $\chi = -1$ correspond à la surface $\sharp 3\mathbf{P}^2 = \mathbf{T}^2 \sharp \mathbf{P}^2$.

Si $u \in \ker(H - \lambda_k)$ ($u \neq 0$) est une fonction propre de H, deux résultats classiques décrivent la structure des "ensembles nodaux" $u^{-1}(0)$.

Théorème de Courant *([CH, p. 452], voir [Bér, p. 37], [Cha] ou [BeMe, app. D, E])*
Le complémentaire $X \setminus u^{-1}(0)$ de l'ensemble nodal a au plus $k+1$ composantes connexes; en particulier si $k = 1$, $X \setminus u^{-1}(0)$ a exactement 2 *composantes connexes.*

Théorème de Carleman *([Ca], voir [J, p. 35])*
Les zéros de u sont d'ordre fini, i.e. si $u(x) = 0$, il existe un entier r tel que le jet $j^r u(x)$ de u en x soit non nul. Ceci entraîne que, dans une coordonnée locale conforme $z : (X, x) \to (\mathbf{C}, 0)$, on a

$$u = \mathrm{Im}(az^m) + O(|z|^{m+1}) \qquad (a \in \mathbf{C}^*, \ m \geq 1)$$

et qu'au voisinage de x, $u^{-1}(0)$ est réunion de m courbes C^∞ [1] *dont les tangentes en x forment un système équi-angulaire.*

En particulier, $\Gamma = u^{-1}(0)$ est un graphe fini sans point isolé plongé dans X ("de façon C^∞"), dont toutes les valences sont *paires*, et qui est de plus muni d'une *orientation transverse*: u change de signe le long des arêtes, et il y a une orientation transverse privilégiée le long de celles-ci, de $\{u < 0\}$ vers $\{u > 0\}$. Noter que de façon générale, cette propriété force les valences à être paires. Ces graphes Γ n'ont pas nécessairement de point singulier et ne sont pas forcément connexes; ils sont considérés ici comme des sous-espaces fermés de X

[1] Ce point s'établit facilement à l'aide du théorème des fonctions implicites, après un changement de variables qui éclate l'origine (cette preuve élémentaire m'a été indiquée par E. Giroux).

plutôt que comme des objets combinatoires. Puisqu'on s'intéresse surtout à la valeur propre d'indice $k = 1$ on introduit la

Définition 2 *Un graphe nodal sur X est un graphe fini Γ plongé dans X, transversalement orientable, tel que $X \setminus \Gamma$ ait deux composantes connexes dont Γ est la frontière commune (i.e. tout point de Γ est adhérent aux* deux *composantes de $X \setminus \Gamma$). Enfin, on définit de façon évidente la notion de graphe nodal transversalement orienté sur X.*

L'approche proposée ici, suivant une suggestion d'Y. Colin de Verdière, consiste à essayer de majorer $m_1 = \dim V_1 = \dim \ker(H - \lambda_1)$ en retenant seulement le fait que pour toute fonction $u \in V_1 \setminus 0$, $u^{-1}(0)$ est un graphe nodal sur X.

Pour cela, on considère l'espace $\mathcal{G}(X)$ des graphes nodaux sur X et son *revêtement double* $\widetilde{\mathcal{G}}(X)$, espace des graphes nodaux transversalement orientés sur X. On ne précise pas pour l'instant la topologie sur $\mathcal{G}(X)$ (ou $\widetilde{\mathcal{G}}(X)$), ni la régularité des graphes nodaux. Une contrainte est bien sûr la continuité de l'application naturelle $u \mapsto u^{-1}(0)$ de $\mathbf{S}(V_1) = (V_1 \setminus 0)/\mathbf{R}_+^*$ dans $\widetilde{\mathcal{G}}(X)$. Pour tout $\Gamma \in \widetilde{\mathcal{G}}(X)$, une des deux composantes de $X \setminus \Gamma$ est privilégiée; on la note $U_+(\Gamma)$, et $U_-(\Gamma)$ est l'autre composante.

