UNE CARACTÉRISATION DES FORMES SYMPLECTIQUES

BRUNO SÉVENNEC

RÉSUMÉ. On montre qu'une 2-forme non nulle sur une variété M, telle le pseudogroupe des difféomorphismes locaux la préservant soit transitif sur le fibré des directions tangentes, est symplectique si la dimension de M n'est pas 6. De plus, il y a un contre-exemple en dimension 6, dont on montre qu'il est essentiellement unique.

ABSTRACT. It is shown that a nonzero 2-form on a manifold M, such that the pseudogroup of local diffeomorphisms preserving it acts transitively on the bundle of tangent directions, is symplectic if $\dim M$ is not 6. Moreover, there is a counterexample in 6 dimensions, which is shown to be essentially unique.

1. INTRODUCTION

Soit (M, ω) une variété munie d'une 2-forme symplectique ω (toutes deux C^∞), i.e. ω est non-dégénérée sur chaque espace tangent ($\ker \omega = 0$) et fermée ($d\omega = 0$). D'après le *théorème de Darboux* [Ar], il existe au voisinage de tout point de M des coordonnées $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ (centrées en ce point) dans lesquelles la forme en question s'écrit $\omega = dx_1 \wedge dy_1 + \ldots dx_n \wedge dy_n = \omega_0$. Comme le sous-groupe $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$ préservant ω_0 agit transitivement sur $\mathbb{R}^{2n} - 0$, on voit que le pseudogroupe $\mathrm{Ps}(\omega)$ des difféomorphismes locaux de M préservant ω agit transitivement sur $TM - 0$, et a fortiori sur $\mathbb{P}(TM)$, fibré des directions tangentes à M. Autrement dit, si X, Y sont deux vecteurs tangents non nuls à M, il y a un difféomorphisme local préservant ω et dont l'application tangente envoie X sur Y (resp. sur un multiple de Y).

L'objet de ce travail est de démontrer une réciproque :

Théorème 1.1. *Soit* (M, ω) *une variété munie d'une 2-forme non nulle* ω. *Si* $\mathrm{Ps}(\omega)$ *agit transitivement sur* $TM - 0$, ω *est symplectique.*

La preuve proposée consiste à montrer qu'en fait

Théorème 1.2. *Si* $\mathrm{Ps}(\omega)$ *agit transitivement sur* $\mathbb{P}(TM)$, ω *est symplectique, ou alors* $\dim M = 6$ *et* $\mathrm{Ps}(\omega)$ *est contenu dans le pseudogroupe des isométries d'une métrique riemannienne* q *sur* M, *unique à un facteur près.*

Le théorème 1.1 en résulte, puisque le pseudogroupe des isométries d'une métrique riemannienne n'agit évidemment pas transitivement sur $TM - 0$.

Remarque 1.3. Il est immédiat que sous les hypothèses du théorème 1.2, ω est non-dégénérée : le champ des noyaux $\ker \omega$ étant invariant par l'action de $\mathrm{Ps}(\omega)$ sur TM, il est forcément réduit à 0 en tout point de M. En particulier la dimension de M est paire : on la notera $\dim M = 2n$. Toute la question est de savoir si ω est fermée.

Date: 30 Mai 1997.

Classification AMS 1991. 58A10,53C10,53C15,53C30,55R40,55R50,58H05,57S15.

Mots-clés. Forme symplectique, pseudogroupe, action transitive.

Remarque 1.4. Si $\dim M = 4$, les théorèmes 1.1 et 1.2 sont faciles (et triviaux si $\dim M = 2$!). En effet, sans hypothèse sur la dimension, $\omega^{n-2} \wedge d\omega$ est nulle dès que $\mathrm{Ps}(\omega)$ ne préserve aucun champ de vecteurs non nul : c'est une $(2n-1)$-forme invariante par $\mathrm{Ps}(\omega)$, et le champ de vecteurs ζ qu'elle définit via $\iota_\zeta \omega^n = \omega^{n-2} \wedge d\omega$ est aussi invariant, donc nul (ι_ζ désigne le produit intérieur par ζ, donné par $\iota_\zeta \psi = \psi(\zeta, \cdot, \cdot, \dots)$). Pour $2n = 4$, on obtient bien $d\omega = 0$, mais en dimension plus grande on voit seulement que $d\omega$ est une 3-forme "primitive".

Remarque 1.5. Dans le théorème 1.2, on peut ajouter que $q(X,Y) = a\omega(X, JY)$ pour un réel $a > 0$ et une (unique) structure presque complexe J sur M, invariante par $\mathrm{Ps}(\omega)$. En effet, soit $A = \{A_x\}$ le champ d'endomorphismes q-antisymétriques de TM défini par $q(X,Y) = \omega(X, AY)$. La transitivité de $\mathrm{Ps}(\omega)$ sur les directions tangentes montre que A_x ne peut avoir que deux valeurs propres distinctes (imaginaires pures) dans T_xM, et qu'elles sont indépendantes de $x \in M$, d'où $A = cJ$ pour un réel $c > 0$ et une structure presque complexe q-orthogonale J. On peut normaliser q en prenant $c = 1$.

Remerciements. La question qui est à l'origine de ce travail m'a été posée par Emmanuel Giroux, et je l'en remercie. Je suis reconnaissant à tous ceux qui ont manifesté leur intérêt pour ce travail, ainsi qu'à Pierre Pansu d'avoir attiré mon attention sur le théorème de Montgomery (théorème 3.1).