Une topologie naturelle sur $\widetilde{\mathcal{G}}(X)$ est par exemple celle induite par l'application

$$\Gamma \mapsto (X \setminus U_+(\Gamma), X \setminus U_-(\Gamma)) = (\overline{U_-(\Gamma)}, \overline{U_+(\Gamma)})$$

de $\widetilde{\mathcal{G}}(X)$ vers l'espace $\mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X)$ des couples de fermés de X, $\mathcal{F}(X)$ étant muni de la distance de Hausdorff ρ. Rappelons que $\rho(F_1, F_2) < \varepsilon$ signifie que chacun des fermés F_1, F_2 est dans le ε-voisinage de l'autre. On appellera *topologie* C^0 cette topologie sur $\widetilde{\mathcal{G}}(X)$, ainsi que celle qui s'en déduit (par quotient) sur $\mathcal{G}(X)$. L'application $\widetilde{\mathcal{G}}(X) \to \mathcal{G}(X)$ est alors un revêtement double, trivial au-dessus de chaque ouvert $\{\Gamma \in \mathcal{G}(X) \mid x_0 \notin \Gamma\}$.

Le cas de la sphère

Les éléments de $\mathcal{G}(\mathbf{S}^2)$ sont les courbes de Jordan dans $\mathbf{S}^2$. En effet si $\Gamma \in \mathcal{G}(\mathbf{S}^2)$, et $\mathbf{S}^2 \setminus \Gamma = U_+ \cup U_-$ (avec $U_\pm$ connexes, donc $\chi(U_\pm) \leq 1$),

$$\chi(\mathbf{S}^2) = 2 = \chi(\Gamma) + \chi(U_+) + \chi(U_-) \leq \chi(\Gamma) + 2.$$

Mais on a toujours $\chi(\Gamma) \leq 0$ pour un graphe nodal (les valences sont ≥ 2), avec égalité si et seulement si chaque composante de Γ est un topologiquement cercle. La conclusion en résulte aisément.

Le premier résultat obtenu par cette approche est le

Théorème 3 *Si on munit l'espace $\mathcal{G}(\mathbf{S}^2)$ des courbes de Jordan sur $\mathbf{S}^2$ de la topologie C^0, il existe une application continue $\mathbf{Z}_2$-équivariante $r : \widetilde{\mathcal{G}}(\mathbf{S}^2) \to \mathbf{S}^2$, $\mathbf{S}^2$ étant munie de l'action antipodale.*

Complément *On peut prendre pour r une rétraction par déformation $\mathbf{Z}_2$-équivariante, $\mathbf{S}^2$ étant naturellement plongé de façon équivariante dans $\widetilde{\mathcal{G}}(\mathbf{S}^2)$ comme sous-espace des grands cercles orientés. Autrement dit, r est homotope à l'identité parmi les applications*

$\mathbf{Z}_2$-équivariantes de $\widetilde{\mathcal{G}}(\mathbf{S}^2)$ dans lui-même. Du point de vue homotopique, $\widetilde{\mathcal{G}}(\mathbf{S}^2)$ muni de son action de $\mathbf{Z}_2$ est donc équivalent à $(\mathbf{S}^2, -\mathrm{id})$.

Corollaire 4 *Si V est un espace vectoriel de fonctions (continues) sur $\mathbf{S}^2$ tel que pour toute $u \in V \setminus 0$, $u^{-1}(0)$ est une courbe de Jordan le long de laquelle u change de signe, on a* $\dim V \leq 3$ *(en particulier on retrouve $\overline{m}_1(\mathbf{S}^2) \leq 3$).*

Démonstration du corollaire. On peut supposer $m = \dim V$ finie. Alors on a une application continue $\mathbf{Z}_2$-équivariante de $\mathbf{S}^{m-1}$ dans $\mathbf{S}^2$:

$$\mathbf{S}^{m-1} = \mathbf{S}(V) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{G}}(\mathbf{S}^2) \xrightarrow{r} \mathbf{S}^2.$$

Mais le théorème classique de Borsuk-Ulam (voir [M, p. 242]) dit qu'alors $m - 1 \leq 2$, cqfd. $\square$

Démonstration du théorème. Pour $\Gamma \in \widetilde{\mathcal{G}}(\mathbf{S}^2)$, on rappelle que $U_+(\Gamma)$ est la composante privilégiée de $\mathbf{S}^2 \setminus \Gamma$ et $U_-(\Gamma)$ est l'autre composante. Il suffit de montrer qu'il existe deux applications *continues* $x_\pm : \widetilde{\mathcal{G}}(\mathbf{S}^2) \to \mathbf{S}^2$ avec $x_\pm(\Gamma) \in U_\pm(\Gamma)$. En effet on obtient alors une application continue $\mathbf{Z}_2$-équivariante $\widetilde{\mathcal{G}}(\mathbf{S}^2) \to \mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^2 \setminus \Delta$ (l'action de $\mathbf{Z}_2$ au but échange les deux facteurs), et il y a une application continue $\mathbf{Z}_2$-équivariante évidente $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^2 \setminus \Delta \to \mathbf{S}^2$. On est donc ramené à démontrer le

Lemme 5 *Si $\mathcal{U}$ désigne l'espace des domaines de Jordan de $\mathbf{S}^2$ muni de la topologie induite de celle de $\mathcal{G}(\mathbf{S}^2)$ via $\mathcal{U} \ni U \mapsto \partial U \in \mathcal{G}(\mathbf{S}^2)$, il existe une application* continue $c : \mathcal{U} \to \mathbf{S}^2$ *telle que pour tout U, $c(U) \in U$.*

Démonstration. Notons d'abord que la topologie de $\mathcal{U}$ est simplement définie par la distance $d(U_1, U_2) = \rho(\overline{U}_1, \overline{U}_2) + \rho(\mathbf{S}^2 \setminus U_1, \mathbf{S}^2 \setminus U_2)$, où ρ désigne la distance de Hausdorff.

Soit $\mathcal{U}_* \subset \mathcal{U} \times \mathbf{S}^2$ l'ensemble des couples (U, x) tels que $x \in U$. On le munit de la topologie produit, et on considère l'application continue

$$\begin{array}{rcl} p : \mathcal{U}_* & \longrightarrow & \mathcal{U} \\ (U, x) & \longmapsto & U \end{array}$$

dont il s'agit de trouver une section. Or, d'après [Do], tout fibré localement trivial à base paracompacte et fibres contractiles possède une section. Comme $\mathcal{U}$ est métrisable et que les fibres de p sont homéomorphes au disque unité ouvert $\mathbf{D} \subset \mathbf{C}$, on est ramené à prouver que

Sous-lemme p est une fibration localement triviale.

Démonstration. Soit $U_0 \in \mathcal{U}$, $x_0 \in U_0$, et $\xi_0 \subset T_{x_0} U_0$ une demi-droite tangente en x_0. Vu le choix de la topologie sur $\mathcal{U}$, si U est dans un voisinage $\mathcal{V}$ assez petit de U_0, on a $x_0 \in U$. Pour tout $U \in \mathcal{V}$, soit $f_U : (\mathbf{D}, 0) \to (U, x_0)$ l'unique application conforme telle que $f'_U(0) \in \xi_0$. Montrons alors que

$$\begin{array}{rcl} T : \mathcal{V} \times \mathbf{D} & \longrightarrow & p^{-1}(\mathcal{V}) \\ (U, z) & \longmapsto & (U, f_U(z)) \end{array}$$

est une trivialisation de p au-dessus de $\mathcal{V}$.

Tout d'abord, il est clair que T est bijective, d'inverse $T^{-1} : (U, x) \mapsto (U, f_U^{-1}(x))$. Ensuite, le théorème de convergence de Carathéodory [Du, p. 78] entraîne que $U \mapsto f_U^{\pm 1}$ est continue pour la topologie (au but) de la convergence uniforme sur tout compact. Plus précisément, si $U_n \ni x_0$ converge vers $U \ni x_0$ pour la "topologie des noyaux" (voir plus loin) $f_{U_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f_U$ uniformément sur tout compact de $\mathbf{D}$ et $f_{U_n}^{-1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f_U^{-1}$ uniformément sur tout compact de U (ce qui a un sens, car si $K \subset U$ est compact, on a $K \subset U_n$ pour n assez grand). La convergence de U_n vers U pour la topologie des noyaux signifie que pour tout K compact connexe tel que $x_0 \in K \subset U$, et tout ouvert V tel que $V \not\subset U$, on a pour n assez grand $K \subset U_n$ et $V \not\subset U_n$. C'est en particulier le cas si $U_n \to U$ pour la topologie de $\mathcal{U}$, car U étant un domaine de Jordan $V \not\subset \overline{U}$, et comme $\rho(\overline{U_n}, \overline{U}) \to 0$, on a $V \not\subset \overline{U_n}$ pour n grand. De même, $\rho(\mathbf{S}^2 \setminus U_n, \mathbf{S}^2 \setminus U) \to 0$ entraîne que $K \subset U_n$ pour n grand.