2. Un contre-exemple en dimension 6

L'apparition de la dimension 6 dans le théorème 1.2 n'est pas un artefact dû à la preuve :

Théorème 2.1. *Sur la sphère unité $\mathbb{S}^6 \subset \mathbb{R}^7$ il existe une 2-forme non dégénérée $\omega_{\mathbb{S}^6}$, invariante par un sous-groupe compact $G_2 \subset \mathrm{SO}(7)$ transitif sur le fibré tangent unitaire $T^1\mathbb{S}^6$. Comme $H^2(\mathbb{S}^6) = 0$, $\omega_{\mathbb{S}^6}$ ne peut pas être fermée.*

De plus, ce contre-exemple est essentiellement le seul possible localement. Plus précisément, à la conclusion "ou alors" du théorème 1.2, on peut ajouter que pour un réel $\lambda > 0$ convenable, $(M, \lambda\omega)$ est en tout point localement difféomorphe à l'exemple $(\mathbb{S}^6, \omega_{\mathbb{S}^6})$ ci-dessus.

La démonstration de l'unicité fait l'objet de la section 4. Concernant l'existence, on peut définir une telle forme en posant $\omega(X,Y) = \langle JX, Y \rangle$, où J est "la" structure presque-complexe orthogonale de Calabi sur $\mathbb{S}^6$. Rappelons-en brièvement la définition [Ec, Ca, Br] : le groupe compact G_2, de dimension 14, est celui des automorphismes de l'algèbre des octaves — ou octonions — de Cayley $\mathbb{C}\mathrm{a}$, et $\mathbb{S}^6$ est la sphère unité dans $\mathrm{Im}\,\mathbb{C}\mathrm{a} \simeq \mathbb{R}^7$. En un point u de $\mathbb{S}^6$, J_u est la restriction à $T_u\mathbb{S}^6$ de la multiplication par u dans $\mathbb{C}\mathrm{a}$ (à gauche, par exemple). En fait, toute sous-variété immergée de $\mathbb{R}^8 \simeq \mathbb{C}\mathrm{a}$ est munie d'une structure presque complexe orthogonale (voir par ex. [Br]).

Rappelons [Br, Ha] que $\mathbb{C}\mathrm{a}$ est la seule algèbre réelle de dimension 8 à unité possédant une norme euclidienne multiplicative, i.e. telle que $|xy| = |x|\,|y|$. Elle n'est pas associative, mais toutes ses sous-algèbres à deux générateurs le sont, et sont isomorphes à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$.

On peut aussi définir J un peu plus géométriquement, en remarquant que les droites J_u-complexes de $T_u\mathbb{S}^6$ sont les 2-plans réels (orientés) P tels que $\mathbb{R} + \mathbb{R}u + P$ soit une sous-algèbre de quaternions de $\mathbb{C}\mathrm{a}$. L'orientation de $\mathbb{R}u + P$ (et donc de P) est celle déduite de la structure d'algèbre.

3. Preuve du théorème 1.2

3.1. **Réduction à un problème linéaire.** On se place dans les hypothèses du théorème 1.2 (transitivité sur $\mathbb{P}(TM)$). Fixons x_0 dans M. Alors $T_{x_0}M$ est un espace vectoriel symplectique de dimension $2n$, muni en outre d'une forme trilinéaire alternée $\phi = d\omega_{x_0}$. On peut l'identifier à $\mathbb{R}^{2n}$ avec la forme symplectique standard $\omega = dx_1 \wedge dy_1 + \ldots dx_n \wedge dy_n = \omega_0$. Il résulte de l'hypothèse que le sous-groupe $G \subset \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$ préservant ω et ϕ agit transitivement sur l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{2n})$. C'est un groupe de Lie algébrique réel, qui agit aussi sur la sphère $\mathbb{S}^{2n-1}$ des droites orientées. On voit alors aisément que les orbites de la composante neutre G^o sur $\mathbb{S}^{2n-1}$ sont nécessairement ouvertes. Par connexité, G^o agit donc transitivement sur $\mathbb{S}^{2n-1}$.

Si $n > 1$ (ce que l'on peut évidemment supposer !) on est en situation d'appliquer le résultat suivant de D. Montgomery

Théorème 3.1. [Mo] *Si un groupe de Lie connexe G agit transitivement sur une variété compacte simplement connexe V, "le" sous-groupe compact maximal $K \subset G$ aussi.*

Rappelons [He, Ho] que tout groupe de Lie connexe (ou avec un nombre fini de composantes) possède un sous-groupe compact maximal K, unique à conjugaison près, et que G est difféomorphe à un produit $K \times \mathbb{R}^N$.

Puisque $U(n) = \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(2n) = \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est "le" compact maximal de $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$, le théorème 1.2 est conséquence du

Théorème 3.2. *Soit $K \subset \mathrm{U}(n)$ un sous-groupe compact connexe qui opère transitivement sur la sphère unité $\mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ et préserve une forme réelle $\mathbb{R}$-trilinéaire alternée non nulle $\phi : \Lambda^3\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$. Alors $n = 3$, $K \subset \mathrm{SU}(3)$ et $\phi = \mathrm{Re}\,(a\, dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3)$ $(a \in \mathbb{C} - 0)$.*

De plus, tout élément de $\mathrm{Sp}(6, \mathbb{R})$ préservant ϕ appartient à $\mathrm{SU}(3)$, i.e. le groupe G défini plus haut coïncide avec $\mathrm{SU}(3)$.

Montrons tout de suite la dernière affirmation : ω et ϕ permettent de définir sur $\mathbb{R}^6$ une forme quadratique q, par $(\iota_X\phi)^2 \wedge \omega = q(X)\,\omega^3$. Comme q est invariante par $\mathrm{SU}(3)$, elle est nulle ou bien euclidienne, et invariante par G. Il suffit de voir qu'elle est non nulle, ce qui est facile (par ex. $q(\overline{a}e_1) = |a|^4/3$).