On en déduit la continuité de T, en considérant pour toute suite convergente $(U_n, z_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (U, z)$ dans $\mathcal{V} \times \mathbf{D}$, le compact $K = \{z_n\}_n \cup \{z\} \subset \mathbf{D}$. Puisque f_{U_n} converge uniformément vers f_U sur K, on a bien $f_{U_n}(z_n) \to f_U(z)$. De même, si $f_{U_n}(z_n) \to f_U(z)$ et $U_n \to U$, on considère le compact L constitué des $f_{U_n}(z_n)$ et de leur limite $f_U(z) \in U$. Quitte à lui retirer un nombre fini de points, on peut le supposer contenu dans U, et donc contenu dans U_n pour n grand. Alors $f_{U_n}^{-1}$ converge uniformément sur L vers f_U^{-1} d'où $z_n \to z$, et T est un homéomorphisme, ce qui termine la démonstration. $\square$

On ne démontrera pas ici le complément au théorème 3 (il n'est pas utile pour le corollaire). Intuitivement, on peut déformer les courbes de Jordan (transversalement) orientées sur les grands cercles (orientés) de $\mathbf{S}^2$, dont l'espace s'identifie à $\mathbf{S}^2$, l'antipodie correspondant au renversement de l'orientation d'un grand cercle. La difficulté est de le faire "canoniquement" (i.e. continûment par rapport à la courbe) et de façon $\mathbf{Z}_2$-équivariante. La démonstration utilise les mêmes outils que ci-dessus. Une démonstration "physique" utilisant une EDP d'évolution diminuant la courbure géodésique des courbes paramétrées dans $\mathbf{S}^2$ (par exemple) serait plus satisfaisante.

Les autres surfaces

Le "programme" est maintenant d'étendre ceci aux autres surfaces. Plusieurs obstacles se présentent :

(a) Trouver une "bonne topologie" sur $\mathcal{G}(X)$.

(b) Trouver un substitut au théorème de Borsuk-Ulam si $\widetilde{\mathcal{G}}(X)$ n'est pas homotopiquement une sphère (ce qui arrive pour $\chi(X) \leq 0$).

(c) Caractériser, ou au moins contrôler la topologie globale (type d'homotopie) de $\mathcal{G}(X)$ et $\widetilde{\mathcal{G}}(X)$, afin d'appliquer (b).

On n'insistera pas ici sur le point (a), qui conduit à des développements techniques sans intérêt pour la compréhension. Qu'il suffise de dire que la topologie C^0 ne semble pas assez fine lorsque $\mathcal{G}(X)$ contient des "vrais graphes", i.e. avec des points singuliers, ce qui est toujours le cas si $X \neq \mathbf{S}^2$.

Le point (b) est plus intéressant. Au revêtement double $\pi : \widetilde{\mathcal{G}}(X) \to \mathcal{G}(X)$ est associée naturellement une classe

$$\alpha = \alpha_\pi \in H^1(\mathcal{G}(X); \mathbf{Z}_2) \cong \mathrm{Hom}(\pi_1(\mathcal{G}(X)), \mathbf{Z}_2),$$

définie pour un lacet $\gamma : \mathbf{S}^1 \to \mathcal{G}(X)$ par $\alpha(\gamma) = 0$ si γ se relève en un lacet dans $\widetilde{\mathcal{G}}(X)$, et $\alpha(\gamma) = 1$ sinon. Cette classe (qu'on peut bien sûr définir pour tout revêtement double $\pi : \widetilde{Y} \to Y$) est un exemple (très simple) de classe caractéristique, i.e. possède la propriété de naturalité suivante : pour tout morphisme de revêtements doubles

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Y_1} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \widetilde{Y_2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_1 & \xrightarrow{f} & Y_2 \end{array}$$

on a $\alpha_1 = f^*\alpha_2$ (avec des notations évidentes). L'utilité de cette classe caractéristique dans le contexte présent apparaît via la structure multiplicative (cup-produit) sur la cohomologie $H^*(\mathcal{G}(X))$ (on omettra désormais les coefficients, toujours pris dans $\mathbf{Z}_2$) :

Lemme 6 *$\alpha^N = 0$ entraîne $\overline{m}_1(X) \leq N$.*

Démonstration. C'est essentiellement la même que celle du théorème de Borsuk-Ulam qui figure par exemple dans [M]. Si $\tilde{f} : \mathbf{S}^{m-1} \to \widetilde{\mathcal{G}}(X)$ est continue, $\mathbf{Z}_2$-équivariante, et $f : \mathbf{P}^{m-1} \to \mathcal{G}(X)$ est son quotient, on a par naturalité $f^*(\alpha) = \eta$, classe caractéristique du revêtement double $\mathbf{S}^{m-1} \to \mathbf{P}^{m-1}$. C'est l'unique élément non nul de $H^1(\mathbf{P}^{m-1})$, et il engendre l'algèbre $H^*(\mathbf{P}^{m-1}) = \mathbf{Z}_2[\eta] \cong \mathbf{Z}_2[t]/(t^m)$, et en particulier $\eta^{m-1} \neq 0$ (voir [M]). Par conséquent si $\alpha^N = 0$, on a aussi $\eta^N = 0$, d'où $N > m - 1$ et le lemme est démontré.