Pour démontrer le théorème 3.2, on pourrait faire appel à la liste connue des sous-groupes compacts connexes $K \subset \mathrm{SO}(N)$ transitifs sur la sphère unité $\mathbb{S}^{N-1}$ de $\mathbb{R}^N$ [MoSa, Bo, On, Be, Sa], et vérifier sur cette liste que $K = \mathrm{SU}(3) \subset \mathrm{SO}(6)$ est le seul exemple qui préserve une 2-forme symplectique et une 3-forme non nulle : on a ici $N = 2n$, $K \subset \mathrm{U}(n)$, et on constate que K contient forcément $\mathrm{SU}(n)$, ou $\mathrm{Sp}(n/2)$ (groupe unitaire quaternionien) si n est pair. Seul $\mathrm{SU}(3)$ convient, car $\mathrm{Sp}(n/2)$ ne préserve que des formes de degré pair et $\mathrm{SU}(n)$ des formes de degré pair ou égal à n [Be, p. 306].

Plutôt que de reposer sur cette (difficile) classification, on va montrer comment déduire le théorème 3.2 de la théorie élémentaire des classes caractéristiques [MiSt] pour les fibrés vectoriels complexes. On montrera dans la section 4 qu'un sous-groupe fermé de $\mathrm{SU}(3)$ transitif sur $\mathbb{S}^5$ est nécessairement égal à $\mathrm{SU}(3)$.

Observons d'abord que la forme ϕ ($\mathbb{R}$-trilinéaire alternée réelle sur $\mathbb{C}^n$) se décompose en

$$\phi = \phi^{3,0} + \phi^{2,1} + \phi^{1,2} + \phi^{0,3} = 2\mathrm{Re}\,(\phi^{3,0} + \phi^{2,1}),$$

où $\phi^{p,q}(\lambda X, \lambda Y, \lambda Z) = \lambda^p \overline{\lambda}^q \phi(X,Y,Z)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Puisque $K \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, les formes *complexes* $\phi^{3,0}$, $\phi^{2,1}$ sont aussi invariantes par K. Il suffira donc de montrer que $\phi^{2,1}$ est nulle et que, si $\phi^{3,0}$ ne l'est pas, on a $n = 3$ (d'où $\phi^{3,0} = a\, dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3$).

3.2. **Le cas** $\phi^{3,0} \neq 0$. Pour alléger les notations, on pose dans cette section $\phi = \phi^{3,0}$. C'est une forme $\mathbb{C}$-trilinéaire alternée non nulle sur $\mathbb{C}^n$, invariante par K.

Pour tout $X \in \mathbb{C}^n - 0$, $\iota_X \phi = \phi(X,\cdot,\cdot)$ est une forme $\mathbb{C}$-bilinéaire alternée sur $\mathbb{C}^n$, dont le rang $2k$ (codimension – complexe – du noyau) est *indépendant de* X. En effet $\iota_{g^{-1}X}\phi = g^*(\iota_X\phi)$ pour tout g dans K, et K est transitif sur $\mathbb{S}^{2n-1}$. De plus, $\ker(\iota_X\phi)$ contient X, de sorte que l'on obtient une décomposition (orthogonale)

$$\mathbb{C}^n = L \oplus E \oplus F,$$

avec $L = \mathbb{C}X$ et $L \oplus E = \ker(\iota_X \phi)$, $\dim_{\mathbb{C}} F = 2k > 0$. En laissant varier X, on l'interprète comme une décomposition du fibré vectoriel trivial de rang n sur $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ en somme de sous-fibrés de rangs 1, $n{-}1{-}2k$ et $2k$, encore notés L, E et F.

La multiplicativité de la classe de Chern totale $c = 1 + c_1 + c_2 + \ldots$ sur les sommes de fibrés donne dans l'anneau de cohomologie $H^*(\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ l'égalité

$$1 = c(L)\, c(E)\, c(F).$$

Comme $H^*(\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ est un anneau de polynômes tronqués $\mathbb{Z}[h] = \mathbb{Z}[t]/(t^n)$ avec $h = -c_1(L)$ de degré 2, on obtient dans l'anneau de polynômes $\mathbb{Z}[t]$ une factorisation modulo t^n

$$1 + t + \cdots + t^{n-1} \equiv P(t)Q(t) \pmod{t^n},$$

avec $\deg P(t) \leq \mathrm{rg}\, E = n{-}1{-}2k$ et $\deg Q(t) \leq \mathrm{rg}\, F = 2k$ (c_p est nulle pour un fibré de rang $< p$). Mais ceci entraîne évidemment que cette factorisation est *exacte* :

$$1 + t + \cdots + t^{n-1} = P(t)Q(t)$$

et que de plus les degrés de P et Q sont les rangs de E et F.

Sans plus de renseignements, on pourrait difficilement conclure ... (voir cependant [HoGS]). L'information supplémentaire est que le fibré dual – complexe – F^* est isomorphe au fibré $F \otimes L$. En effet par définition de F, l'application $X \mapsto \iota_X\phi\restriction_F$ de L vers $\Lambda^2 F^*$ envoie tout X non nul sur une 2-forme complexe *non-dégénérée* sur F, d'où aussitôt l'isomorphisme cherché $L \otimes F \simeq F^*$ et l'égalité cruciale $c(F \otimes L) = c(F^*)$, que l'on va traduire en une propriété du polynôme $Q(t)$.