Ainsi, pour majorer $\overline{m}_1(X)$, on est amené à majorer l'ordre de nilpotence de α dans $H^*(\mathcal{G}(X))$. Notons que rien n'assure *a priori* que α soit nilpotente, puisque $\mathcal{G}(X)$ est de dimension infinie. De plus, même si $\alpha^N \neq 0$, il reste possible que $\overline{m}_1(X) \leq N$, la non-annulation de α^N n'étant pas forcément détectée par une application $\mathbf{P}^N \to \mathcal{G}(X)$.

Le lemme élémentaire suivant permet d'aborder l'étude de l'ordre de nilpotence de α (point (c))

Lemme 7 *Si $Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_p$ est un recouvrement* ouvert *de Y et $\alpha \in H^1(Y)$ vérifie $\alpha^{n_i}|_{Y_i} = 0$, alors $\alpha^N = 0$ avec $N = \sum n_i$.*

Notons que ce résultat n'est pas optimal lorsque les ouverts Y_i ont des intersections très simples, par exemple vides. Dans ce dernier cas on peut évidemment prendre $N = \sup n_i$...

Une remarque simple (mais qui sera importante pour la suite) est que la conclusion du lemme vaut encore lorsque le recouvrement $\{Y_i\}$ n'est pas nécessairement ouvert mais que chaque Y_i est (homologiquement) "épaississable"[2] dans Y, i.e. si $\lim_{U \supset Y_i} H^*(U) \to H^*(Y_i)$ est un isomorphisme (on ne se sert ici que de l'injectivité). La limite inductive est prise sur les voisinages U de Y_i dans Y. Cette propriété dépend en général de la cohomologie utilisée (singulière ou de Čech-Alexander-Spanier), mais est automatiquement vérifiée sous des hypothèses remarquablement générales (voir [S, chap. 6, sec. 9], [M, chap. IX, §6] et [M2, §8.4, 8.8]). Par exemple, si Y est métrisable, $A \subset Y$ et si Y, A sont *localement contractiles*[3], A est épaississable dans Y pour la cohomologie singulière.

---

[2]Traduction libre de l'adjectif *taut* ("tendu") utilisé dans [S, M].

[3]Y est localement contractile si pour tout point $y \in Y$ et tout voisinage U de y, il y a un voisinage $V \subset U$ de y tel que l'injection $V \hookrightarrow U$ soit homotope (dans U) à l'application constante $V \to \{y\}$.

On applique maintenant ce critère de la façon suivante : il y a pour les éléments de $\mathcal{G}(X)$ une notion naturelle de codimension. La codimension d'un graphe nodal sans singularité ("lisse") est 0. Celle d'un graphe ayant un seul point singulier, de valence 4 (resp. 6,8), est 1 (resp 3,5). On a plus généralement pour $\Gamma \in \mathcal{G}(X)$

$$\operatorname{cod}\Gamma = \sum_{x \in \operatorname{sing}\Gamma} (v_x - 3),$$

v_x désignant la valence du point singulier $x \in \operatorname{sing}\Gamma$. On a alors un résultat de finitude :

Lemme 8 *Pour tout* $\Gamma \in \mathcal{G}(X)$, $\operatorname{cod}\Gamma \leq \sup(0, 3 - 2\chi(X))$.

Démonstration. Comme $\chi(\Gamma) = \sum(1 - v_x/2)$, on a $\operatorname{cod}\Gamma = -2\chi(\Gamma) - |\operatorname{sing}\Gamma|$. Mais $\chi(X) \leq \chi(\Gamma) + 2$, donc si Γ est singulier $\operatorname{cod}\Gamma \leq 2(-\chi(X) + 2) - 1 = 3 - 2\chi(X)$, et sinon $\operatorname{cod}\Gamma = 0$.