Les classes de Chern de F^* sont simplement données par $c_p(F^*) = (-1)^p c_p(F)$. Quant au calcul de $c(F \otimes L)$, il s'effectue grâce au

Lemme 3.3. *Si V, W sont deux fibrés vectoriels complexes sur B, de rangs r et s, il existe un anneau gradué A^* contenant $H^*(B,\mathbb{Z})$ dans lequel $c(V) = \prod_{i=1}^r (1 + x_i)$, $c(W) = \prod_{j=1}^s (1 + y_j)$, avec des x_i, y_j de degré 2, et $c(V \otimes W) = \prod_{i,j}(1 + x_i + y_j)$. De plus, cela reste vrai pour* tout *choix d'un A^* dans lequel $c(V)$ et $c(W)$ se décomposent comme ci-dessus.*

Démonstration: L'existence résulte du "principe de décomposition" [Hi, Hu], qui affirme qu'il y a un espace $\pi : B_1 \to B$ au-dessus de B (dépendant de V), induisant une injection $H^*(B,\mathbb{Z}) \hookrightarrow H^*(B_1, \mathbb{Z})$ et tel que $\pi^* V$ se décompose en une somme de fibrés en droites,

$$\pi^* V = \oplus_{i=1}^r \xi_i.$$

Quitte à recommencer avec le fibré $\pi^* W \to B_1$, on peut supposer qu'il se décompose lui aussi sur B_1,

$$\pi^* W = \oplus_{j=1}^s \eta_j.$$

Il suffit alors de prendre $x_i = c_1(\xi_i)$, $y_j = c_1(\eta_j)$, et d'utiliser l'additivité de c_1 sur les produits tensoriels de fibrés en droites

$$c_1(\xi_i \otimes \eta_j) = x_i + y_j.$$

L'indépendance vis-à-vis du choix de l'anneau A^* résulte de son existence, car celle-ci montre que les $c_p(V \otimes W)$ sont des polynômes "universels" à coefficients entiers $\mathcal{P}_{p,r,s}(c_1(V), \ldots, c_r(V), c_1(W), \ldots, c_s(W))$ en les classes de Chern de V et W (les $\mathcal{P}_{p,r,s}$ expriment les polynômes symétriques élémentaires des $x_i + y_j$ en fonction de ceux des x_i et des y_j). En d'autres termes, il suffit de savoir qu'*il existe une formule*[1] pour pouvoir s'en passer... □

Calculons maintenant $c(F \otimes L)$, sachant que $c(F) = Q(h)$ et $c(L) = 1 - h$: on se place dans l'anneau gradué $\mathbb{C}[h] = \mathbb{C}[t]/(t^n)$ (contenant $\mathbb{Z}[h]$), où l'on peut écrire

$$c(F) = \prod_{i=1}^{2k} (1 - \lambda_i h),$$

si $Q(t) = \prod_i (1 - \lambda_i t)$ dans $\mathbb{C}[t]$. D'après le lemme, on a donc

$$c(F \otimes L) = \prod_{i=1}^{2k} (1 - (1 + \lambda_i) h) = Q_1(h), \qquad \deg Q_1 = 2k.$$

De l'égalité $Q(-h) = c(F^*) = c(F \otimes L) = Q_1(h)$ on déduit $Q(-t) = Q_1(t)$ (puisque $\deg Q = \deg Q_1 = 2k < n$), et donc chaque $1 + \lambda_i$ est égal à un $-\lambda_{i'}$. Mais les λ_i sont $2k$ racines n-ièmes de l'unité *distinctes* (et différentes de 1) puisque $Q(t)$ divise

$$1 + t + \cdots + t^{n-1} = \prod_{l=1}^{n-1} (1 - \zeta^l t) \qquad (\zeta = \exp(2\pi\sqrt{-1}/n)).$$

L'égalité $1 + \lambda_i + \lambda_{i'} = 0$ forçant $\{\lambda_i, \lambda_{i'}\} = \{j, j^2\} = \{(-1 \pm \sqrt{-3})/2\}$, on en déduit que $2k = 2$ et 3 divise n.

Autrement dit, les 2-formes $\iota_X \phi$ constituent dans $(\Lambda^2 \mathbb{C}^n)^*$ un sous-espace vectoriel (complexe, de dimension n) dont tous les éléments non nuls sont de rang 2, et donc *décomposables*, c'est-à-dire de la forme $\alpha \wedge \beta$, $\alpha, \beta \in (\mathbb{C}^n)^*$. Une telle forme détermine un sous-espace vectoriel $\mathbb{C}\alpha + \mathbb{C}\beta$ de dimension 2 dans $(\mathbb{C}^n)^*$, i.e. une droite projective dans $(\mathbb{P}^{n-1})^* = \mathbb{P}((\mathbb{C}^n)^*)$. Tout hyperplan (projectif) de $(\mathbb{P}^{n-1})^*$ contient une telle droite, puisque $\ker(\iota_X \phi)$ contient X. De plus, la somme de deux 2-formes décomposables ω_1, ω_2 ne peut être décomposable que si les droites projectives correspondantes s'intersectent (ou encore, les 2-plans vectoriels ne sont pas en somme directe). En effet $\omega_1^2 = \omega_2^2 = (\omega_1 + \omega_2)^2 = 0$ entraîne $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$.

Le cas $\phi = \phi^{3,0}$ est donc réglé par le

Lemme 3.4. *Si, dans un espace projectif, il y a une famille de droites telles que tout hyperplan en contient une et que deux quelconques s'intersectent, l'espace projectif est un plan.*

3.3. **Le cas $\phi^{2,1} \neq 0$ est impossible.** Comme précédemment, on pose dans cette section $\phi = \phi^{2,1} \neq 0$. Si $X \in \mathbb{C}^n$, $\iota_X \phi$ est maintenant une forme complexe $\mathbb{R}$-bilinéaire alternée, qui se décompose en

$$\iota_X \phi = \alpha_X + \beta_X$$

[1] ce n'est pas clair *a priori*, car les classes de Chern d'un fibré ne le déterminent pas en général.

avec α_X, β_X de types respectifs $(2,0)$ et $(1,1)$. De plus $\alpha_{\lambda X} = \overline{\lambda}\alpha_X$, $\beta_{\lambda X} = \lambda\beta_X$, et ϕ est nulle dès que α l'est, par antisymétrie de ϕ (ce n'est que l'identification de $\Lambda^{2,1}$ avec $\Lambda^2 \otimes \overline{\Lambda^1}$: on a $\phi = \sum \alpha_{e_j} \wedge d\overline{z}_j$).

De l'égalité $\iota_{g^{-1}X}\phi = g^*(\iota_X\phi)$ pour tout $g \in K$, on déduit cette fois que $\alpha_{g^{-1}X} = g^*\alpha_X$, et comme plus haut on voit que les sous-espaces $\ker(\alpha_X)^\perp$ définissent un sous-fibré F de rang $2k$ du fibré trivial de rang n sur $P^{n-1}(\mathbb{C})$, avec $\mathbb{C}^n = L \oplus E \oplus F$.

Comme maintenant $X \mapsto \alpha_X$ est $\mathbb{C}$-*antilinéaire*, on obtient un isomorphisme de fibrés complexes

$$F^* \simeq F \otimes \overline{L} \simeq F \otimes L^*.$$

On en déduit encore une décomposition

$$1 + t + \cdots + t^{n-1} = P(t)Q(t) \qquad (\deg Q = 2k = \mathrm{rg}\, F)$$

avec cette fois

$$Q(-t) = \prod(1 + \lambda_i t) = \prod(1 - (\lambda_i - 1)t)$$

de sorte que chaque $\lambda_i - 1$ est un $-\lambda_{i'}$, i.e. $\lambda_i + \lambda_{i'} = 1$, d'où $\{\lambda_i, \lambda_{i'}\} = \{-j, -j^2\} = \{(1 \pm \sqrt{-3})/2\}$. On a donc encore $2k = 2$ mais cette fois 6 divise n.

Or les α_X forment encore dans $(\Lambda^2\mathbb{C}^n)^*$ un sous-espace vectoriel de dimension n de formes décomposables, avec $X \in \ker \alpha_X$, de sorte que le lemme 3.4 s'applique et $n = 6n' = 3$, contradiction qui achève de démontrer le théorème 1.2.

4. Unicité du contre-exemple

Dans cette section, (M, ω) désigne une variété de dimension 6, munie d'une 2-forme ω *non fermée* telle $\mathrm{Ps}(\omega)$ agisse transitivement sur $\mathbb{P}(TM)$. D'après le théorème 1.2, $\mathrm{Ps}(\omega)$ est contenu dans le pseudogroupe $\mathrm{Ps}(q)$ des isométries locales d'une métrique riemannienne q, unique à un facteur près. On normalisera q en posant $q(X, Y) = \omega(X, JY)$ pour la structure presque complexe J déterminée par ω (voir remarque 1.5).

Dans ces conditions, on va montrer qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $(M, \lambda\omega)$ soit localement difféomorphe à l'exemple sur $\mathbb{S}^6$ décrit dans la section 2. La “sphère de Calabi” apparaît ainsi comme un objet naturellement associé à la géométrie symplectique, bien qu'elle n'y appartienne pas...

Théorème 4.1. *Il existe un groupe de Lie $G \supset \mathrm{SU}(3)$, indépendant de (M, ω), et une 2-forme G-invariante $\widetilde{\omega}$ sur $G/\mathrm{SU}(3)$ telle que (M, ω) soit localement difféomorphe à $(G/\mathrm{SU}(3), \widetilde{\omega})$. De plus, les 2-formes G-invariantes sur $G/\mathrm{SU}(3)$ forment un espace vectoriel de dimension 1.*

Le résultat d'unicité annoncé en découle, sauf la question du signe de λ. Mais on s'assure aussitôt que, sur le modèle $(\mathbb{S}^6, \omega)$ de la section 2, l'antipodie $x \mapsto -x$ envoie ω sur $-\omega$.

Pour prouver le théorème 4.1, on va commencer par construire un groupe de Lie G à partir du pseudogroupe $\mathrm{Ps}(\omega)$, et montrer ensuite qu'à un isomorphisme près, il ne dépend pas de (M, ω) .

4.1. **Construction d'un modèle homogène.** Le théorème 3.2 amène à considérer le $\mathrm{SU}(3)$-fibré principal $\pi : P \to M$ des repères (complexes) unitaires tangents (e_1, e_2, e_3) de (M, q, J) dans lesquels $d\omega = a\,\mathrm{Re}\,(\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3)$, où $a > 0$ est une constante déterminée par ω (et la normalisation choisie pour q), et (ε_k) désigne la base duale (complexe) de (e_k).

Le pseudogroupe $\mathrm{Ps}(\omega)$, préservant les objets q, J, et $d\omega$ sur M, opère naturellement sur P : si $g \in \mathrm{Ps}(\omega)$ est défini en $x \in M$, l'action de g sur un repère $p \in \pi^{-1}(x)$ est donnée par la différentielle de g au point x.

De plus cette action est *libre* : tout élément de $\mathrm{Ps}(\omega)$ (à domaine de définition connexe), étant une isométrie locale de (M, q), est déterminé par sa différentielle en un point de M, i.e. par son action sur un point de P. Noter aussi que cette action commute (tautologiquement) avec celle de $\mathrm{SU}(3)$ sur P. En fait, P s'identifiera à un ouvert du groupe G, l'action de $\mathrm{Ps}(\omega)$ correspondant aux translations à gauche (locales) dans cet ouvert de G. Pour cela, il faut bien sûr s'assurer que

Lemme 4.2. *Le pseudogroupe* $\mathrm{Ps}(\omega)$ *agit transitivement sur* P.