En notant $\mathcal{G}_i(X) \subset \mathcal{G}(X)$ l'ensemble des graphes nodaux de codimension i, on obtient donc une décomposition de $\mathcal{G}(X)$ en un nombre *fini* de "strates". Or la topologie (non explicitée ici) sur $\mathcal{G}(X)$ est métrisable et $\mathcal{G}(X)$, $\mathcal{G}_i(X)$ sont localement contractiles, de sorte que ces strates peuvent jouer le rôle des Y_i du lemme 7. Le résultat principal est alors le

Théorème 9 *Si* $\chi(X) < 0$, *on a* $\alpha|_{\mathcal{G}_i(X)} = 0$.

On voit facilement que ceci revient à dire que si $\Gamma \in \mathcal{G}(X)$, il n'y a pas de lacet d'origine Γ constitué de graphes nodaux isotopes à Γ tel qu'au terme de l'isotopie, les deux composantes de $X \setminus \Gamma$ se trouvent échangées, ou encore que le revêtement double $\widetilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$ est trivial au-dessus de $\mathcal{G}_i(X)$. En termes imagés, on ne peut pas "retourner Γ par isotopie" (noter qu'il y a des contre-exemples évidents si $\chi(X) \geq 0$). D'après les lemmes 7 et 8, on a donc amélioré (d'une unité) la majoration du théorème 1 :

Corollaire 10 *Si* $\chi(X) < 0$, $\overline{m}_1(X) \leq 4 - 2\chi(X)$. *En particulier, on a un nouvel exemple (pour* $\chi = -1$*) à l'appui de la conjecture d'Y. Colin de Verdière :*

$$\overline{m}_1(\mathbf{T}^2 \sharp \mathbf{P}^2) = 6 = \operatorname{chr}(\mathbf{T}^2 \sharp \mathbf{P}^2) - 1.$$

Références

[Bér] P. Bérard, *Analysis on riemannian manifolds and geometric applications : an introduction*, Monografias de Matematica No 42, IMPA, 1986.

[BeMe] P. Bérard, D. Meyer, *Inégalités isopérimétriques et applications*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. **15** (1982), 513-542.

[Bes] G. Besson, *Sur la multiplicité de la première valeur propre des surfaces riemanniennes*, Ann. Inst. Fourier **30**,1 (1980), 109-128.

[Ca] T. Carleman, *Sur les systèmes linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables*, C. R. Acad. Sc. **197** (1933), 471-474.

[Cha] I. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian geometry*, Academic Press, 1984.

[Che] S. Y. Cheng, *Eigenfunctions and nodal sets*, Commentarii Math. Helv. **51** (1976), 43-55.

[CoCo] B. Colbois, Y. Colin de Verdière, *Sur la multiplicité de la première valeur propre d'une surface de Riemann à courbure constante*, Commentarii Math. Helv. **63** (1988), 194-208.

[Co1] Y. Colin de Verdière, *Sur la multiplicité de la première valeur propre non nulle du laplacien*, Commentarii Math. Helv. **61** (1986), 254-270.

[Co2] Y. Colin de Verdière, *Construction de laplaciens dont une partie finie du spectre est donnée*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. **20** (1987), 599-615.

[CH] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of mathematical physics*, Vol 1, Wiley Interscience, 1953.

[Do] A. Dold, *Partitions of unity in the theory of fibrations*, Annals of Math. **78**,2 (1963), 223-255.

[Du] P. L. Duren, *Univalent functions*, Grundlehren 259, Springer Verlag, 1983.

[J] J. Jost, *Harmonic maps between surfaces*, Lect. Notes in Math. No 1062, Springer Verlag 1984.

[M] W. S. Massey, *Singular homology theory*, GTM 70, Springer Verlag 1980.

[M2] W. S. Massey, *Homology and cohomology theory*, Marcel Dekker, 1978.

[N] N. S. Nadirashvili, *Multiple eigenvalues of the Laplace operator*, Math. USSR Sbornik, **61**,1 (1988), 225-238.

[R] G. Ringel, *Map color theorem*, Grundlehren 209, Springer Verlag, 1974.

[S] E. H. Spanier, *Algebraic topology*, Mc Graw Hill, 1966.

Unité de Mathématiques Pures et Appliquées
de l'École Normale Supérieure de Lyon
U.M.R. 128 du C.N.R.S.

Bruno Sévennec
École Normale Supérieure de Lyon
46, Allée d'Italie
69364 LYON CEDEX 07
FRANCE