Démonstration: Puisque $\mathrm{Ps}(\omega)$ agit transitivement sur M, il suffit de montrer que, un point x de M étant fixé, le groupe $H = \mathrm{Ps}_x(\omega)$ des germes en x d'éléments de $\mathrm{Ps}(\omega)$ fixant x opère transitivement sur la fibre $P_x = pi^{-1}(x)$. Par choix d'un point dans P_x, H s'identifie à un sous-groupe (a priori non fermé) de $\mathrm{SU}(3)$, opérant par translation à gauche sur $\mathrm{SU}(3) \simeq P_x$.

On a $H = \bigcup_{\varepsilon>0} H_\varepsilon$, où $g \in H$ appartient à H_ε si c'est le germe en x d'un élément de $\mathrm{Ps}(\omega)$ défini sur la boule ouverte $B(x, \varepsilon)$ (pour la métrique q).

Si $\varepsilon' < \varepsilon$, $H_\varepsilon \subset H_{\varepsilon'}$, et pour ε assez petit, H_ε est clairement un sous-groupe *fermé* de $\mathrm{SU}(3)$, donc un sous-groupe de Lie. En particulier la suite des composantes neutres H_ε^o se stabilise, i.e. il y a un sous-groupe compact connexe H_0 de $\mathrm{SU}(3)$ tel que $H_\varepsilon^o = H_0$ pour $\varepsilon < \varepsilon_0$. On va montrer que H_0 agit transitivement sur la sphère unité $\mathbb{S}^5 \subset \mathbb{C}^3$, puis en déduire qu'il coïncide avec $\mathrm{SU}(3)$, ce qui terminera la démonstration du lemme.

Noter d'abord que H_0 est distingué dans H, et que le groupe quotient H/H_0 est dénombrable, comme réunion des groupes finis H_ε/H_0, $\varepsilon < \varepsilon_0$. Rappelons que par hypothèse, H agit transitivement sur $\mathbb{P}^5 = \mathbb{S}^5/\pm 1$.

Si H_0 n'agissait pas transitivement sur $\mathbb{S}^5$, ses orbites seraient des sous-variétés de codimension > 0, de même que leurs images dans $\mathbb{P}^5$. Mais ces dernières sont permutées transitivement par le groupe dénombrable H/H_0, de sorte que $\mathbb{P}^5$ serait union dénombrable de sous-variétés de codimension > 0. C'est absurde, donc H_0 agit transitivement sur $\mathbb{S}^5$.

Sous-lemme 4.3. *Si* $K \subset \mathrm{SU}(3)$ *est un sous-groupe compact agissant transitivement sur* $\mathbb{S}^5 \subset \mathbb{C}^3$*, alors* $K = \mathrm{SU}(3)$.

Démonstration: Écrivant $\mathbb{S}^5 = \mathrm{SU}(3)/\mathrm{SU}(2)$, on voit que $K.\mathrm{SU}(2) = \mathrm{SU}(3)$, et donc que $\mathrm{SU}(2)$ agit transitivement sur $\mathrm{SU}(3)/K$, qui est par conséquent de dimension au plus 3. En munissant $N = \mathrm{SU}(3)/K$ d'une métrique riemannienne invariante par $\mathrm{SU}(3)$, on obtient un morphisme de $\mathrm{SU}(3)$ (de dimension 8) vers le groupe des isométries de N, qui est au plus de dimension $3.4/2 = 6$. Le groupe de Lie $\mathrm{SU}(3)$ étant simple (i.e. sans sous-groupe distingué propre de dimension > 0), l'action de $\mathrm{SU}(3)$ sur $N = \mathrm{SU}(3)/K$ est triviale, donc $K = \mathrm{SU}(3)$. □

Le candidat naturel pour l'algèbre de Lie du groupe G est évidemment l'espace $\mathfrak{g}$ des champs de vecteurs sur P invariants par l'action (libre et transitive) de $\mathrm{Ps}(\omega)$. C'est un espace vectoriel de dimension $\dim P = 14$, et pour pouvoir en faire une algèbre de Lie (avec le crochet des champs de vecteurs), il suffit de s'assurer de la régularité des éléments de $\mathfrak{g}$:

Lemme 4.4. *Tout champ de vecteurs sur* P *invariant par* $\mathrm{Ps}(\omega)$ *est* C^∞.

Démonstration: Tout d'abord, P est un sous-fibré du $\mathrm{O}(6)$-fibré principal $R \to M$ des repères orthonormés de (M,q), et le fibré tangent TR possède une trivialisation canonique $TR \simeq R \times (\mathfrak{so}(6) \oplus \mathbb{R}^6)$ (définie via la connexion de Levi-Civita), invariante par l'action des isométries locales de M. Cette trivialisation est, comme q, C^∞, et elle induit une trivialisation analogue $TP \simeq P \times (\mathfrak{su}(3) \oplus \mathbb{R}^6)$ invariante par l'action de $\mathrm{Ps}(\omega) \subset \mathrm{Ps}(q)$. Les champs de vecteurs sur P invariants par $\mathrm{Ps}(\omega)$ s'identifient alors aux applications $P \to \mathfrak{su}(3) \oplus \mathbb{R}^6$ constantes sur les orbites de $\mathrm{Ps}(\omega)$, i.e. constantes, donc C^∞. $\square$

Soit G le groupe de Lie simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Il agit localement sur P, librement et transitivement, et le sous-groupe engendré par la sous-algèbre $\mathfrak{su}(3)$ correspond à l'action de $\mathrm{SU}(3)$ sur P. En particulier, G contient $\mathrm{SU}(3)$, et le voisinage de toute fibre $P_x \subset P$ s'identifie au voisinage de $\mathrm{SU}(3)$ dans G, par choix d'un point dans P_x. Dans cette identification, les éléments de $\mathfrak{g}$ correspondent aux champs de vecteurs invariants à gauche sur G, qui engendrent comme on sait les translations à *droite* dans G. L'action de $\mathrm{Ps}(\omega)$ sur P correspond donc à celle de G par translations à gauche, d'où localement l'identification $G/\mathrm{SU}(3) \simeq P/\mathrm{SU}(3) = M$, avec leurs actions respectives de G et $\mathrm{Ps}(\omega)$. Il y a en particulier, correspondant à ω, une 2-forme G-invariante $\widetilde{\omega}$ sur $G/\mathrm{SU}(3)$.

4.2. **Unicité du groupe.** Il s'agit de voir qu'à un isomorphisme près, il n'y a sur $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(3) \oplus \mathbb{R}^6$ qu'une structure d'algèbre de Lie pour laquelle

- $\mathfrak{su}(3)$ est une sous-algèbre.
- $\mathrm{ad}(\mathfrak{su}(3))$ (ou $\mathrm{Ad}(\mathrm{SU}(3))$) respecte $\mathbb{R}^6$, et
- c'est l'action standard sur $\mathbb{C}^3 \simeq \mathbb{R}^6$.
- Il existe une 2-forme invariante non fermée sur $G/\mathrm{SU}(3)$.

Une p-forme invariante sur $G/\mathrm{SU}(3)$ équivaut à la donnée d'une p-forme $\Lambda^p\mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$, invariante par l'action de $\mathfrak{su}(3)$. Comme l'espace des 2-formes $\mathfrak{su}(3)$-invariantes sur $\mathbb{C}^3 \simeq \mathbb{R}^6$ est de dimension 1 (engendré par la forme symplectique standard ω_0), cela terminera la preuve du théorème d'unicité 4.1. Observer aussi que la dernière condition est nécessaire, sinon on trouve aussi l'algèbre de Lie du produit semi-direct $G = \mathbb{R}^6 \rtimes \mathrm{SU}(3)$, pour laquelle toute forme invariante sur $G/\mathrm{SU}(3)$ est fermée.

Une structure d'algèbre de Lie sur $\mathfrak{g}$ est determinée par la restriction du crochet à $\mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6$, i.e. deux applications bilinéaires antisymétriques

$$\alpha : \Lambda^2\mathbb{R}^6 \to \mathfrak{su}(3), \qquad \beta : \Lambda^2\mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6.$$

L'identité de Jacobi impose en outre que α, β soient des morphismes de représentations de $\mathrm{SU}(3)$, et aussi que, pour $X, Y, Z \in \mathbb{R}^6$, on ait

$$\begin{array}{rcl} \alpha(\beta(X,Y),Z) + (\text{cycl.}) &=& 0 \in \mathfrak{su}(3), \\ \alpha(X,Y)Z + \beta(\beta(X,Y),Z)) + (\text{cycl.}) &=& 0 \in \mathbb{R}^6. \end{array}$$

Or $\mathbb{R}^6$ et $\mathfrak{su}(3)$ sont des représentations réelles *irréductibles* de $\mathrm{SU}(3)$ (c'est trivial pour la première, facile pour la seconde), et on va vérifier que $\Lambda^2\mathbb{R}^6 \simeq \mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(3) \oplus \mathbb{R}^6$, comme $\mathrm{SU}(3)$-module. Dans cette décomposition, le facteur trivial $\mathbb{R}$ est engendré par la forme symplectique standard (ou plutôt son inverse), et le facteur $\mathfrak{su}(3)$ vient de l'identification $\Lambda^2\mathbb{R}^6 = \mathfrak{so}(6)$ muni de la restriction à $\mathrm{SU}(3)$ de l'action adjointe de $\mathrm{SO}(6)$. Quant au facteur $\mathbb{R}^6$, il faudrait plutôt l'écrire $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$, espace des matrices 3×3 antisymétriques complexes X, sur lequel $u \in \mathrm{SU}(3)$ agit par $X \mapsto uX{}^tu = uX\overline{u}^{-1}$. L'inclusion $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathfrak{so}(6)$ envoie X sur l'endomorphisme antisymétrique (et $\mathbb{C}$-antilinéaire) de $\mathbb{R}^6 \simeq \mathbb{C}^3$ donné par $z \mapsto X\overline{z}$. Sous cette forme, la décomposition ci-dessus s'étend aux autres dimensions. Par contre, l'isomorphisme de SU(3)-représentations réelles $\mathbb{C}^3 \simeq \mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$ est spécifique à la dimension 3 : il est fourni par la complexification du produit vectoriel habituel (noté $\times$) dans $\mathbb{R}^3$, sous la forme $Z \in \mathbb{C}^3 \mapsto \overline{Z} \times \cdot$ (la conjugaison est nécessaire pour respecter les actions de SU(3)).

D'après le lemme de Schur, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{SU}(3)}(\Lambda^2\mathbb{R}^6, \mathfrak{su}(3)) \ni \alpha$ et $\mathrm{Hom}_{\mathrm{SU}(3)}(\Lambda^2\mathbb{R}^6, \mathbb{R}^6) \ni \beta$ sont des espaces vectoriels de dimension 1 sur les corps respectifs $\mathrm{End}_{\mathrm{SU}(3)}(\mathfrak{su}(3)) \simeq \mathbb{R}$ et $\mathrm{End}_{\mathrm{SU}(3)}(\mathbb{R}^6) \simeq \mathbb{C}$.

On en déduit sans trop de peine que α, β sont nécessairement de la forme (avec $X, Y \in \mathbb{C}^3$)

$$\begin{array}{rclr} \alpha(X,Y) & = & c\,(XY^* - YX^*)_0 & \qquad (c \in \mathbb{R}) \\ \beta(X,Y) & = & a\,\overline{X \times Y} & \qquad (a \in \mathbb{C}) \end{array}$$

où $A_0 = A - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(A)\,\mathrm{id}$ désigne la partie sans trace de $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$, et $XY^* = (X_j\overline{Y_k})_{j,k}$. La vérification de l'identité de Jacobi impose

$$|a|^2 + 4c/3 = 0,$$

de sorte que nécessairement $c \leq 0$, avec égalité si et seulement si $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie du produit semi-direct $\mathrm{SU}(3) \ltimes \mathbb{R}^6$, ce qui est exclu comme on l'a déjà fait remarquer.

Or, si $a \neq 0$, la conjugaison par une homothétie complexe de $\mathbb{C}^3$ permet de supposer $a = 1$, d'où l'unicité cherchée. $\square$

5. Remarques finales

On peut se demander si, plus généralement, une p-forme non nulle η sur M dont le pseudogroupe $\mathrm{Ps}(\eta)$ opère transitivement sur $TM - 0$ est nécessairement fermée.

La réponse est positive : si $\mathrm{Ps}(\eta)$ est transitif sur $\mathbb{P}(TM)$ et si η n'est pas fermée, ou bien c'est l'exemple ci-dessus ($p = 2$, $\dim M = 6$), ou bien $p = 3$, $\dim M = 7$, et il y a encore une métrique invariante. Cela peut se montrer en utilisant la classification déjà mentionnée des sous-groupes de $\mathrm{SO}(n)$ transitifs sur $\mathbb{S}^{n-1}$. Probablement, il y a aussi unicité du modèle local, à savoir $\mathbb{S}^7 \simeq \mathrm{Spin}(7)/G_2$ et sa 3-forme invariante, unique à un facteur près.

Noter cependant qu'il n'y a pas de "théorème de Darboux" général pour les p-formes ($2 < p < \dim M - 2$), et qu'au contraire la transitivité de $\mathrm{Ps}(\eta)$ sur $TM - 0$ sélectionne des formes (fermées) η que l'on peut considérer comme analogues aux formes symplectiques. Elles semblent généralement associées à une géométrie symplectique (réelle ou complexe), ou à une structure complexe (intégrable).

Références

[Ar] V. I. Arnold, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Mir, 1976.

[Be] A. Besse, *Einstein manifolds*, Springer Verlag, 1987.

[Bo] A. Borel, *Some remarks about Lie groups transitive on spheres and tori*, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949) 580-587; *Le plan projectif des octaves et les sphères comme espaces homogènes*, C. Rend. Acad. Sc. **230** (1950) 1378-1380.

[Br] R. Bryant, *Submanifolds and special structures on the octonians*, J. Differential Geometry **17** (1982) 185-232.

[Ca] E. Calabi, *Construction and properties of some 6-dimensional almost complex manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **87** (1958) 407-438.

[Ec] B. Eckmann, *Stetige Lösungen linearer Gleichungssysteme*, Comment. Math. Helv. **15** (1943) 318–339; *Complex-analytic manifolds*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass., 1950, vol. 2, pp. 420-427. Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1952.

[Ha] R. Harvey, *Spinors and calibrations* [ch. 6], Academic Press, 1990.

[He] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Academic Press 1978.
[Hi] F. Hirzebruch, *Topological methods in algebraic geometry* [ch. 1, §§3,4], Springer Verlag 1966.
[Ho] G. Hochschild, *La structure des groupes de Lie*, Dunod, 1968.
[HoGS] H. H. Homer, W. D. Glover, R. E. Stong, *Splitting the tangent bundle of projective space*, Indiana Univ. Math. J., **31**, No. 2 (1982) 161-166.
[Hu] D. Husemoller, *Fiber bundles* [ch. 17], Springer Verlag, 3ème éd., 1994.
[Ko] S. Kobayashi, *Transformation groups in differential geometry*, Springer Verlag, 1972.
[MiSt] J. Milnor, J. Stasheff, *Characteristic classes*, Princeton University Press, 1974.
[Mo] D. Montgomery, *Simply connected homogeneous spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950) 467-469.
[MoSa] D. Montgomery, H. Samelson, *Transformation groups of spheres*, Ann. of Math. **44** (1943) 454-470.
[On] A. L. Onischik, *On Lie groups transitive on compact manifolds, I, II, III*, Amer. Math. Soc. Translations **73** (1968), 59-72; Mat. Sb. **116** (1967), 373-388; Mat. Sb. **117** (1968), 255-263.
[On2] A. L. Onischik (ed.), *Lie groups and Lie algebras 1. Foundations of Lie theory, Lie transformations groups*, Springer Verlag, 1993.
[Sa] S. Salamon, *Riemannian geometry and holonomy groups* [ch. 10], Longman, 1989.
[Sz] Z. I. Szabo, *A short topological proof for the symmetry of 2 point homogeneous spaces*, Invent. Math. **106** (1991), no. 1, 61-64.

Unité de Mathématiques Pures et Appliquées
U.M.R. 128 du C.N.R.S.
École Normale Supérieure de Lyon
46, Allée d'Italie
69364 LYON Cedex 07
France

Adresse éléctronique : `sevennec@umpa.ens-lyon.fr`